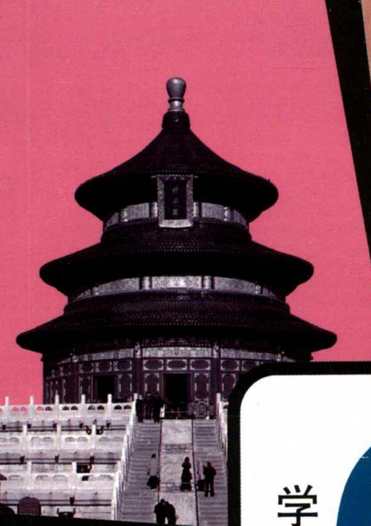
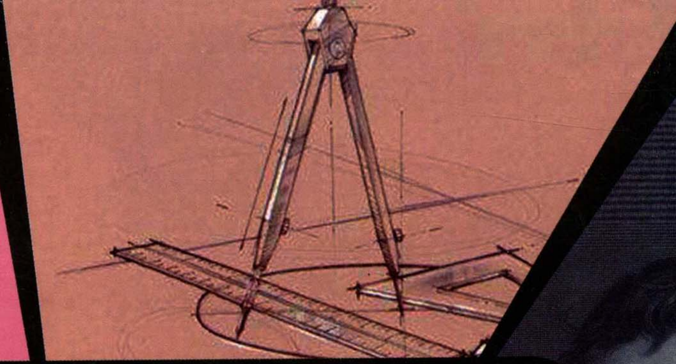
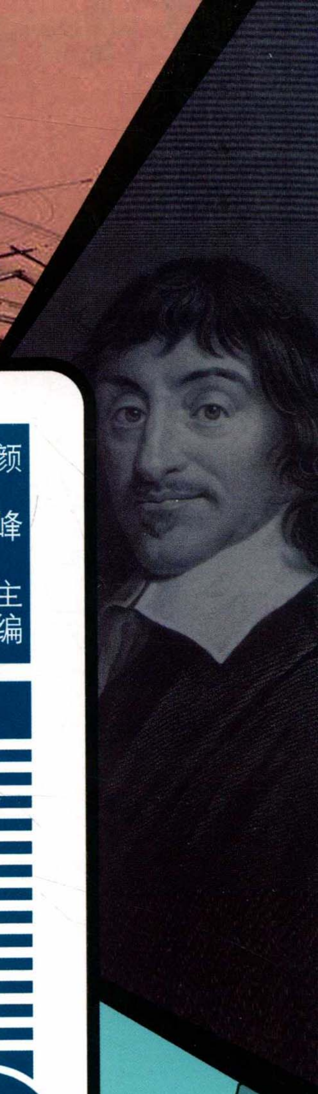
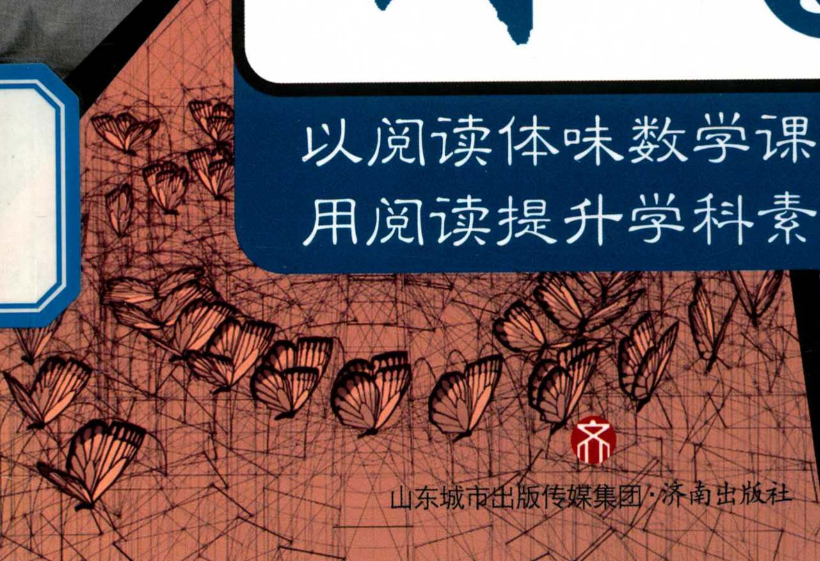





