高等职业教育轨道交通类校企合作系列教材
GAODENG ZHIYE JIAOYU GUIDAO JIAOTONG LEI XIAOQI HEZUO XILIE JIAOCAI

土建工程应用数学

TUJIAN GONGCHENG YINGYONG SHUXUE

主　编 ● 张聚贤　刘玉航
副主编 ● 范玉忠

数学

西南交通大学出版社

高等职业教育轨道交通类校企合作系列教材

土建工程应用数学

主　编　张聚贤　刘玉航

副主编　范玉忠

西南交通大学出版社

·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

土建工程应用数学 / 张聚贤，刘玉航主编. —成都：西南交通大学出版社，2016.11
高等职业教育轨道交通类校企合作系列教材
ISBN 978-7-5643-4860-1

Ⅰ. ①土… Ⅱ. ①张… ②刘… Ⅲ. ①土木工程－工程数学－高等职业教育－教材 Ⅳ. ①TU12

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 179055 号

高等职业教育轨道交通类校企合作系列教材
土建工程应用数学
主编 张聚贤 刘玉航

责任编辑	张宝华
特邀编辑	曹　嘉
封面设计	何东琳设计工作室
出版发行	西南交通大学出版社 （四川省成都市二环路北一段 111 号 西南交通大学创新大厦 21 楼）
发行部电话	028-87600564　028-87600533
邮政编码	610031
网　　址	http://www.xnjdcbs.com
印　　刷	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸	185 mm × 260 mm
印　　张	19.25
字　　数	481 千
版　　次	2016 年 11 月第 1 版
印　　次	2016 年 11 月第 1 次
书　　号	ISBN 978-7-5643-4860-1
定　　价	42.00 元

课件咨询电话：028-87600533

前　言

数学是土建相关专业的一门重要基础课. 高职院校土建相关专业学生在学习专业基础课和专业课的时候，不可避免地需要用数学知识以解决工程实际问题. 本书结合高职土建相关专业学生对数学知识的需求情况，按照以能力培养为本位，以“必需”“够用”为度的基本原则来编写，注重了数学知识在土建相关专业方面的应用.

本教材在编写方式上不同于传统数学教材：在内容选择上削枝强干，贯彻少而精原则，不贪多求全，不攀高求深，文字叙述力求通俗，以便于学生接受和记忆；在结构安排上采取以工程为背景来展现数学的应用途径，旨在培养学生运用数学知识和方法解决工程实际问题的能力. 本书主要有以下特色：突出数学工具课的作用，从内容的选择到具体问题的解答，都力求与专业密切结合；以实际应用为背景，为学生构建数学基本概念；强调数学思想和方法，淡化计算技巧和定理证明，注重学生解决实际问题的能力培养.

本教材共十章，主要介绍函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、工程结构截面几何性质、工程测量误差理论基础、土建工程中常用计算方法、线性代数基础、概率论基础等. 建议全书总学时数为 120 学时. 不同专业教学内容可根据需要进行选择和调整.

本教材中每一小节后面都配备了习题，以巩固相应小节的教学内容，供课内外练习使用. 每章最后都配有一组复习题，供全章复习用.

本教材可作为高职高专土建工程类各专业的“高等数学”教材，也可以作为参加专升本考试和高等教育自学考试的自学辅导书，亦可作为相关工程技术人员参加工程师资格考试的参考用书.

本教材由辽宁铁道职业技术学院张聚贤、刘玉航担任主编，参加本书编写工作的有：辽宁铁道职业技术学院梁世国（第一、二、三章），辽宁铁道职业技术学院张聚贤（第四、五、六章），辽宁铁道职业技术学院范玉忠（第七、八章），辽宁铁道职业技术学院刘玉航（第九、十章）.

本教材在编写工作中，辽宁铁道职业技术学院解宝柱教授、姜雄基老师提出了宝贵的意见和建议，同时得到了辽宁铁道职业技术学院教务处、规划处、科研处的大力支持，在此表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，编写时间仓促，书中难免存在不妥之处，敬请读者批评指正.

