现代数学基础

62 非线性泛函分析

■ 袁荣

高等教育出版社

现代数学基础

62

非线性泛函分析

袁荣

高等教育出版社·北京

内容简介

本书介绍非线性泛函分析的基本内容和基本方法。内容包括Banach空间微分学、隐函数定理、分歧定理、半序方法和上下解、Brouwer度、Leray-Schauder度、锥映射的拓扑度、重合度、不动点定理、极值原理、Ekeland变分原理、形变引理、极小极大原理、环绕和指标等。本书简明扼要，深入浅出，选编了一定数量的习题，既重视理论，又联系应用。

本书可作为高等学校数学及其相关专业研究生的教材以及本科高年级学生的选修课教材，也可供从事非线性问题研究的研究人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

非线性泛函分析 / 袁荣编著. -- 北京 ：高等教育出版社，2017.9

（现代数学基础）

ISBN 978-7-04-047926-3

Ⅰ. ①非… Ⅱ. ①袁… Ⅲ. ①非线性-泛函分析 Ⅳ. ①O177.91

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第140741号

非线性泛函分析

FEIXIANXING FANHAN FENXI

策划编辑 李华英　责任编辑 李华英　封面设计 张　楠　版式设计 杜微言

责任校对 殷　然　责任印制 尤　静

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　　刷	北京佳信达欣艺术印刷有限公司		http://www.hepmall.com
开　　本	787mm × 1092mm　1/16		http://www.hepmall.cn
印　　张	13.5		
字　　数	250千字	版　　次	2017年9月第1版
购书热线	010-58581118	印　　次	2017年9月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	59.00元

物 料 号 47926-00

前言

许多实际问题都是非线性问题. 非线性问题的研究产生了当今非线性科学中的各种研究方法, 促进了非线性泛函分析理论的产生和发展. 如今, 非线性泛函分析已经成为研究非线性问题的现代分析基础.

国内外以非线性泛函分析或度理论或变分法为名的著作已有多本, 并且在动力系统和偏微分方程的许多著作中都要介绍非线性泛函分析的一些基本内容. 通常的本科泛函分析教材只包含线性泛函分析的主要内容, 现在的研究生泛函分析教材也包含了非线性泛函分析的一些基本内容, 这说明在研究生课程中讲授非线性泛函分析的基本理论是非常必要的.

基于这些考虑, 北京师范大学数学科学学院将非线性泛函分析作为研究生的基础课, 同时在本科高年级学生的选修课中开设同名课程. 本书是作者在多年讲授这门基础课的基础上编写而成的. 非线性泛函分析内容庞大, 与许多问题有密切的联系, 要想在每周 3 学时共 54 学时的时间内作一介绍, 就必须对内容进行取舍. 我们选择微分学、隐函数定理、度理论、分歧理论、锥和变分法作为基础课的教学内容. 这些

内容是最基本的, 已经成为研究非线性问题需要具备的基本知识.

以非线性泛函分析为名的著作和教材可以从参考文献中得到部分了解, 这些著作或教材为本书的写作提供了许多素材和思考. 非线性泛函分析的学习和研究要与所研究的问题联系起来, 本书对此没有深入进行, 主要是时间和篇幅所限, 建议读者参考其他著作.

本书写作过程中得到了国家自然科学基金的资助, 得到了北京师范大学数学科学学院的大力支持, 得到了我的家人的许多帮助, 还得到了许多老师和学生的帮助, 齐良平博士帮助校正了书稿, 送审过程中得到了审查专家的许多有益建议, 在此表示感谢. 限于本人的学识, 不到之处敬请谅解.