学科阅读推广工程

数学来了 3

颜峰 主编

以阅读体味数学课堂
用阅读提升学科素养

山东城市出版传媒集团·济南出版社

学科阅读推广工程

数学来了 3

颜峰 主编

副 主 编：杨 军 安志军 陈 杰
分册主编：杨 军
编 者：张绪儒 赵 鹏 宋国明
张 钊 王海燕 李建国

山东城市出版传媒集团·济南出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学来了．3／颜峰主编．—济南：济南出版社，
2018．1

ISBN 978－7－5488－2954－6

Ⅰ．①数…　Ⅱ．①颜…　Ⅲ．①中学数学课—初中—
教学参考资料　Ⅳ．①G634．603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 004633 号

出 版 人　崔　刚
项目策划　周家亮
责任编辑　张雪丽　李　晨
封面设计　胡大伟
出版发行　济南出版社
地　　址　山东省济南市二环南路 1 号(250002)
发行热线　0531－86922073(省内)　0531－67817923(省外)
印　　刷　肥城新华印刷有限公司
版　　次　2018 年 1 月第 1 版
印　　次　2018 年 3 月第 1 次印刷
成品尺寸　170 mm×240 mm　16 开
印　　张　7
字　　数　100 千字
定　　价　28．00 元

打开数学世界的一扇窗

数学是科学的语言，是一切科学和技术的基础，它渗透于人类生活的各个领域，是人类思考和解决问题的工具，影响着人类对世界及自身的看法。

数学有自己的灵魂，绝不只是简单的数学概念、数学定义、数学公式和数学计算。它赋予它所发现的真理以生命，它唤起心神、澄清智慧。它让我们形成“数学方式”的理性思维，从数学的角度看问题，培养起理性思维的习惯和严密求证的精神，提高逻辑推理的能力和准确表达的意识，以及多角度思考与解决问题的素养。我们从数学中汲取的逻辑思维与理性精神，会深深铭刻在我们的头脑中，使我们在思考问题时全面而深刻，在做事时清晰而逻辑。

通过阅读构建起数学思维与数学素养，是我们编写《数学来了》这一套学科读物的目标。以阅读体味数学课堂，用阅读提升学科素养，这与当前盛行的学科阅读概念不谋而合。因此，我们立足课程，以教材为起点，结合教学进度适当扩充阅读文本，旨在拉近课堂与课外的距离，拉近阅读与学习的距离，使学生开阔知识视野、完善认知结构、提升思维能力，形成对课程的深度学习。书中的每一篇阅读文本，都是数学教学内容的精华和延伸，以打开一扇窗，提供一个全新视角，引领你去揣摩千姿百态的因式分解，赞叹数学对称之美，感触古今中外数学的算法神韵，领会数学知识与社会生活的联系……从而进入丰富多彩的数学殿堂。

我们相信，通过阅读，你们会发现，数学并不是枯燥定义的累积，也不是

烦琐公式的堆砌。我们更加相信，你们会对数学产生前所未有的兴趣和热情，从而改变学习数学的态度，提高学习数学的效率。正如诺瓦列斯所说："纯数学是魔术家真正的魔杖。"希望你们人人都能用这根称手的数学魔杖，在知识的海洋里尽情挥洒！

目 录

一　三角形内角和

欧几里得创建了数学史上第一个逻辑系统——欧氏几何。从公元前3世纪到公元1800年的两千多年中，大部分人都坚信欧氏公理体系下的欧氏几何是现实空间唯一、绝对正确的反映。到了19世纪，一批具有批判性思想的数学家的创造性工作，导致了非欧几何的产生。德国数学家高斯被誉为非欧几何的先驱。