编　者

2016 年 3 月

目　录

第一章　函数、极限与连续

高等数学与初等数学有很大不同，初等数学主要研究事物相对静止状态的数量关系，而高等数学主要研究事物运动、变化过程中的数量关系. 不同的研究对象有不同的研究方法. 极限方法是高等数学中处理问题的最基本方法，高等数学的基本概念、性质和法则都是通过极限法推导出来的. 因此，极限是高等数学中最基本的概念.

本章主要介绍函数、极限和函数连续性等基本概念及性质，同时介绍土建工程中常见的一些函数，例如分布荷载、剪力与弯矩函数、挠曲线方程等，并通过一些实际问题介绍函数关系的建立. 例如，某化工厂要从 A 处铺设水管到 B 处，并要求 C 点在 B, D 之间，如图 1-1 所示. 已知 BD 段的距离为 100 米，A 到直线 BD 的距离为 20 米. 又 AC 段 1 米长度的水管排管费为 90 元，BC 段 1 米长度的水管排管费为 60 元. 设 CD 为 x 米，求从 A 到 B 的排管费 Y 与 x 之间的函数关系.

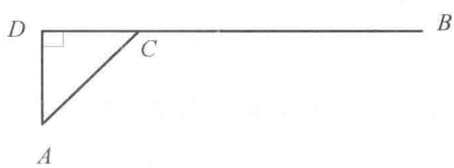

图 1-1

第一节　函　数

一、函数的概念与性质

1. 变量、区间和邻域

（1）变量与常量.

在研究实际问题、观察各种现象的过程中，人们会遇到各种各样的量，对在某个问题的研究过程中，始终保持恒定值不变的量我们称之为常量，而能取不同数值的量我们称之为变量. 例如，某个学校的图书馆的面积为常量，而每天到图书馆看书的人数是变量. 在数学中，常常抛开常量或变量的具体含义，只从数值方面加以讨论.

（2）区间.

为了描述一个变量，常常需要指出其变化范围，这就要用到实数的集合，特别是区间的概念.

设有实数 a 和 b，且 $a<b$，而数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为开区间，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}.$$

数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记作$[a, b]$，即

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}.$$

类似地，$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\},(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$ 称为半开半闭区间.

以上区间都称为有限区间，区间长度为 $b-a$. 此外，还有无限区间. 引进符号 $+\infty$（读作正无穷大）和 $-\infty$（读作负无穷大）. 例如，$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\},(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$.

全体实数的集合 **R** 也可记作 $(-\infty,+\infty)$，它也是无穷区间.

（3）邻域.

设 δ 是任意正数，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x||x-a|<\delta\}.$$

而把 $\{x|0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}.$$

把 $U(a,\delta)=\{x|0\leqslant|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的有心邻域.

2. 函数的概念

（1）定义.

设有两个数集 A 和 B，f 是一个确定的对应关系. 如果对于 A 中的每一个数 x 通过 f，B 中都有唯一确定的数 y 与之对应，记作

$$y=f(x),$$

则称 f 是 A 到 B 的函数，也称 f 是 A 上的函数. A 称为函数的定义域（通常用 D 来表示），x 称为自变量，y 称为因变量，y 的取值范围称为函数的值域.

（2）定义域.

函数的定义域是函数的一个关键要素，给定一个函数，它的定义域也是给定的. 若是实际问题，则使实际问题的自变量有意义的全体实数为其定义域. 若给定函数表达式，则使该表达式有意义的自变量全体为其定义域.

求定义域时，要求熟记以下几点：

① 分母不能为 0；

② 偶次根式被开方数非负；

③ 对数的真数大于 0；

④ 三角函数应满足三角函数各自的定义域要求；

⑤ 反三角函数应满足反三角函数各自的定义域要求；

⑥ 如果函数含有分式、根式、对数式、三角函数和反三角函数，则应取各部分定义域的交集.

例 1-1 求函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域.

解：因为 $y=\sqrt{4-x^2}$，所以

$$4-x^2 \geqslant 0.$$

解得 $-2 \leqslant x \leqslant 2$. 所以，函数 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域 $D=[-2,2]$.

例 1-2　求函数 $y=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$ 的定义域.

解：因为 $y=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$，所以

$$3+2x-x^2 \geqslant 0 \quad 且 \quad x-2>0.$$

解得 $-1 \leqslant x \leqslant 3$ 且 $x>2$，所以 $2<x\leqslant 3$. 所以函数 $y=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$ 的定义域 $D=(2,3]$.