袁荣

2016 年 10 月于北京师范大学数学科学学院

Email: ryuan@bnu.edu.cn

目录

第一章 Banach 空间上的非线性算子 · · · · · · · · · · · · · 1

§1.1 Banach 空间及线性算子 · · · · · · · · · · · · · · · · · 1

§1.1.1 Banach 空间和 Hilbert 空间 · · · · · · · · · · · · · · · 1

§1.1.2 Banach 空间的例子 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 3

§1.1.3 有界线性算子 · 4

§1.1.4 共轭空间 · 6

§1.1.5 线性算子的谱 · 8

§1.1.6 紧算子和 Riesz-Schauder 理论 · · · · · · · · · · · · · · 9

§1.1.7 Poincaré 不等式和 Sobolev 嵌入定理 · · · · · · · · · · · 10

§1.2 抽象函数的微积分 · 11

§1.2.1 抽象函数的积分 · 11

§1.2.2 抽象函数的微分 · 12

§1.3 Fréchet 可微性 · 13

§1.4 Gâteaux 微分 · 15

§1.5 几个例子 · · · 20
§1.5.1 Nemytskii 算子的连续性 · · · 20
§1.5.2 Nemytskii 算子的可微性 · · · 21
§1.5.3 一个变分泛函 · · · 25
§1.6 高阶导数与 Taylor 公式 · · · 31
§1.7 隐函数定理 · · · 36
§1.7.1 隐函数定理 · · · 36
§1.7.2 常微分方程解的存在性 · · · 39
§1.8 全局隐函数定理 · · · 41
§1.8.1 全局隐函数定理 · · · 41
§1.8.2 常微分方程的边值问题 · · · 42
§1.9 分歧问题 · · · 44
§1.9.1 Lyapunov-Schmidt 过程 · · · 45
§1.9.2 分歧定理 · · · 47
§1.9.3 Hopf 分歧定理 · · · 51
§1.10 半序 Banach 空间 · · · 54
§1.10.1 锥与半序 · · · 54
§1.10.2 正泛函与共轭锥 · · · 60
§1.11 上下解方法 · · · 62
§1.12 混合单调算子 · · · 67
习题 · · · 70

第二章 拓扑度理论 · · · 73
§2.1 Brouwer 度的定义 · · · 73
§2.1.1 Sard 定理 · · · 73
§2.1.2 C^2 映射的 Brouwer 度 · · · 75
§2.1.3 Brouwer 度的定义 · · · 81
§2.2 Brouwer 度的性质 · · · 84
§2.2.1 Brouwer 度的基本性质 · · · 85

§2.2.2 Brouwer 度的性质 · · · · · · · · · · · · · · 87
§2.2.3 简化定理与乘积公式 · · · · · · · · · · · · · · 89
§2.2.4 度理论的公理化 · · · · · · · · · · · · · · 90
§2.2.5 注记 · · · · · · · · · · · · · · 97
§2.3 Brouwer 不动点定理与 Borsuk 定理 · · · · · · · · · · · · · · 99
§2.4 Leray-Schauder 度 · · · · · · · · · · · · · · 105
§2.4.1 紧连续映射及其性质 · · · · · · · · · · · · · · 105
§2.4.2 全连续场与紧同伦 · · · · · · · · · · · · · · 110
§2.4.3 Leray-Schauder 度的定义 · · · · · · · · · · · · · · 111
§2.4.4 Leray-Schauder 度的性质 · · · · · · · · · · · · · · 113
§2.4.5 孤立零点的指数 · · · · · · · · · · · · · · 116
§2.5 不动点定理 · · · · · · · · · · · · · · 118
§2.5.1 Leray-Schauder 不动点定理 · · · · · · · · · · · · · · 119
§2.5.2 范数形式的拉伸与压缩不动点定理 · · · · · · · · · · · · · · 123
§2.5.3 Borsuk 定理 · · · · · · · · · · · · · · 125
§2.6 锥映射的拓扑度 · · · · · · · · · · · · · · 127
§2.7 重合度介绍 · · · · · · · · · · · · · · 135
§2.8 严格集压缩场和凝聚场的拓扑度 · · · · · · · · · · · · · · 139
§2.8.1 非紧性测度 · · · · · · · · · · · · · · 139
§2.8.2 严格集压缩场和凝聚场的拓扑度 · · · · · · · · · · · · · · 145
§2.9 全局分歧定理 · · · · · · · · · · · · · · 147
习题 · · · · · · · · · · · · · · 152