三角形的内角和一定是180°，这是欧氏几何的一条重要的几何定理。1824年，“数学王子”高斯在给朋友的信中说：“三角形内角和小于180°，这一假设引出一种特殊的、和我们的几何完全不相同的几何。这种几何自身是完全相容的，当我发展它的时候，结果完全令人满意。”他深信，新几何在逻辑上是相容的，而且能够获得实际应用，因而这种几何是与欧几里得几何一样的客观存在。

那么三角形的内角和究竟是不是180°呢？

数学探秘

三角形内角和的证明

自从人类诞生以来，人们的生活就和数学息息相关。三角形是构成几何图形的最基本的元素之一，很多复杂图形中都有三角形这一基本元素，三角形也成为人类研究几何图形性质的基本元素。早在古埃及时期，人们就已经初步掌握了平面几何和立体几何的知识，可以将几何知识应用于土地丈量和建筑设计方面。通过金字塔我们不难看出，那时的人们对三角形相关知识的了解和研究已经颇具规模。

图1-1　金字塔

谈及三角形的相关知识，我们首先就要谈一谈它的三个内角的和。

三角形的内角和等于180°似乎是每个人都知道的事情，而证明三角形

的内角和等于180°也是很多数学家曾经经历过的。那么，你会证明三角形的内角和等于180°吗？你又会有几种方法呢？

接下来，我们从这样几个角度入手，谈一谈三角形内角和的证明。

从证明的方式上来讲，证明三角形的内角和等于180°可以按这样几个方法：测量、剪拼、折叠、推理等。

[方法一] 所谓测量，就是画出一个三角形，借助测量角度的工具，对三角形的每个角进行测量。然后将测量得到的三个角的度数相加，从而得到三角形内角和的度数。但是这种方法常常会出现测量误差，因此，通过测量，人们可以得到三角形内角和的大概度数是180°。

[方法二] 所谓剪拼，就是将三角形的三个角用剪刀剪下，然后将其顶点重合，角的边相接地拼接在一起（如图1-2）。通过三个角拼接后形成一个平角（180°的角），印证三角形的内角和是180°。

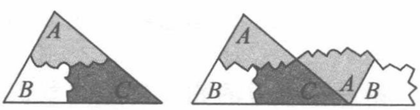


图1-2 剪拼法

[方法三] 所谓折叠，就是将三角形的三个角按如图1-3所示方法折叠。三个角的顶点重合，边与边相接但是不重叠，从而发现三个角构成了一个平角。

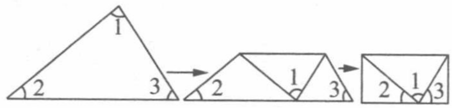


图1-3 折叠法

[方法四] 所谓推理，就是借助平行线等相关定理，通过作辅助线和几何推理的过程证明三角形的内角和是180°。

就推理而言，又可以从这样几个角度入手：

[角度一] 利用“平角为180°”，将“三角形三个角的和”的问题转化为“将三个角组成一个平角”的问题。这种思路可以有以下几种辅助线的作法，如图1-4所示。

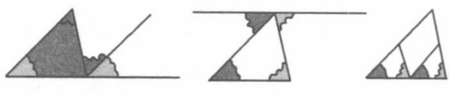


图1-4

这几种方法都是借助作平行线，将三角形的三个角“转移”到了一起。在“转移”角的过程中，利用的是“两线平行，同位角相等”与“两直线平行，内错角相等”的性质，将三角形的内角用与之相等的角代替。这是一种极其重要的数学思想——转

化思想。

［角度二］利用“两直线平行，同旁内角互补”的性质，将三个角转化为一组平行线的同旁内角，如图 1-5 所示。

图 1-5

这种方法与前面两种方法的相通之处就是“转化思想”。在转化思想下，可以借助“两直线平行，同旁内角互补（互补：和为 180°）”这一性质来证明三角形的内角和是 180°。