3. 函数的性质

（1）有界性.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，集合 $I \in D$. 若存在实数 M，使得对任意的 $x \in I$，都有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 是 I 上的有界函数. 否则就称函数 $f(x)$ 是 I 上的无界函数.

例如，函数 $y=\cos x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有 $|\cos x| \leqslant 1$，所以函数 $y=\cos x$ 是定义域上的有界函数.

（2）单调性.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \in D$. 若对于 I 上的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，若

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的函数；若

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的函数；

单调增加函数或单调减少函数统称为单调函数.

例如，函数 $y=x^2+3$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内是单调减少的. 在区间 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的. 而函数 $y=x+5, y=x^3+23$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内都是单调增加的.

图像特征：单调递增函数的图形从左往右呈上升趋势；单调递减函数的图形从左往右呈下降趋势.

（3）奇偶性.

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 若对于任意的 $x \in D$，都有

$$f(-x)=f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 为偶函数；若对于任意的 $x \in D$，都有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

例如，函数 $y=x^2+13$ 在定义区间上是偶函数，函数 $y=x, y=x^3-12$ 在定义区间上是奇函数.

（4）周期性.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 若存在一个正数 T，使得对于任意的 $x \in D$，都有 $(x \pm T) \in D$，且

$$f(T+x)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，并把 T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常所说周期函数的周期是指最小正周期，即使上式成立的最小正数.

例如，函数 $y=\sin x, y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，函数 $y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

4. 反函数

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R. 对于任意的 $y \in R$，在 D 上只有唯一的 x 与之对应，且满足 $f(x)=y$. 如果把 y 看作自变量，x 看作因变量，就可以得到一个新的函数：

$$x=f^{-1}(y).$$

我们称这个新的函数 $x=f^{-1}(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数，而把函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

由于函数的本质是对应法则，而与其变量所用的字母无关，因此，习惯上用 x 表示自变量，即反函数可以写为

$$y=f^{-1}(x).$$

把函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像画在同一个坐标平面上，这两个图像关于直线 $y=x$ 对称.

例如，函数 $y=\sin x$ 与 $y=\arcsin x$ 就互为反函数.

二、复合函数、初等函数与分段函数

1. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义，且 $g(x) \in D_1$，则由

$$y=f[g(x)], x \in D$$

确定的函数称为由函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=g(x)$ 构成的复合函数，它的定义域为 D，变量 u 称为中间变量.

例 1-3 设 $y=\mathrm{e}^v, v=\sin t, t=x^2+2$，试写出 $y=f(x)$ 的表达式.

解： $y=\mathrm{e}^{\sin(x^2+2)}$.

例 1-4 设 $y=\cos(5x^2-4)^4$，试给出该函数的复合过程.

解： $y=\cos u, u=v^4, v=5x^2-4$.

注意：

（1）并非任意两个函数都能复合. 例如，$y=\arcsin u$ 与 $u=x^2+5$ 就不能复合成一个函数，因为 $u=x^2+5$ 的值域使 $y=\arcsin u$ 无意义.

（2）复合函数可以有多个中间变量，这些中间变量是经过多次复合产生的.

2. 初等函数

（1）基本初等函数.

① 常数函数 $y=C$.

函数特性：图形为过点$(0, C)$且平行于 x 轴的直线.

② 幂函数 $y=x^{\mu}$（μ 是常数).

函数特性：μ 为任何值时，都是无界函数；图形均经过点$(1, 1)$；$|\mu|$ 为偶数时，函数为偶函数，图形关于 y 轴对称；$|\mu|$ 为奇数时，函数为奇函数，图形关于原点对称；μ 为负数时，图形在原点间断，$x=0$ 为垂直渐近线.

③ 指数函数 $y=a^{x}(a>0, a\neq 1)$.

函数特性：图形均在 x 轴上方且经过点$(0, 1)$；当 $a>1$ 时，指数函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，指数函数单调减少；$y=a^{x}$ 的图形与 $y=a^{-x}$ 的图形关于 y 轴对称.

④ 对数函数 $y=\log_{a} x\ (a>0, a\neq 1)$.

