应用技术型高等教育“十三五”精品规划教材

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI

概率论与数理统计

（第二版）

主　编◎孟艳双　鲁慧芳

副主编◎崔兆诚　毛松军　林少华

中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

应用技术型高等教育"十三五"精品规划教材

概率论与数理统计

（第二版）

主　编　孟艳双　鲁慧芳

副主编　崔兆诚　毛松军　林少华

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn
·北　京·

内容提要

本书是应用型本科理工类基础课规划教材之一，是针对普通高等学校本科应用型教学的基础课程编写的数学类统编教材。本书以适应应用型教学为指导思想，着重介绍概率论与数理统计中主要内容的思想方法，力求做到理论与应用相结合。

本书介绍概率论与数理统计的基本概念、基本理论和方法，内容包括随机事件及概率、随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本知识、参数估计、假设检验等。每章末均有习题，供学生练习之用。

本书针对应用型高校理工类教学编写，同时可供科技、工程技术人员参考，对报考研究生的人员也可以提供非常有益的帮助。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 / 孟艳双，鲁慧芳主编. -- 2版
. -- 北京 : 中国水利水电出版社，2017.8 （2017.8重印）
应用技术型高等教育“十三五”精品规划教材
ISBN 978-7-5170-5597-6

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①孟… ②鲁… Ⅲ. ①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第167304号

书　　名	应用技术型高等教育“十三五”精品规划教材 概率论与数理统计（第二版）　GAILÜLUN YU SHULI TONGJI
作　　者	主　编　孟艳双　鲁慧芳 副主编　崔兆诚　毛松军　林少华
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京智博尚书文化传媒有限公司
印　　刷	三河市龙大印装有限公司
规　　格	170mm×227mm　16开本　10.25印张　205千字
版　　次	2014年8月第1版　2014年8月第1次印刷 2017年8月第2版　2017年8月第2次印刷
印　　数	3001—5000册
定　　价	26.00元

第二版前言

本书第二版是在第一版的基础上，根据新形势下国家对人才培养改革中教材改革的精神和近几年我们的教学实践经验，进行全面修订而成的。在修订中，我们仍然本着“弱化理论推导、加强知识应用”的原则，保留了原有教材的系统与风格。

“概率论与数理统计”是研究随机现象的客观规律的一门数学学科。近年来随着现代科学技术的发展，它已经被广泛应用于众多学科与行业中。另一方面，为适应高等教育的迅速发展，作为载体的教材也应与时俱进。作为大学阶段的一门重要的数学基础课，“概率论与数理统计”课程教材的改革也成为当务之急。为了适应教学新形势，进一步提高教学质量，编写一本突出基本思想和基本方法，注重培养学生应用概率统计方法分析和解决实际问题能力，便于学习的《概率论与数理统计》十分必要。

本书是根据教育部理科数学课程教学指导委员会最新修订的《理科类本科数学基础课教学基本要求》（修订稿）的精神和原则，在多年教学实践的基础上，结合多年学习、研究和在教学工作中的一些感悟与经验，面向理工科类本科各专业大学生编写的。本书结构严谨，逻辑严密，语言准确，解析详细，易于学生阅读。弱化抽象理论的介绍，突出理论的应用和方法的介绍，内容深广度适当，贴近教学实际，便于教师教与学生学。本教材以适应应用型教学为指导思想，着重介绍概率论与数理统计中主要内容的思想方法，力求做到科学性与实用性相结合。在内容的处理上从具体到一般，由直观到抽象，由浅入深，循序渐进。本书在涵盖基本内容的基础上略去了一些较难的或叙述较烦琐的证明，弱化了理论推导以及对学生运算技巧的要求，着重介绍内容中所蕴涵的思想及解决问题的基本方法，突出科学的思维方式，拓宽领域，加强应用。同时，为提高学生应用概率论与数理统计解决实际问题的能力，书中包含大量概率论与数理统计在解决实际问题中的应用实例。本书针对应用型高校理工类教学需要编写，同时可供科技、工程技术人员参考。