与前一种方法不同的是，这种方法不是将三个角“转移”到顶点重合的一个位置，而是将三个角转化成有特殊意义的位置，如同旁内角的位置，这样就可以通过“两直线平行，同旁内角互补”这一性质说明三角形的内角和的确是 180°。

［角度三］利用“周角为 360°”“对顶角相等”，将三个内角转化为一个周角，如图 1-6 所示。

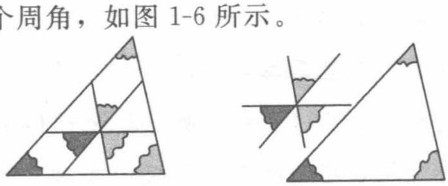


图 1-6

这种方法同样是利用转化思想将三角形的三个角“转移”至一个特殊的位置。

不同的是，这三个角转化的过程借助的是“同角的补角相等”和“对顶角相等”的性质，从而构成了六个顶点重合在一起的周角。最终利用“周角为 360°”验证了三角形的内角和是 180°。

三个从不同角度的证明方法的核心就是转化思想的应用。利用相等角代替三角形的内角，再利用特殊位置的特殊性质证明三角形的内角和是 180°。

亲爱的读者们，可能你还有其他证明方法，大家可以自己去探索，在这里我们就不再一一赘述了。

欧氏几何与非欧几何

我们刚刚谈到的三角形的内角和是 180°，源于公元前 3 世纪古希腊数学家欧几里得所写的《几何原本》。《几何原本》是几何学史上有深远影响的一本书，以至于现在有很多人认为几何学就是“欧氏几何”。

欧几里得把当时人们公认的、正确的一些几何常识作为定义和公理，并且在此基础上研究图形的性质，进一步推导出了一系列定理，组成了一

图 1-7　欧几里得

个完整的体系，这个体系我们称之为“公理体系”。在这个体系中，作为其基石的五个公理以及五个公设中的前四个都是容易被认同的，但是人们从证明第五公设（同一平面内一条直线和另外两条直线相交，若在某一侧的两个内角的和小于两直角，则这两直线经无限延长后在这一侧相交）的一次次失败中领悟到，第五公设是不可证明的，由此导致了非欧几何的产生。

俄国数学家罗巴切夫斯基是非欧几何的早期发现人之一。他从 1815 年着手研究平行线理论，试图给出第五公设的证明。可是，很快他便意识到自己的证明都是错误的。他调转思路，着手寻求第五公设不可证的解答，在这个过程中得到了一系列在逻辑上无矛盾的新的定理，并形成了新的理论体系。这个由新公理系统构成的是一种新的几何，它的逻辑完整性和严密性可以和欧氏几何相媲美，人们称之为罗巴切夫斯基几何学，简称罗氏几何。

图 1-8　罗巴切夫斯基

罗氏几何没有改变欧氏几何的前四个公设，但是对第五个公设做了新的假设：过平面上直线外一点，至少可以引两条直线与已知直线不相交。也就是说罗氏几何是在欧氏几何前四条公设不变的前提下，改变第五条公设从而形成的新的几何。

从罗巴切夫斯基创立的非欧几何中，我们可以得出一个极为重要的、具有普遍意义的结论：逻辑上互相不矛盾的一组假设都有可能提供一种几何学。黎曼几何是德国数学家黎曼创立的。1854 年，黎曼在哥廷根大学发表了题为《论作为几何学基础的假设》的著名报告，提出了与前两种几何完全不同的新几何，开创了几何学的一片新的广阔领域。在这篇报告中，黎曼将曲面本身看成一个独立的几何实体，而不是把它仅仅看作欧几