函数特性：对数函数是指数函数的反函数；图形均在 y 轴右侧且经过点$(1, 0)$；当 $a>1$ 时，指数函数单调增加；当 $0<a<1$ 时，指数函数单调减少.

⑤ 三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$.

函数特性：正弦函数和余弦函数均是有界函数；图形均介于 $y=\pm 1$ 两条平行线之间；正弦函数是以 2π 为周期的奇函数，余弦函数是以 2π 为周期的偶函数；正切函数和余切函数都是以 π 为周期的奇函数.

⑥ 反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arc}\cot x$.

函数特性：反正弦函数是正弦函数在区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上的反函数，是单调增加的有界奇函数，值域为$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$；反余弦函数是余弦函数在区间$[0, \pi]$上的反函数，是单调减少的有界函数，值域为$[0, \pi]$；反正切函数是正切函数在区间$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$上的反函数，是单调增加的有界奇函数，值域为$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$；反余切函数是余切函数在区间$(0, \pi)$上的反函数，是单调减少的有界函数，值域为$(0, \pi)$.

上述六类函数统称为基本初等函数.

（2）初等函数.

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合运算而成的，并且能够用一个式子表示的函数称为初等函数，否则就是非初等函数.

例如，$y=\sqrt{3+2x-x^{2}}+\ln(x-2)$, $y=\cos(3x^{2}-4)^{3}$ 是初等函数，而 $y=\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin nx+\cdots$ 则不是初等函数，因为它并不是有限次四则运算.

3. 分段函数

当一个函数的自变量在定义域内不同区间上用不同的表达式表达时，称该函数为分段函数.

例如，绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x>0\\ 0, & x=0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R=[0,+\infty)$，图像关于 y 轴对称.

注意：求分段函数的函数值时，应先确定自变量取值的所在范围，再按相应的式子进行计算.

一般来说，分段函数不是初等函数（不能由一个式子表示出来）.

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域：

（1）$y=2^{\frac{1}{x}}+\arcsin\ln\sqrt{1-x}$；

（2）$y=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x\leqslant 4\\ \ln(x-4), & 4<x\leqslant 5\end{cases}$.

2. $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是______函数（奇、偶或非奇非偶）.

3. 求 $f(x)=2+|\sin 2x|$ 的最小正周期.

4. 指出下列复合函数的复合过程：

（1）$y=\sin 2x^2$；（2）$y=\cos^2(2x+1)$；

（3）$y=\ln(1+x^2)$；（4）$y=\arctan[\tan^2(a+x^2)]$.

5. 求下列函数的反函数：

（1）$y=\dfrac{1-x}{1+x}$；（2）$y=\dfrac{e^x}{e^x-1}$.

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{9-x^2}, & |x|\leqslant 3\\ x^2-9, & |x|>3\end{cases}$，求 $f(0), f(\pm3), f(\pm4), f(2+a)$.

第二节 函数的极限

函数给出了变量之间的对应关系，但研究变量，仅仅靠对应关系是不够的，还需要对变量变化的趋势进行研究. 若一个变量在变化过程中表现出与某一常数无限接近的趋势，则说此变量在该变化过程中有极限，并称该常数值为变量的极限. 极限是微积分中最基本、最重要的概念之一. 同时极限也是微积分的基本思想和方法.

一、函数极限的定义

数列可看作定义在正整数集上的函数，它的极限可以看作当 $x \to +\infty$ 时函数极限的特殊情况. 数列的极限在高中已经学习过，下面主要介绍函数的极限.

1. 自变量趋于无穷大时函数的极限

定义 1-1　当自变量 x 取正值并无限增大时，如果函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数当 $x \to +\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \ (x \to +\infty).$$

由定义 1-1 可知，当 $x \to +\infty$ 时，$f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ 的极限为 1，即 $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1$.

定义 1-2　当自变量 x 取负值且绝对值无限增大时，如果函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数当 $x \to -\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \ (x \to -\infty).$$

由定义 1-2 可知，当 $x \to -\infty$ 时，$f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ 的极限为 1，即 $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1$.

定义 1-3　当 $|x|$ 无限增大时，如果函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数当 $x \to \infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \ (x \to \infty).$$

由定义 1-3 可知，当 $x \to \infty$ 时，$f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ 的极限为 1，即 $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 1$.