第三章　变分方法 · · · · · · · · · · · · · · 157

§3.1 极值原理 · · · · · · · · · · · · · · 157
§3.1.1 极值的必要条件 · · · · · · · · · · · · · · 157
§3.1.2 Euler-Lagrange 方程 · · · · · · · · · · · · · · 158
§3.1.3 极值存在的条件 · · · · · · · · · · · · · · 161
§3.1.4 条件极值 · · · · · · · · · · · · · · 166
§3.1.5 Ekeland 变分原理 · · · · · · · · · · · · · · 169

§3.1.6 Nehari 技巧 · 173
§3.2 极小极大原理 · 173
§3.2.1 伪梯度向量场与形变引理 · · · · · · · · · · · · · · 173
§3.2.2 极小极大原理 · 179
§3.3 $\mathbb{Z}_2$ 指标和畴数 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 183
§3.3.1 $\mathbb{Z}_2$ 指标 · 184
§3.3.2 $\mathbb{Z}_2$ 伪指标 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · 188
§3.3.3 畴数 · 193
习题 · 197
参考文献 · **201**

第一章　Banach 空间上的非线性算子

本章首先回顾 Banach 空间以及线性算子. 无穷维空间上的非线性算子的研究是本书的重点内容. 本章将介绍非线性算子的可微性、隐函数定理、分歧问题、以及有序 Banach 空间.

§1.1　Banach 空间及线性算子

为了查阅方便, 本节回顾线性泛函分析的一些基本概念和内容, 更多的内容请参考其他书籍 [9, 10].

§1.1.1　Banach 空间和 Hilbert 空间

定义 1.1.1　设 X 是一个非空集. 如果存在双变量实值函数 $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, 对 $\forall x, y, z \in X$, 满足下列三个条件:

(1) $\rho(x,y) \geqslant 0$, 且 $\rho(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;

(2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;

(3) $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y)+\rho(y,z)$,

那么称 X 是**距离空间**, ρ 叫作 X 上的**距离**, 以 ρ 为距离的距离空间 X 记作 (X,ρ).

定义 1.1.2 距离空间 (X,ρ) 上的点列 $\{x_n\}$ 叫作**基本列**, 是指: 对任意 $\epsilon>0$, 存在 $N=N(\epsilon)$, 使得当 $m,n \geqslant N$ 时, 有 $\rho(x_n,x_m)<\epsilon$.

如果空间中所有基本列都是收敛的, 则称该空间是**完备的**.

用 K 代表实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$.

定义 1.1.3 设 X 是 K 上的线性空间. 映射 $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ 叫作 X 上的**范数**, 如果它满足条件:

(1) $\|x\| \geqslant 0, \forall x \in X$, 且 $\|x\|=0 \Longleftrightarrow x=\theta$ (正定性);

(2) $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|, \forall x,y \in X$ (三角不等式);

(3) $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|, \forall \alpha \in K, \forall x \in X$ (齐次性).

X 中的距离定义为

$$d(x,y)=\|x-y\|, \quad x,y \in X.$$

定义 1.1.4 定义了范数的线性空间称为**线性赋范空间**. 完备的线性赋范空间称为 **Banach 空间**, 简称 **B 空间**.

定义 1.1.5 给定数域 K 上的线性空间 X. $X \times X \to K$ 的一个二元函数 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 如果满足以下四个条件

(1) $\langle \alpha x,y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle$;

(2) $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$;

(3) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$ (共轭对称性);

(4) $\langle x,x\rangle \geqslant 0$, 且 $\langle x,x\rangle=0 \Longleftrightarrow x=\theta$ (正定性),

就称为 X 上的**内积**.

有内积的线性空间称为**内积空间**. 当 $K=\mathbb{R}$ 时, 称内积空间是实的; 当 $K=\mathbb{C}$ 时, 称内积空间是复的.

定义 1.1.6 完备的内积空间称为 **Hilbert 空间**.