里得空间中的一个几何实体。黎曼几何学的模型是一个经过适当改进的球面，在黎曼几何中，在同一平面内任何两条直线都有交点，也就是说黎曼几何不承认平行线的存在。

图 1-9 黎 曼

欧氏几何、罗氏几何、黎曼几何是三种各有区别的几何学，这三种几何学各自所有的命题都构成了一个严密的公理体系，各公理之间满足和谐性、完备性和独立性，因此这三种几何学都是正确的。从实际情况看，在我们的日常生活中欧氏几何是适用的；在宇宙空间中或原子核世界，罗氏几何更符合客观实际；在地球表面研究航海、航空等实际问题时，采用黎曼几何更准确一些。

在欧氏几何中，三角形的内角和等于180°，那么在非欧几何中，三角形的内角和也是180°吗？

在三种几何中，三角形的内角和都是不同的，而且三角形的内角和与三角形的面积的关系也是不同的。

在欧氏几何中，随着三角形面积的增大，三角形的内角和不变（如图1-10）。

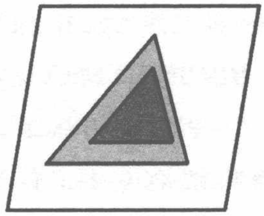


图 1-10

在罗氏几何中，随着三角形面积的增大，三角形的内角和就会越来越小（如图 1-11）。

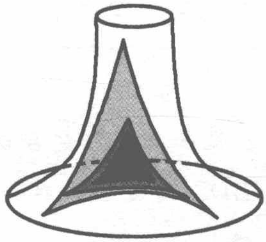


图 1-11

在黎曼几何中，随着三角形面积的增大，三角形的内角和就会越来越大（如图 1-12）。

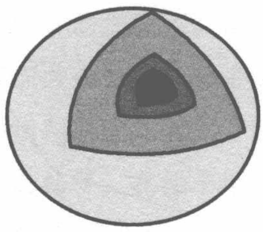


图 1-12

数学应用

工件是否合格

已知一种工件（如图 1-13 所示），它要求$\angle BDC$等于 140°。小明通过测量得$\angle A=90°$，$\angle B=18°$，$\angle C=40°$后，得出结论说此工件不合格，这是为什么呢？

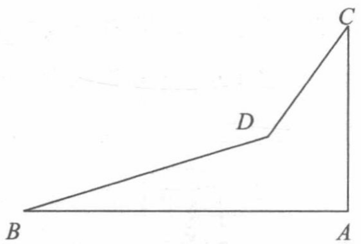


图 1-13

分析： 欲知此工件是否合格，只需求出$\angle BDC$的度数，再与合格的度数 140°进行对比即可。下面给出三种计算方法。

解法一： 如图 1-14，连接 AD 并延长，则$\angle 1=\angle 3+\angle C$，$\angle 2=\angle 4+\angle B$，

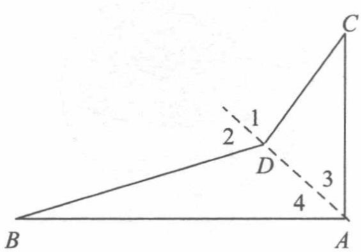


图 1-14

所以$\angle BDC=\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle C+\angle 4+\angle B=(\angle 3+\angle 4)+\angle B+\angle C=90°+18°+40°=148°\neq 140°$。

