应用型本科数学基础课程教材

高等数学（下册）

阮其华　主审
吴炳烨　主编
吴丽萍　赖军将　范振成　副主编

高等教育出版社

数学基础课程教材

高等数学（下册）

阮其华　主审
吴炳烨　主编
吴丽萍　赖军将　范振成　副主编

高等教育出版社·北京

内容简介

本书以教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”及“经济和管理类本科数学基础课程教学基本要求”为指导，结合应用型本科院校相关专业数学教学的特点，以严密、通俗的语言，较系统地介绍了高等数学的知识。全书分为上、下两册。下册共分六章，包括空间解析几何概要、多元函数微分法及其应用、多元函数积分学、无穷级数、常微分方程及差分方程简介等。全书纸质内容与数字课程一体化设计，紧密配合。数字课程涵盖电子教案、自测题、综合练习、数学史、数学家小传等板块，为应用型本科院校学生的学习提供思维与探索的空间。

本书可作为应用型本科院校理工类、经济管理类专业的高等数学教材，也可作为相关专业学生考研的参考材料，还可供相关专业人员和广大教师参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册 / 吴炳烨主编．-- 北京：高等教育出版社，2017.2

ISBN 978-7-04-046741-3

Ⅰ．①高… Ⅱ．①吴… Ⅲ．①高等数学 - 高等学校 - 教材 Ⅳ．① O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 275721 号

策划编辑 李晓鹏　责任编辑 李晓鹏　封面设计 王 琰　版式设计 王 琰
插图绘制 尹文军　责任校对 刘娟娟　责任印制 尤 静

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 北京佳信达欣艺术印刷有限公司
开 本 787mm × 1092mm 1/16
印 张 20.25
字 数 380 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
http://www.hepmall.com
http://www.hepmall.cn
版 次 2017年2月第1版
印 次 2017年2月第1次印刷
定 价 35.00 元

物 料 号 46741-00

与本书配套的数字课程资源使用说明

与本书配套的数字课程资源在书中用　　标出，资源发布在高等教育出版社易课程网站，请登录网站后开始课程学习。

1. 访问 http://abook.hep.com.cn/46741，点击“注册”。在注册页面输入用户名、密码及常用的邮箱进行注册。已注册的用户直接输入用户名和密码登录即可进入“我的课程”界面。
2. 点击“我的课程”页面右上方“绑定课程”，按网站提示输入教材封底防伪标签上的数字，点击“确定”完成课程绑定。
3. 在“正在学习”列表中选择已绑定的课程，点击“进入课程”即可浏览或下载与本书配套的课程资源。刚绑定的课程请在“申请学习”列表中选择相应课程并点击“进入课程”。

账号自登录之日起一年内有效，过期作废。

目 录

第 6 章　空间解析几何概要

解析几何的基本思想是利用坐标系将几何结构代数化, 运用代数的方法研究几何, 从而把几何问题的讨论, 从定性的研究推广到可以计算的定量的层面. 解析几何是变量数学的开端, 是进一步学习多元函数微积分的必要基础. 这一章将介绍空间解析几何的基础知识, 内容主要包括向量代数、空间直角坐标系及轨迹与方程等, 为下面学习多元函数微积分打好基础.

6.1　向量及其线性运算

PPT 课件 6-1
向量及其线性运算

6.1.1　向量的概念

日常生活与自然科学中存在着两种量: 向量与数量. 向量并不陌生, 在初中物理我们就接触过它, 位移、力、速度等就是向量, 它们既有大小, 又有方向; 而长度、面积、体积等量, 它们只有大小, 是数量, 又称标量.

定义 6.1.1　既有大小又有方向的量叫向量, 或称矢量.

在几何上可用有向线段表示向量: 有向线段的长度表示向量的大小, 有向线段的方向表示向量的方向, 而有向线段的起点与终点分别叫做向量的起点与终点. 起点是 A, 终点是 B 的向量记做 $\overrightarrow{AB}$, 也可用单个黑体字母, 如 $\boldsymbol{a}$, 或单个加箭头字母, 如 $\vec{b}$ 等表示向量, 如图 6-1 所示.

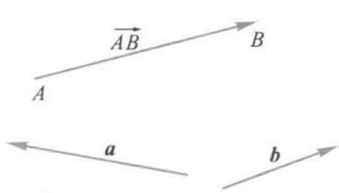

图 6-1

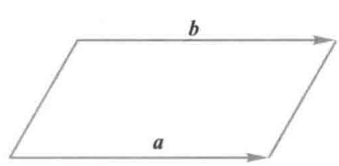

图 6-2

向量的大小称为向量的模或长度, 向量 $\boldsymbol{a}$ 的模记为 $|\boldsymbol{a}|$. 模等于 1 的向量称为单位向量, 而模等于零的向量称为零向量, 记作 $\mathbf{0}$ 或 $\overrightarrow{0}$. 零向量的方向是不确定的, 或者说零向量的方向是任意的. 如果两个向量所在的直线相互平行 (垂直), 则称这两个向量相互平行 (相互垂直). 向量 $\boldsymbol{a}$ 平行 (垂直) 于向量 $\boldsymbol{b}$ 记作 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b})$. 零向量与任一向量是平行或垂直的.