§1.1.2 Banach 空间的例子

例 1.1 空间 $C^k(\overline{\Omega})$. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域, k 是非负整数, $\overline{\Omega}$ 上 k 次连续可微函数所构成的空间记为 $C^k(\overline{\Omega})$, 按通常的方法定义加法和数乘. 对 $u \in C^k(\overline{\Omega})$, 定义 u 的范数为

$$\|u\|_{C^k} = \max_{|\alpha| \leqslant k} \max_{x \in \overline{\Omega}} |\partial^\alpha u(x)|,$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 是重指标, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, 而

$$\partial^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

可以验证这是一个无穷维 Banach 空间.

$C_0^k(\Omega)$ 表示 $C^k(\overline{\Omega})$ 中所有支集包含在 Ω 内的 u 的全体, 其中 u 的支集定义为 $\overline{\{x \in \overline{\Omega} : u(x) \neq 0\}}$. $C_0^k(\Omega)$ 是 $C^k(\overline{\Omega})$ 的子空间.

例 1.2 空间 $L^p(\Omega)$. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是 Lebesgue 可测集, $p \in [1, \infty)$, 定义

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : u \text{ 可测}, \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \right\},$$

按通常的加法与数乘规定运算, 并且把几乎处处相等的两个函数看成是同一个函数. 对 $u \in L^p(\Omega)$, 定义范数

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

例 1.3 l^p 空间.

$$l^p = \left\{ x = (x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots) : x_k \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^\infty |x_k|^p < \infty \right\},$$

范数为

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

例 1.4 空间 $L^\infty(\Omega)$. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是可测集. 如果 Ω 上可测函数 u 与 Ω 上的一个有界函数几乎处处相等, 则称 u 是 Ω 上的一个**本性有界函数**. Ω 上的一切本性有界可测函数的全体记作 $L^\infty(\Omega)$, 定义范数

$$\|u\|_\infty = \inf_{\mu(E)=0, E\subset\Omega}\left(\sup_{x\in\Omega\setminus E}|u(x)|\right).$$

例 1.5 Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$. 设 u, v 是 Ω 上的 Lebesgue 可积函数, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 是重指标. 如果对任何 $\phi \in C_0^{|\alpha|}(\Omega)$, 有

$$\int_\Omega v\phi dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u\partial^\alpha \phi dx,$$

则称 v 是 u 的第 α 次**弱导数**, 记作 $v = \partial^\alpha u$. 如果对所有的重指标 α, $|\alpha| \leqslant k$, $\partial^\alpha u$ 存在, 则称 u 在 Ω 中是 k 次**弱可微的**. Ω 中所有 k 次弱可微函数的全体记为 $W^k(\Omega)$. 记

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in W^k(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leqslant k\},$$

并定义范数

$$\|u\| = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leqslant k}|\partial^\alpha u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$C_0^k(\Omega)$ 在 $W^{k,p}(\Omega)$ 中的闭包, 记为 $W_0^{k,p}(\Omega)$, 是 $W^{k,p}(\Omega)$ 的子空间.

§1.1.3 有界线性算子

设 X, Y 是两个线性空间, $D \subset X$ 是一个子空间. $T : D \to Y$ 是一个映射, D 称为 T 的**定义域**, 记为 $D(T)$. 如果

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \quad \forall x, y \in D, \quad \forall \alpha, \beta \in K,$$

那么称 T 是一个**线性算子**. $R(T) = \{T(x) : \forall x \in D\}$ 称为 T 的**值域**.

注 一个算子 T 是线性算子, 不仅要求 T 本身具有线性性, 而且还要求它的定义域是线性子空间. 因而, 我们不妨设 $D(T) = X$.

定义 1.1.7 设 X, Y 是 Banach 空间, T 为 $X \to Y$ 的线性算子. 如果有正常数 M, 使得 $\|Tx\|_Y \leqslant M\|x\|_X, \forall x \in X$, 那么称线性算子 T 是**有界的**.

定理 1.1 设 X, Y 是 Banach 空间, 那么线性算子 T 是有界的当且仅当 T 是连续的.

用 $L(X,Y)$ 表示 X 到 Y 的有界线性算子的全体. 对线性算子 $T: X \to Y$, 定义

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Tx\|_Y,$$

称 $\|T\|$ 为算子 T 的**范数**. 对于有界线性算子, 有如下的重要定理.