故此工件不合格。

解法二： 如图 1-15，连接 BC，则$\angle BDC=180°-(\angle 1+\angle 2)$。

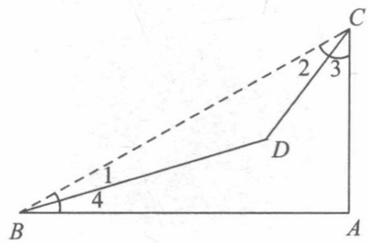


图 1-15

而$\angle 1+\angle 2=180°-(\angle 3+\angle 4+\angle A)=180°-(40+18°+90°)=32°$，

所以$\angle BDC=148°\neq 140°$。

故此工件不合格。

解法三： 如图 1-16，延长 CD 交 AB 于点 E，则$\angle BDC=\angle 1+\angle B$。

而$\angle 1=\angle A+\angle C$，

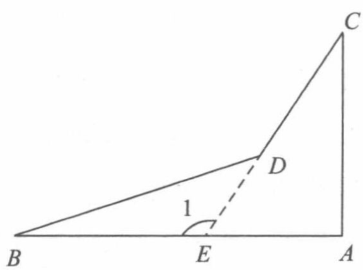


图 1-16

故$\angle BDC=\angle A+\angle B+\angle C=148°\neq 140°$。

故此工件不合格。

数学文化

悲情数学家波尔约

波尔约是非欧几何的创始者之一，与他同享这个荣誉的还有“数学王子”高斯和俄国数学家罗巴切夫斯基。波尔约一生中最大的数学成果就是创建了非欧几何，然而这项成果给他带来的却是一生的凄苦和悲凉。

图 1-17　波尔约

1802 年，波尔约生于匈牙利。他的父亲是一位颇有名望的数学教授，与数学家高斯是同窗好友。波尔约从小聪明伶俐，在父亲的悉心指导下，13 岁的波尔约已经了解了微积分和分析力学方面的知识。

1820 年左右，还在大学学习军事工程的波尔约开始对欧几里得《几何原本》的第五公设进行研究。第五公设也叫平行公设，它不像其他公设那样简单明了，因此，自《几何原本》诞生之日起，人们就开始了对第五公设的争议和研究。研究大体分为两类，一类是试图用更为简单明了的命题去替代它；另一类是用《几何原本》中其他的公理和公设证明它。人们怀疑这条公设不是独立的，它更像是一个定理而不是公设。

在非欧几何建立之前的两千多年中，称得上数学家的人，几乎都曾尝试过改善或证明第五公设。波尔约的父亲也在这个行列中，他对第五公设探讨了大半辈子但无功而止。当他得知自己的儿子在从事这项研究时，曾极力制止。他写信责令儿子必须停止这项研究，信中说：“它将剥夺你所有闲暇、健康、休息及你一生所有的快乐。这个无底的黑暗或许可以吞吃掉一千个灯塔式的牛顿，这个夜任何时候也不会在大地上光明。”

波尔约并未被如此骇人听闻的言辞所吓倒，在直接用其他公设来证明第五公设失败的情况下，他调整了思路，从反面考虑命题，看否定第五公设能否引出与欧氏几何的其他公设或公理相悖的结果。在他不遗余力的严密推理下，不但没有发现任何矛盾，反而推出一系列全新的无矛盾的结论，为此，他断言第五公设是一条独

立的公设，若能找到替代此公设的“平行公设”，便可以构成一门独立的新几何。这一别开生面的思想，使他独辟蹊径，构造出了新几何学，他把它称为“绝对几何”，后来人们称作“双曲几何”或“罗巴切夫斯基几何”，这是一种非欧几何。

经过几年的艰苦努力，波尔约于1823年写成了著名论文《空间绝对几何学》，他兴奋地给父亲发出信函：“我已从乌有创造了另一个全新的世界。”1825年，波尔约回家探亲，向他父亲详细解释了他的发现。然而，波尔约的一腔热情换回来的却是父亲的冷淡。他的父亲不相信那么多大数学家都没能解决的问题会让自己年纪轻轻的儿子攻克，同时，波尔约突破传统的异端想法也让保守的父亲难以接受，父亲的态度让波尔约感到十分失望。1826年，波尔约又把他的论文寄给母校的数学老师，请求评审和支持，却没有任何回音。

在波尔约表现出非凡的数学天才之际，他的父亲也于1829年完成了著作《写给好学青年的数学原理》。1831年，波尔约再次探望他的父亲时，他已能完全理解波尔约工作的重要意义，并决定将波尔约的论文作为附录附在自己新出版的几何著作之末。