本书由孟艳双、鲁慧芳担任主编，由毛松军、崔兆诚、林少华担任副主编。各章的具体分工如下：第 1 章由林少华编写，第 2 章由孟艳双编写，第 3 章由崔兆诚编写，第 4 章由毛松军编写，第 5、6 章由鲁慧芳编写，第 7、8、9 章由上述各位老师合作编写。参加本书编写和修订再版的人员都是多年担任“概率论与数理统计”课程教学的教师，包括教授、副教授等专业技术人员，他们都有较深的

理论造诣和较丰富的教学经验。

在编写过程中，参阅了大量国内外同类教材，受到不少启发和教益，谨向有关作者表示诚挚的谢意！同时，山东交通学院教务处、理学院的有关领导及同仁对本书的编写给予了热情的支持和指导，在此一并致谢。

由于作者水平所限，加之时间仓促，书中难免有疏漏或者不妥之处，恳请专家及同行批评指正。

编　者

2017 年 5 月

目 录

第 1 章

随机事件及概率

本章学习目标

“随机事件”和“概率”是概率论中两个最基本的概念，了解了样本空间、事件的关系和运算才能研究复杂事件，掌握了“概率”才能进一步理解“条件概率”“全概率公式”“贝叶斯公式”和“独立性”，本章内容是整个概率论的基础，学好它至关重要。通过本章的学习，重点掌握以下内容：

- 事件的关系和运算
- 概率的性质
- 古典概型中概率的计算
- 条件概率的含义和计算
- 全概率公式和贝叶斯公式的计算
- 独立性的含义和计算

1.1 随机事件

1.1.1 随机试验

人们在实际生活中会遇到两类现象：一类称之为**确定性现象（必然现象）**，例如，向空中抛掷一石子，石子落地，同性电荷相斥，异性电荷相吸等；另一类称之为**随机现象（偶然现象）**，例如，抛一枚质地均匀的硬币，其结果可能是正面（规定刻有国徽的一面为正面）朝上，也可能是反面朝上，在合格品率为 85%的产品中任取一件产品，有可能取到的是合格品，也有可能取到的是不合格品.

在研究实际问题时，需要做各种各样的观察与试验，一般满足以下三个条件的试验称为**随机试验**：

（1）试验可以在相同条件下重复进行；

（2）试验的所有可能结果是事先明确可知的；

（3）每次试验之前不能确定哪一个结果一定会出现.

随机试验包括对随机现象进行观察、测量、记录或进行科学实验等．我们以后提到的试验都是指随机试验，也简称为**试验**，通常用字母 E 表示，例如：

E_1：掷一颗质地均匀的骰子，观察出现的点数．

E_2：一箱中装有标号 1～30 的 30 个红、白两种颜色的乒乓球，从箱中任意抽取 1 个球：（1）观察其号数；（2）观察其颜色．

E_3：测量车床加工零件的直径．

E_4：观察某厂生产的灯泡的使用寿命．

对于随机现象，人们经过长期的观察或进行大量的试验发现：发生的结果并非是杂乱无章的，而是有规律可寻的．例如，大量重复地抛掷一枚硬币，得到正面朝上的次数与正面朝下的次数大致都是抛掷总次数的一半；同一门炮发射多发炮弹射击同一目标，弹着点按照一定的规律分布．在大量的重复试验或观察中所呈现出的固有规律性，就是所谓的**统计规律性**．而概率论与数理统计正是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科．

1.1.2 样本空间

对于随机试验，人们感兴趣的是试验结果，即每次随机试验后所发生的结果．将随机试验 E 的每一个可能的结果，称为随机试验 E 的一个**样本点**，通常用字母 ω 表示．随机试验 E 的所有样本点组成的集合称为试验 E 的**样本空间**，通常用字母 Ω 表示．

例 1　E_1：掷一颗质地均匀的骰子，观察出现的点数．

“出现 i 点”，$i=1,2,\cdots,6$ 是 E_1 的样本点，所以样本空间可简记为

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}.$$

例 2　E_2：一箱中装有标号 1～15 的 15 个红、白两种颜色的乒乓球：（1）从箱中任意抽取 1 个球，观察其号数；（2）从箱中任意抽取 2 个球，观察其颜色．