定理 1.2 (Banach) 设 X, Y 是 Banach 空间. 若 $T \in L(X,Y)$, 它既是单射又是满射, 那么 $T^{-1} \in L(Y,X)$.

Banach 定理的更一般形式是下面的开映射定理.

定理 1.3 (开映射定理) 设 X, Y 是 Banach 空间. 若 $T \in L(X,Y)$ 是一个满射, 则 T 是开映射.

定理 1.4 (闭图像定理) 设 X, Y 是 Banach 空间. 若 $T: X \to Y$ 是闭线性算子, 且 $D(T)$ 是闭的, 则 T 是连续的.

定理 1.5 (共鸣定理或一致有界定理) 设 X, Y 是 Banach 空间. 如果

$$W \subset L(X,Y), \quad 使得 \sup_{T \in W} \|Tx\| < \infty, \quad \forall x \in X,$$

那么存在常数 M, 使得 $\|T\| \leqslant M \ (\forall T \in W)$.

设 X 是实 Banach 空间, 由 X 到 $\mathbb{R}$ 的线性映射称作是 X 上的**线性泛函**.

定理 1.6 (Hahn-Banach) 设 X 是 Banach 空间, X_0 是 X 的线性子空间, f_0 是定义在 X_0 上的有界线性泛函, 则在 X 上必有有界线性泛函 f 满足:

(1) $f(x)=f_0(x)\quad(\forall x\in X_0)$ (延拓条件);

(2) $\|f\|=\|f_0\|_{X_0}$ (保范条件).

用 X^* 表示 X 上的有界线性泛函全体, $f\in X^*\setminus\{0\}$, $r\in\mathbb{R}$, 称子集

$$H=\{x\in X:f(x)=r\}$$

为 X 的一个**超平面**; 而称集合

$$H^r(f)=\{x\in X:f(x)\geqslant r\},\quad H_r(f)=\{x\in X:f(x)\leqslant r\}$$

为由超平面 H 所确定的**半空间**, 它们分别位于 H 的两侧.

设 A,B 是 X 中的两个集合, 如果有某个超平面 H, 使得 A 位于 H 的一侧, 而 B 位于 H 的另一侧, 则称 A,B 被**超平面** H **所分离**. 进一步, 如果还有 $A\cap H=\varnothing, B\cap H=\varnothing$, 则称 A,B 被**超平面** H **严格分离**.

设 A 是 X 的子集, H 是 X 的一个超平面, 如果 A 位于 H 的一侧, 且 $H\cap A\neq\varnothing$, 则称 H 是 A 的**支撑超平面**.

定理 1.7 (Mazur 关于凸集的隔离性定理)　设 X 是实 Banach 空间, $C\subset X$ 是凸集, 且 C 的内部 $\mathring{C}\neq\varnothing$, 则下面两个结论成立:

(1) 设 $M=x_0+X_0$, 其中 $x_0\in X$, X_0 是 X 的子空间. 若 $M\cap\mathring{C}=\varnothing$, 则存在 X 的超平面 H 使得 $M\subset H$, 且 $H\cap\mathring{C}=\varnothing$. 特别, 对每一个 $x_0\in C\setminus\mathring{C}$, 存在 C 的支撑超平面 H 使得 $x_0\in H$.

(2) 设 $C_1\neq\varnothing$ 是 X 的另外一个凸子集, 且 $C_1\cap\mathring{C}=\varnothing$, 则存在超平面 H 分离 C_1 与 C.

§1.1.4　共轭空间

定理 1.8　X 上的线性有界泛函全体 X^* 能成为 Banach 空间, 其中范数是算子范数:

$$\|f\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|f(x)|,\qquad\forall f\in X^*.$$

X^* 称为 X 的对偶空间或**共轭空间**. 在 Banach 空间中有如下几种收敛性.

定义 1.1.8 设 X 是一个 Banach 空间, $\{x_n\} \subset X, x \in X$. 如果

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x), \qquad \forall f \in X^*,$$

那么称 $\{x_n\}$ **弱收敛**到 x, 记作 $x_n \rightharpoonup x$.

定义 1.1.9 设 $f_n, f \in X^*, n = 1, 2, \cdots$.