定义 6.1.2 如果两个向量的模相等且方向相同, 则称两向量相等. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

由定义易知, 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不在同一条直线上, 则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是: 分别连接 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点与终点的两条线段连同向量本身构成一个平行四边形 (见图 6-2). 这就是说, 两向量是否相等只与向量的模与方向有关, 而与向量的起点无关.

单个向量总认为是共线向量, 两个向量总是共面向量. 零向量与任何共线 (共面) 向量组构成共线 (共面) 向量组.

注 当将向量组中所有向量的起点移到同一点时, 共线 (共面) 向量组的所有向量落在同一条直线 (同一个平面) 上.

思考题 把平行于某一平面的一切单位向量的起点移到同一点后, 它们的终点构成什么图形? 把空间所有单位向量的起点移到同一点后, 它们的终点又构成什么图形?

定义 6.1.3 两个模相等且方向相反的向量互为反向量, $\boldsymbol{a}$ 的反向量记作 $-\boldsymbol{a}$.

显然, 向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BA}$ 互为反向量, 即 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$; 而零向量的反向量仍然是零向量, 即 $\mathbf{0}=-\mathbf{0}$.

定义 6.1.4 平行于同一直线的一组向量叫做共线向量, 平行于同一平面的一组向量叫做共面向量.

6.1.2 向量的加法

在物理课里大家知道, 作用于同一点 O 的两个不共线的力 $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ 所产生的合力 $\boldsymbol{f}$ 等于以 $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ 为邻边的平行四边形的对角线所对应的力 (见图 6-3 (a)); 另一方面, 一质点做直线运动, 先从 O 到 A, 产生位移 $\overrightarrow{OA}$, 再从 A 到 B, 产生位移 $\overrightarrow{AB}$, 与总位移 $\overrightarrow{OB}$ 一起构成三角形 OAB (见图 6-3 (b)). 这就是数学上向量加法运算的物理背景.

定义 6.1.5 给定向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 以空间一点 O 为始点作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$, 则折线 OAB 中 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和, 记作

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$$

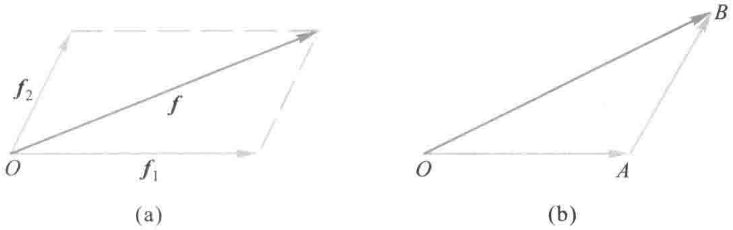

图 6-3

或者

$$c = a + b.$$

求两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的运算叫做加法运算.

上述定义中的求和向量的方法就是所谓的三角形法则 (见图 6-3(b)), 易知它等价于求和向量的平行四边形法则 (见图 6-3(a)).

此外, 容易证明向量的加法满足以下的运算规律 (见图 6-4):

(1) 交换律: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

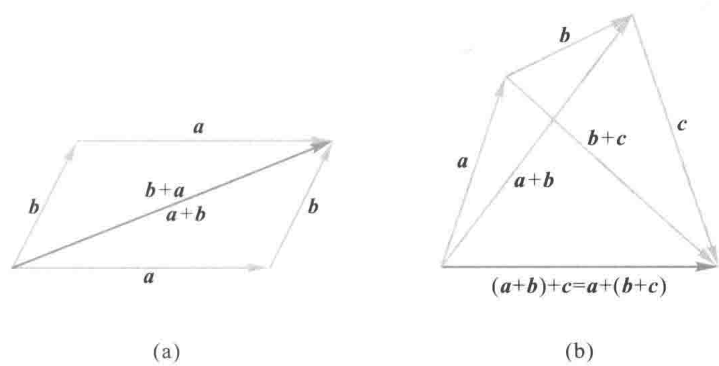

图 6-4

与实数运算类似, 加法的逆运算是减法.

定义 6.1.6 当 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$ 时, 称 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差, 记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 求两向量差的运算被称为减法运算.

由向量加法的三角形法则易得向量减法的三角形法则: 将 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的起点移到同一点, 则以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为起点, $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量就是 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ (见图 6-5). 由图 6-5 还可得

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

由三角形两边之和大于第三边易知,

$$|\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|,$$

其中等号只在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或反向, 即共线时成立.

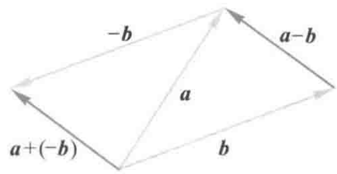

图 6-5

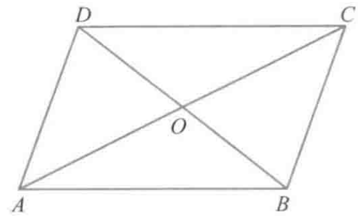

图 6-6

例 1　用向量方法证明: 对角线互相平分的四边形是平行四边形.