（1）观察其号数．

“取得 i 号球”，$i=1,2,\cdots,15$ 是 E_2 的样本点，所以样本空间可简记为

$$\Omega_1=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{15}\};$$

（2）观察其颜色．

试验的全部样本点是：(红，红)，(红，白)，(白，白)，其中(红，红)表示两球都是红球，以此类推，则样本空间为

$$\Omega_2=\{(红，红),(红，白),(白，白)\}.$$

例 3　E_3：测量车床加工零件的直径．

E_3 的样本点：ω_x 表示“测量的直径是 x 毫米”$(a\leqslant x\leqslant b)$．

所以样本空间可简记为

$$\Omega=\{\omega_x | a\leqslant x\leqslant b\}.$$

例 4　E_4：在一批灯泡中任意抽取一只，测试其燃烧寿命.

ω_t = "测得灯泡燃烧寿命为 t 小时" $(0 \leqslant t < +\infty)$ 是 E_4 的样本点，所以样本空间可表示为

$$\Omega = \{\omega_t \mid 0 \leqslant t < +\infty\}.$$

从上述例题可以看到：样本空间可以是一维点集或多维点集，可以是离散点集，也可以是某个区域，可以是有限集或无限集（对应的称为有限样本空间或无限样本空间）.

1.1.3　随机事件

1. 随机事件

一个随机试验中可能发生也可能不发生的事件称为该试验的随机事件（简称事件），通常用字母 A 、B 、C 等表示. 实际上，随机事件是由若干个样本点组成的集合，是样本空间的子集.

2. 基本事件

试验的每一可能的结果称为基本事件. 一个样本点 ω 组成的单点集 $\{\omega\}$ 就是随机试验的基本事件.

3. 必然事件

每次试验中必然发生的事件称为必然事件. 上述内容已给出样本空间的概念. 在每次试验中，如果将样本空间也看成是事件的话，则这个事件必然发生. 因而样本空间是必然事件. 所以我们仍用 Ω 表示必然事件.

4. 不可能事件

每次试验中不可能发生的事件称为不可能事件. 它不含任何样本点，可理解为空集，记为 $\varnothing$.

注（1）样本空间的构成是由试验的条件和观察的目的所决定的.

（2）基本事件是事件的一种，由若干个基本事件组成的事件，通常称为复合事件.

（3）事件 A 发生当且仅当试验结果中出现了 A 中包含的某个基本事件.

1.1.4　事件之间的关系和运算

在一个样本空间 Ω 中，包含许多的随机事件. 研究随机事件的规律，往往是通过对简单事件规律的研究去发现更为复杂事件的规律. 为此，我们引入事件之间的一些重要关系和运算. 由于任一随机事件是样本空间的子集，所以事件之间的关系和运算与集合之间的关系及运算是完全类似的.

1. 事件的包含及相等

如果“事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生”，则称事件 B 包含事件 A，也称 A 是 B 的子事件，记作

$$A \subset B \text{ 或 } B \supset A .$$

在上述例 1 掷骰子的试验中，设 $A=\{2\}$，$B=\{2,4,6\}$，显然 $A \subset B$，即事件 A 是事件 B 的子事件.

注意：对任一事件 A 都有子事件关系

$$\varnothing \subset A \subset \Omega .$$

我们给出事件包含关系的一个直观的几何解释，如图 1.1 所示.

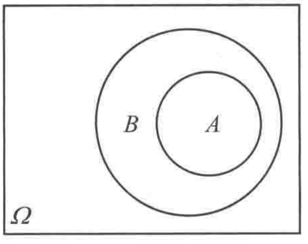

图 1.1　$A \subset B$

如果有 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A=B$.

易知，相等的两个事件 A、B 总是同时发生或同时不发生，亦即 $A=B$ 等价于它们是由相同的样本点组成的.

2. 事件的和（并）

“事件 A 与 B 中至少有一个事件发生”，这样的事件称为事件 A 与 B 的和事件，记作 $A \cup B$.

可见，$A \cup B$ 是由所有属于 A 或属于 B 的样本点组成. 事件 A 与 B 的和事件 $A \cup B$ 对应集合 A 与 B 的并集，如图 1.2 阴影部分所示.