(1) 当 $\|f_n - f\| \to 0\ (n \to \infty)$ 时, 称 f_n **一致收敛** (或依范数收敛) 到 f;

(2) 如果对每一个 $x \in X$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ 成立, 那么称 f_n 是 $*$ **弱收敛**到 f.

定理 1.9 (F. Riesz) 设 f 是 Hilbert 空间 X 上的一个连续线性泛函, 则必存在唯一的 $y_f \in X$, 使得

$$f(x) = \langle x, y_f \rangle, \qquad \forall x \in X.$$

定理 1.10 (Banach-Alaoglu) 设 X 是可分的 Banach 空间, 那么 X^* 上的任意有界序列 $\{f_n\}$ 必有 $*$ 弱收敛的子列.

定理 1.11 (Eberlein-Schmulyan) 自反 Banach 空间 X 中的任意有界序列 $\{x_n\}$ 必有一个弱收敛子列.

$L^p(\Omega)$ 的共轭空间是 $L^q(\Omega)$, 其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\ (p > 1)$, 或 $q = \infty\ (p = 1)$.

注 在空间 X^* 中既有弱收敛, 又有 $*$ 弱收敛的概念. 所谓弱收敛 $x_n^* \rightharpoonup x^*$, 是指对于任意 $x^{**} \in X^{**}$ 都有 $\langle x^{**}, x_n^* - x^* \rangle \to 0$; 所谓 $*$ 弱收敛, 是指对于任意 $x \in X$ 都有 $\langle x_n^* - x^*, x \rangle \to 0$. 因为有连续嵌入 $X \hookrightarrow X^{**}$, 所以弱收敛蕴含了 $*$ 弱收敛.

§1.1.5 线性算子的谱

设 X 是复 Banach 空间, $T: D(T) \subset X \to X$ 是线性算子, $R(T) \subset X$ 是 T 的值域.

定义 1.1.10 如果存在 $x \in D(T) \setminus \{\theta\}$, 使

$$Tx = \lambda x,$$

就称 $\lambda \in \mathbb{C}$ 是 T 的**本征值** (或**特征值**), 并称 x 是对应于 λ 的**本征向量** (或**特征向量**).

当 T 是 $D(T) \to R(T)$ 上的一一对应时, 我们记它的逆映射为 T^{-1}, T^{-1} 是 $R(T) \to D(T)$ 的线性映射.

定义 1.1.11 设 $T: D(T) \subset X \to X$ 是线性算子. 如果 T^{-1} 存在, $R(T) = X$, 且 T^{-1} 是有界算子, 就称 T 是**正则算子**.

定义 1.1.12 设 $\lambda \in \mathbb{C}$ 是一个复数. 如果 $\lambda I - T$ 是正则算子, 那么称 λ 为 T 的**正则值**, T 的正则值的全体称为 T 的**预解集**, 记为 $\rho(T)$, 并称 $R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$ 是 T 的**预解算子**.

不是正则值的复数 λ 的集合称为 T 的**谱**, 记为 $\sigma(T)$.

如果 T 是闭线性算子, 从逻辑上分, $\sigma(T)$ 有如下几种情况:

(1) $(\lambda I - T)^{-1}$ 不存在, 这相当于 λ 是本征值, 它的全体记为 $\sigma_p(T)$, 称为 T 的**点谱**;

(2) $(\lambda I - T)^{-1}$ 存在, 值域 $R(\lambda I - T) \neq X$, 但闭包 $\overline{R(\lambda I - T)} = X$, 这部分 λ 的全体记为 $\sigma_c(T)$, 称为 T 的**连续谱**;

(3) $(\lambda I - T)^{-1}$ 存在, 且 $\overline{R(\lambda I - T)} \neq X$, 这部分 λ 的全体记为 $\sigma_r(T)$, 称为 T 的**剩余谱**.

因此, $\sigma(T) = \sigma_p(T) \bigcup \sigma_c(T) \bigcup \sigma_r(T)$.

线性算子的谱集除了分成点谱、连续谱、剩余谱外, 还可以分成离散谱点和本质谱点.