证　设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 交于 O 点且互相平分 (见图 6-6), 从图可以看出:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO} \\ &= \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DC},\end{aligned}$$

因此, $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{DC}$ 且 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$, 即四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

6.1.3　向量的数乘

物理学中经常会碰到向量与数量发生某些运算关系的情况, 比如我们熟知的一些公式 $\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}t$ 等. 从几何上看, n 个相同的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 相加的和向量的模为 $|\boldsymbol{a}|$ 的 n 倍, 方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同. 由此引出下面的概念.

定义 6.1.7　实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量, 记作 $\lambda\boldsymbol{a}$, 它的模是 $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$; $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向, 当 $\lambda > 0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同, 当 $\lambda < 0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反. 这种运算叫做数量与向量的乘法, 简称为数乘.

由定义知 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行. 特别地, $0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}, (-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$. 此外, 当 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ 时, 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量是 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$. 不难验证, 向量的数乘满足以下运算规律:

(1) 结合律: $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律:

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

向量的加法与数乘统称向量的线性运算. 由向量的加法与数乘的运算性质易知, 向量也可以像实数及多项式那样去运算, 例如

$$\nu_1(\lambda_1\boldsymbol{a}-\mu_1\boldsymbol{b})+\nu_2(\lambda_2\boldsymbol{a}-\mu_2\boldsymbol{b})=(\lambda_1\nu_1+\lambda_2\nu_2)\boldsymbol{a}-(\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2)\boldsymbol{b}.$$

定理 6.1.1 若 $\boldsymbol{e}\neq\boldsymbol{0}$, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 共线的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}$, 且系数 x 被 $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{r}$ 唯一确定.

证 充分性显然, 下证必要性. 设 $\boldsymbol{r}/\!/\boldsymbol{e}$. 当 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 同方向时取 $x=\dfrac{|\boldsymbol{r}|}{|\boldsymbol{e}|}$, 反方向时取 $x=-\dfrac{|\boldsymbol{r}|}{|\boldsymbol{e}|}$, 则由向量数乘的定义知 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}$. 至于系数 x 的唯一性, 假设 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}=x'\boldsymbol{e}$, 那么有 $(x-x')\boldsymbol{e}=\boldsymbol{0}$, 因此 $|x-x'|\cdot|\boldsymbol{e}|=0$. 由于 $\boldsymbol{e}\neq\boldsymbol{0}$, 从而 $|\boldsymbol{e}|\neq 0$, 故 $x=x'$, 唯一性得证.

下面两个定理可类似证明.

定理 6.1.2 若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 不共线, 那么向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 共面的充要条件是 $\boldsymbol{r}$ 可由 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$, 且系数 x,y 被 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{r}$ 唯一确定.

定理 6.1.3 如果向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 不共面, 则空间任意向量 $\boldsymbol{r}$ 可由向量 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ 线性表示, 即 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$, 且其中系数 x,y,z 被 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{r}$ 唯一确定.

例 2 已知

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3,$$

求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$.

解 根据向量线性运算的性质知

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1+3)\boldsymbol{e}_1+(2-2)\boldsymbol{e}_2+(-1+2)\boldsymbol{e}_3=4\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3,$$

$$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1+6\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_3-(6\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2+4\boldsymbol{e}_3)=-3\boldsymbol{e}_1+10\boldsymbol{e}_2-7\boldsymbol{e}_3.$$

例 3 设 AM 是 $\triangle ABC$ 的中线, 求证

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

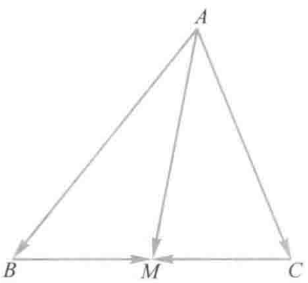

图 6-7

证 如图 6-7 所示, 有

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM},$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM},$$

所以

$$2\overrightarrow{AM}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}).$$

但

$$\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MB}=\mathbf{0},$$

因而

$$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC},$$

即

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

习题 6-1

A 题

1. 设 D,E 是 $\triangle ABC$ 边 BC 上的三等分点, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$. 试以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}$.

2. 用向量法证明: 连接三角形两边中点的线段平行于第三边且等于第三边的一半.

3. 从向量方程组

$$\begin{cases}3\boldsymbol{x}-4\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a},\\ 2\boldsymbol{x}+3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}\end{cases}$$

中解出向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$.

4. 在四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c},\overrightarrow{CD}=3\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$, 对角线 AC,BD 的中点分别为 E,F, 求 $\overrightarrow{EF}$.

5. 已知 $\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b},\overrightarrow{BC}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\overrightarrow{CD}=5\boldsymbol{a}-7\boldsymbol{b}$, 证明 A,B,D 三点共线.

6. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 设对角线 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$, 求 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DA}$.