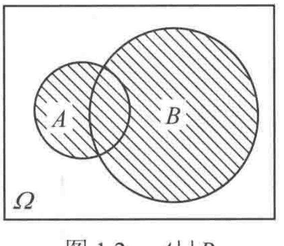

图 1.2　$A \cup B$

例如，在掷一枚骰子的试验中，若设事件 $A=\{2,3,4\}$，事件 $B=\{1,2\}$，则和事件为

$$A \cup B = \{1,2,3,4\}，表示\{掷出的点数小于5\}.$$

和事件可以推广到有限多个事件与可列多个事件之和的情形：

对于“事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生”这一事件，我们称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件，用 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 表示，简记为

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i .$$

对于“可列多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中至少有一个发生”这一事件，我们称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和事件，用 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$ 表示，简记为

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i .$$

3. 事件的积（交）

“事件 A 与 B 同时发生”，这样的事件称作事件 A 与 B 的积（或交）事件，记作

$$A \cap B 或 AB .$$

AB 是由既属于 A 又属于 B 的样本点组成. 如果将事件用集合表示，则事件 A 与 B 的积事件 AB 对应集合 A 与 B 的交集. 其几何意义如图 1.3 中的阴影部分所示.

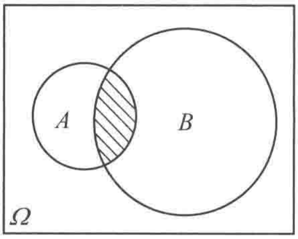

图 1.3　$A \cap B$

例如，在掷骰子试验中，若设事件 $A = \{2,3,4\}$，事件 $B = \{1,2\}$，则积事件为 $A \cap B = \{2\}$，表示\{掷出的点数是 2 点\}.

类似地，也可以将积事件推广到有限多个与可列多个事件之积的情形：

（1）用 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 或 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生的事件；

（2）用 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生的事件.

4. 事件的差

“事件 A 发生而事件 B 不发生”，这样的事件称为事件 A 与 B 的差事件，记作

$$A - B .$$

$A - B$ 是由所有属于 A 而不属于 B 的样本点组成，其几何意义如图 1.4 中的阴影部分所示. 显然 $A - B = A\overline{B}$.

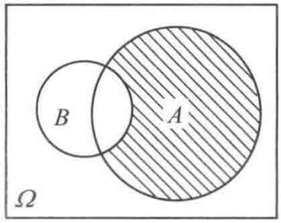

图 1.4　$A-B$

例如，在掷骰子试验中，若设事件 $A=\{2,3,4\}$，事件 $B=\{1,2\}$，则差事件

$$A-B=\{3,4\}.$$

5. 事件互不相容

“事件 A 与事件 B 不能同时发生”，也就是说，AB 是一个不可能事件，即

$$AB=\varnothing,$$

此时称事件 A 与 B 是互不相容的（或互斥的）.

A 与 B 互不相容等价于它们没有相同的样本点，即没有公共的样本点．若用集合表示事件，则 A 与 B 互不相容即为 A 与 B 是不相交的，如图 1.5 所示.

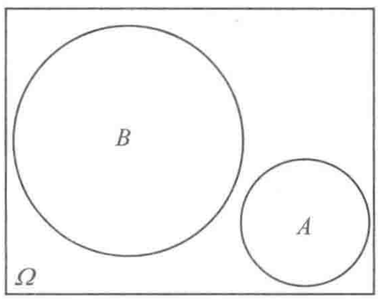

图 1.5　$AB=\varnothing$

如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中，任意两个事件都不可能同时发生，即

$$A_i\cap A_j=\varnothing,\quad i\neq j,\quad i,j=1,2,\cdots,n,$$

则称这 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容（或互斥）.

通常把两个互不相容的事件 A 与 B 的并记作

$$A+B.$$

把 n 个两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并记作

$$A_1+A_2+\cdots+A_n \text{（简记为} \sum_{i=1}^{n} A_i \text{）}.$$

容易看出，在随机试验中，任何两个不同的基本事件都是互不相容的.

6. 对立事件（逆事件）

若 A 是一个事件，令 $\overline{A}=\Omega-A$，称 $\overline{A}$ 是 A 的对立事件，或称为事件 A 的逆

事件.