图1-18 高 斯

1831年6月20日，他的父亲将著作寄给高斯，请他进行评价。高斯在回信中表示如果要称赞波尔约就等于称赞自己，因为它与自己30年前就开始的一部分工作完全相同。他还说，由于大多数人对此抱有不正确的态度，他本来一辈子不愿意发表它们，现在正好由老同学的儿子发表了，也了却了一桩心愿。高斯的回信对波尔约来说是一个沉重的打击，他淡然的评语大大刺痛了满怀希望的波尔约，他一度怀疑高斯倚仗自己的学术声望，企图剽窃他的成果。此时波尔约还不知道，俄国数学家罗巴切夫斯基已在1826年先于他发表了和他一样的成果。同时，他的论文历尽艰辛出版后却没有引起多少反应。波尔约思想深邃，又不囿于传统，前途本应不可限量，然而一系列的打击使他一蹶不振，陷入失望，最终放弃了数学研究。这对

数学界来说，不能说不是一个损失。

面临着事业的不顺，波尔约又在生活上遭遇了不幸。1833 年，波尔约因车祸身体受伤，被迫离开了军队。此后，波尔约主要靠养老金生活，日子过得极端困苦。在这期间，波尔约和他的父亲之间时有矛盾发生。在波尔约晚年的时候，他们父子之间的关系才有所缓和。父亲去世后，波尔约专心于文艺创作。1860 年，波尔约死于肺病，一个天才数学家就这样郁郁寡欢地度过了一生。

对波尔约的认可姗姗来迟。事实上，非欧几何的三位创造者生前都没有享受到这项成果给他们带来的荣誉，因为非欧几何最终被人们所承认是其创造者死后的事情。高斯于 1855 年去世，翌年罗巴切夫斯基辞世。1868 年，波尔约去世 8 年后，意大利的贝尔特拉米给非欧几何提供了一个相容性的证明。后来，德国数学家克莱茵和法国数学家庞加莱也先后发现非欧几何的平面模型。他们的工作，揭示了非欧几何的现实意义，同时使非欧几何具有了至少与欧几里得几何同等的真实性。至此，非欧几何作为一种几何的合法地位充分建立起来，并开始得到广泛的理解和接受。

1891 年，美国德克萨斯大学的霍尔斯特德发表了波尔约关于双曲几何的稿本《附录》的英译本，为争取波尔约的学术荣誉做了许多努力。从此，匈牙利人开始认识到自己的同胞中有一位杰出的数学家。1894 年，匈牙利数学物理学会主持修复了波尔约的墓地，并建造雕像，供人景仰。1905 年，匈牙利科学院高度表彰了他的功绩，颁发了以他命名的国际数学奖，奖励那些为数学进展做出巨大贡献的人，著名数学家庞加莱、希尔伯特及物理学家爱因斯坦都曾获得这个奖。

数学好玩

三角形内角和定理的应用

1. 在一次练习课上，老师向同学们展示了一张四边形纸片，说：“这是一个四边形工件的平面图（如图 1-19），AD 和 BC 这两边的夹角等于

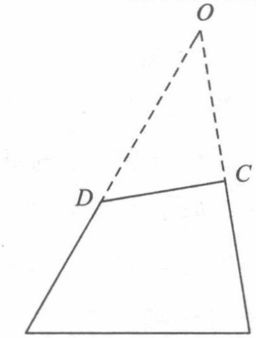


图 1-19

35°才算合格，请大家想一想，如何检验这个工件是否合格呢？”

老师话音刚落，小明一马当先发表了他的意见：“要检验 AD 和 BC 的夹角是否为 35°，应延长 AD 和 BC，设交点为 O，然后检验 $\angle O$ 是否等于 35°就可以了。”

“这样太麻烦了，我看只要分别测量出 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的度数就行了。”小新反对道。