由上述定义及例题可以得到如下结论：

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \longleftrightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = A.$$

2. 自变量趋于某个确定值时函数的极限

定义 1-4　当自变量 x 无限趋近于 x_0 时，如果函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数当 $x \to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \ (x \to x_0).$$

注意：

（1）$f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的极限是否存在，与 $f(x)$ 在 x_0 处有无定义以及在点 x_0 处的函数值无关. 也就是说，$f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的极限仅反映 $f(x)$ 在 x_0 周围的变化趋势，与 $f(x)$ 在 x_0 的值无关.

（2）在定义 1-4 中，$x \to x_0$ 是指 x 以任意方式趋近于 x_0，即 x 既可以从大于 x_0 的一侧趋近于 x_0，也可以从小于 x_0 的一侧趋近于 x_0，还可以从两侧同时趋近于 x_0.

定义 1-5　当 x 从 x_0 的左侧 $(x < x_0)$ 趋近于 x_0（记作 $x \to x_0^-$）时，如果函数 $f(x)$ 无限趋

近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数当 $x \to x_0^-$ 时的左极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0 - 0) = A .$$

定义 1-6 当 x 从 x_0 的右侧 $(x > x_0)$ 趋近于 x_0（记作 $x \to x_0^+$）时，如果函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数当 $x \to x_0^+$ 时的右极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0 + 0) = A .$$

根据极限、左右极限的定义，不难得到如下结论：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \longleftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A .$$

定理 1-1 当 $x \to x_0$ 时，函数极限存在的充分必要条件是函数在 x_0 的左极限与右极限都存在且相等.

当 $x \to \infty$ 时，函数极限存在的充分必要条件是函数当 $x \to -\infty$ 时的极限与 $x \to +\infty$ 时的极限都存在且相等.

例 1-5 设函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$，求 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x), \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

解：

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x-1) = -1 ,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x+1) = 1 ,$$

由于左极限与右极限不相等，所以 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在.

例 1-6 设函数 $f(x) = |x| = \begin{cases} x+1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$，求 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x), \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

解：

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0 ,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x) = 0 ,$$

所以 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

例 1-7 判断 $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 是否存在.

解： 当 $x \to 0^-$ 时，$\dfrac{1}{x} \to -\infty$，所以 $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \to 0$，左极限存在.

当 $x \to 0^+$ 时，$\dfrac{1}{x} \to +\infty$，所以 $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \to +\infty$，右极限不存在.

因此，当 $x \to 0$ 时，左极限存在而右极限不存在，$\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 不存在.

二、极限的性质与运算法则

1. 极限的性质

性质 1（唯一性） 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=B$，则 $A=B$.

性质 2（有界性） 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则在 x_0 的某个去心邻域内 $f(x)$ 有界.

性质 3（局部保号性） 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 且 $A>0$（或 $A<0$），则在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$.

以上性质证明从略.

2. 极限的运算法则

若 $\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$，这里省略了自变量的变化趋势，以下极限均表示在自变量的同一变化趋势下的极限.

（1）$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$.

（2）$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$.

（3）$\lim\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\,(B\neq 0)$.

推论 1 $\lim[C\cdot f(x)]=C\cdot\lim f(x)=CA$.

推论 2 $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n=A^n$.

例 1-8 求 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2-3x+2}{2x^2-6x+4}$（有理分式函数）.

解： 这里分母极限不为零，故原式 $=\dfrac{\lim\limits_{x\to -1} 4x^2-3x+2}{\lim\limits_{x\to -1} 2x^2-6x+4}=\dfrac{3}{4}$.

从上面的例子可以看出，求有理整数函数（多项式）或有理分式函数当 $x\to x_0$ 时的极限时，只要把 x_0 代替函数中的 x 就行了；但是对于有理分式函数，这样代入后如果分母等于零，则没有意义.

例 1-9 求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$.

分析：当 $x\to 3$ 时，分子分母极限都是零，所以不能直接用商的极限运算法则. 可以通过约分，消去使得分子分母为零的因式.

解： $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{6}$.

例 1-10 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

分析：本题分母以零为极限，不能直接运用极限法则，但是如果把分子、分母同时乘以分子的共轭有理式，而后就可以运用极限四则运算法则.

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$