也就是说，$\overline{A}$ 是由样本空间 Ω 中所有不属于 A 中的样本点构成的. 如果把事件 A 看作集合，那么 $\overline{A}$ 就是 A 的补集. 图 1.6 中的阴影部分表示 $\overline{A}$.

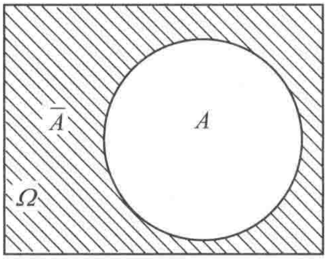

图 1.6 $\overline{A}$

显然，在一次试验中，若 A 发生，则 $\overline{A}$ 必不发生，反之亦然； A 与 $\overline{A}$ 中必然有一个发生，且仅有一个发生，即事件 A 与 $\overline{A}$ 满足关系

$$A \cap \overline{A} = \varnothing \text{，} \quad A + \overline{A} = \Omega \text{ .}$$

必然事件 Ω 与不可能事件 $\varnothing$ 是对立事件，同时又是互不相容事件.

注 若事件 A 、B 互为对立事件，则事件 A 、B 必互不相容；但是，若事件 A 、B 互不相容，则事件 A 、 B 未必互为对立事件.

例如，在掷骰子试验中，若 $A = \{1,2\}$ ， $B = \{3,5\}$ ，则 A 与 B 互不相容. 但是，事件 B 不是 A 的对立事件， A 的对立事件 $\overline{A} = \{3,4,5,6\}$.

7. 互不相容的完备事件组

将事件 A 与 $\overline{A}$ 的关系推广到 n 个事件的情形：

如果 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生，且任意两个事件不可能同时发生，即

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega \text{，}$$

$$A_i \cap A_j = \varnothing \text{，} \quad i \neq j \text{，} \quad i, j = 1, 2, \cdots, n \text{，}$$

则称这 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成一个互不相容的完备事件组，又称为样本空间 Ω 的一个划分，几何解释如图 1.7 所示.

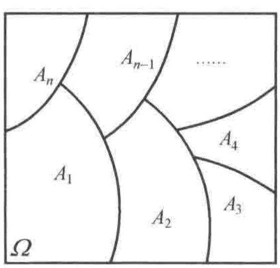

图 1.7 样本空间 Ω 的一个划分

例如，在掷骰子试验中，事件 $A=\{1,2\}$，$B=\{3,5\}$，$C=\{4,6\}$ 构成一个互不相容的完备事件组.

注 样本空间的 Ω 的所有基本事件构成互不相容的完备事件组.

1.1.5 事件运算法则

由事件关系与运算的定义可以看出，它们与集合的关系与运算是一致的. 因此，集合的运算性质对事件的运算也都适用.

事件的运算法则有：

1. 交换律

$$A\cup B=B\cup A,\quad AB=BA. \tag{1.1}$$

2. 结合律

$$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), \tag{1.2}$$

$$ABC=(AB)C=A(BC). \tag{1.3}$$

3. 分配律

$$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C), \tag{1.4}$$

$$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC). \tag{1.5}$$

4. 德·摩根定律

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\ \overline{B},\quad \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}, \tag{1.6}$$

对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}. \tag{1.7}$$

例 5 甲、乙、丙三人各射一次靶，记 $A=\{$甲中靶$\}$，$B=\{$乙中靶$\}$，$C=\{$丙中靶$\}$，则用上述三个事件的运算，有下列各事件的表示如下：

（1）甲未中靶：　$\overline{A}$；

（2）甲中靶而乙未中靶：　$A\overline{B}$；

（3）三人中只有丙未中靶：　$AB\overline{C}$；

（4）三人中恰好有一人中靶：　$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$；

（5）三人中至少有一人中靶：　$A\cup B\cup C$；

（6）三人中至少有一人未中靶：　$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 或 $\overline{ABC}$；

（7）三人中恰有两人中靶：　$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$；

（8）三人中至少两人中靶：　$AB\cup AC\cup BC$；

（9）三人均未中靶：　$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；

（10）三人中至多一人中靶：　$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；

（11）三人中至多两人中靶：　$\overline{ABC}$ 或 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.