“我赞成小新的看法，”小亮附和道，“我认为，测量出 $\angle C$ 和 $\angle D$ 的度数也可以检验 AD 和 BC 的夹角是否等于 35°。”

……

小华说：“测量 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的度数或者测量 $\angle C$ 和 $\angle D$ 的度数，虽然比小明的方法简便，但这样做能够知道 AD 和 BC 的夹角吗？”

请你用学过的知识说明：小新和小亮的方法是否正确？

2. 某工程队准备开挖一条隧道，为了缩短工期，必须在山的两侧同时开挖。为了确保两侧开挖的隧道在同一条直线上，测量人员在同一高度定出了两个开挖点 P 和 Q，然后在左边定出开挖的方向线 AP。为了准确定出右边开挖的方向线 BQ，测量人员取一个可以同时看到点 A,P,Q 的点 O，测得 $\angle A=28°$，$\angle AOC=100°$，那么 $\angle QBO$ 的度数应为多少才能确保 BQ 与 AP 在同一条直线上？

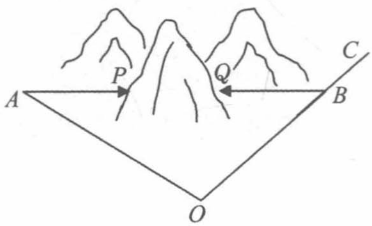


图 1-20

3. 下列两个三角形中，哪个是罗氏几何中的三角形？哪个是黎曼几何中的三角形？

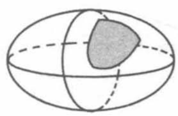


图 1-21

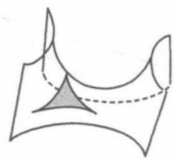


图 1-22

【参考文献】

1. 蒋声《欧几里得第五公设》，辽宁教育出版社 1988 年。

2. 刘明成、张素亮《数学家高斯》，科学普及出版社 2006 年。

3. 王章雄《数学的思维与智慧》，中国人民大学出版社 2011 年。

4. 程小红、齐晓东《悲情数学家波尔约》，《数学通报》2007 年第 2 期。

二　图说完全平方公式的证明方法

郊外，两个农夫正在讨论土地的问题。

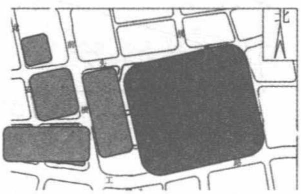


图 2-1

甲说："你那块正方形的地和我这 4 块小的土地合起来大小一样。我要在这 4 块土地上栽种 4 种不同的作物，你也把你的土地分成 4 块，种上相同的作物。等到收获时，我们看看什么作物收成好。"

乙说："我这块正方形的地要怎样分成和你一样的 4 块地呢？"

亲爱的读者，你知道应该怎么做吗？

将一个正方形分为 4 部分：两个相等的长方形和一大一小两个正方形。像这样的分割就可以：

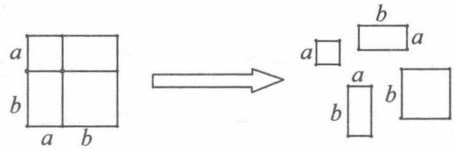


图 2-2

在这个问题中，我们还可以看到，一个大正方形的面积等于 4 个小矩形的面积。这一过程也恰恰证明了我们的完全平方公式：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。

我们已经知道了 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 的公式是可以借用图形面积进行证明的。利用正方形面积证明完全平方公式的方法仅此而已吗？还有没有其他方法呢？

数学探秘

完全平方公式的证明

针对完全平方公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 而言，刚才已经通过分割正方形的方法证明过了。

方法一

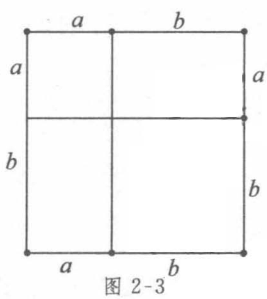


图 2-3