经济应用数学基础（下）

线性代数与线性规划

赵白云　王建明　宿金勇　编著

电子科技大学出版社

经济应用数学基础（下）

线性代数与线性规划

赵白云　王建明　宿金勇　编著

电子科技大学出版社

责任编辑:罗　艺
封面设计:李　平

书名:经济应用数学基础(下)
　　线性代数与线性规划
赵白云　王建明　宿金勇　编著

出版者:电子科技大学出版社
印刷者:郫县科技印刷厂
开　本:850×1168
印　张:10. 625
字　数:265 千字
版　次:1999 年 8 月第 1 版
印　次:1999 年 8 月第 1 次印刷
印　数:3000 册
定　价:14. 00 元

ISBN7-81043-671-9/F·199

前　言

随着社会主义市场经济的快速发展和日益完善，以数学方法为基础的量化分析技术已渗透到经济领域的各个方面。为适应新形势对经济数学的要求，作者在认真总结多年来教学经验的基础上，吸收多种经济数学教材的精华，本着打好基础，够用为度，服务专业，学用结合的原则，编著了这套经济数学教材，供经济类各层次大中专学生使用。本教材具有如下特点：

1. 在保证数学最基本系统性的前提下，注意把握内容的难易程度，删减不必要的理论证明。做到难易适当，深入浅出，举一反三，融汇贯通，既便于教，又便于学。

2. 各章节都配有数学在经济中应用的例题，并附有相应的课后练习，强化应用。努力贯彻理论联系实际的原则，达到学以致用，为专业服务的目的。

3. 精心设计和编选例题、习题，力求体现教学意图，巩固所学基本概念、基本方法，提高解决实际问题的能力。

4. 本书分为上、下两册。上册为《微积分》，下册为《线性代数与线性规划》。带 * 号的章节为选学内容。不同专业、不同层次的学生可根据实际需要有所侧重地选学教材的有关章节。

本书由李万军副教授、赵白云副教授、王建明副教授、秦素萍副教授、宿金勇副教授合作编著。其中秦素萍执笔上册第一、二、三章，王建明执笔上册第四、五章和下册第二章，李万军执笔上册第六、七章，赵白云执笔下册第一、三、四、五、八、九章，宿金勇执笔下册第六、七章。本书上册由李万军统稿，下册由赵白云统稿。由李

万军负责制定编写计划和编写的具体组织工作。

在本书编写过程中，尽管作者付出了艰辛的劳动，但书中错误之处仍在所难免，恳请同行、专家及读者指正，在此深表谢意。

作者

1999 年 6 月

目　录

带*号的为选学内容

第一章　行　列　式

在科学技术、经济管理、商品流通等领域中，往往要讨论一些量之间的线性关系或求解线性方程组，行列式则是解决这些问题的最有效工具之一，也是代数学中的一个最基本的概念。本章在二阶、三阶行列式的基础上，引进 n 阶行列式的概念，讨论 n 阶行列式的性质，以及行列式的计算方法，最后应用 n 阶行列式来解 n 个未知量 n 个方程构成的线性方程组。

§1.1　二阶、三阶行列式

一　二阶、三阶行列式

二阶行列式是由 4 个元素（2^2 个元素）$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 排成的二行二列记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

它的横排叫行，纵排叫列，前后两竖线 | | 叫行列式符号。这里每个元素 a_{ij} 都有两个下标。第一个下标表示元素所在的行，叫行标，第二个下标表示元素所在的列，叫列标。二阶行列式表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$。即

$$\begin{array}{c} \text{主}\qquad\quad\text{副} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{array}$$

可用对角线法则计算其值：即主对角线上两个元素乘积取正号，

副对角线上两个元素乘积取负号。主对角线指从左上角到右下角的对角线，副对角线指从右上角到左下角的对角线。

例如

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - 2 \times 1 = 12 - 2 = 10$$

由 9 个元素（3^2 个元素）$a_{ij}(i = 1,2,3, j = 1,2,3)$ 排成的三行三列记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

叫三阶行列式。它表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$。仍可用对主线法则计算其值，即主对角线以及与主对角线平行的实线上元素乘积取正号，副对角线以及与副对角线平行的虚线上元素乘积取负号。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

这里主对角线仍指从左上角到右下角的对角线，副对角线仍指从右上角到左下角的对角线。

例如 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned} &= 1 \times 1 \times (-1) + 0 \times 3 \times (-2) + (-2) \times 2 \times 3 - \\ &\quad (-2) \times 1 \times (-2) - 0 \times 2 \times (-1) - 1 \times 3 \times 3 \\ &= -26 \end{aligned}$$

二　二阶、三阶行列式与二元、三元线性方程组的解之间的关系

含有两个未知量,两个方程的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,用加减消元法可得方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

这个结论用行列式记号表示就是:

当 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ 时

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

结论中 x_1,x_2 的分母相同,都是方程组(1.1)中 x_1,x_2 的系数按照它们在方程组中的次序排成的行列式,称为方程组(1.1)的系数行列式;x_1,x_2 的分子分别是用常数项 b_1,b_2 替换系数行列式的第一列、第二列后所得的行列式。记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则　$x_1 = \dfrac{D_1}{D}$,　$x_2 = \dfrac{D_2}{D}$

利用这个结论,我们可以很方便地求解二元线性方程组,但必须注意方程组的系数行列式 D 不等于零。

例 1　解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = -2 \end{cases}$$

解　因为方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7 \neq 0$$

所以可用前面结论求解，又

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 4 = 3$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5$$

所以方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{3}{-7} = -\frac{3}{7}, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-5}{-7} = \frac{5}{7}$$

含三个未知量三个方程的三元线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.2}$$

当 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$ 时用消元法得方程组(1.2)的解

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_2 &= \frac{a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}} \\ x_3 &= \frac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}} \end{aligned} \tag{1.3}$$

我们仍将方程组(1.2)中的变量系数按照它们在方程组中次序构成的行列式称为系数行列式，记为 D

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

将 D 的各列分别换成线性方程组(1.2)的常数项后所得的行列式记为 D_1,D_2,D_3

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

将行列式 D、D_1、D_2、D_3 按照对角线法则展开后，再与线性方程组的解(1.3)比较可得如下结论：

线性方程组(1.2)当系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

时，有唯一一组解 $x_1=\dfrac{D_1}{D},\quad x_2=\dfrac{D_2}{D},\quad x_3=\dfrac{D_3}{D}$

由此可知，解系数行列式不为零的三元线性方程组，只需计算行列式 D,D_1,D_2,D_3 的值，当 $D\neq 0$ 时，$X_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2,3)$ 就是方程组的解。这个结论可以推广到 n 个未知量，n 个方程组成的 n 元线性方程组。为求解多元线性方程组，我们需要讨论高阶的行列式。

§1.2 n 阶行列式的概念

这一节我们将二阶、三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式。为给出 n 阶行列式的定义，我们先介绍 n 级排列以及它的逆序数等概念。

一　n 级排列及逆序数

由前 n 个自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 构成的每一个有序排列，都称为一个 n 级排列。

例如　1234 和 3241 都是 4 级排列，53124 和 32154 都是 5 级排列，而 56132 既不是 5 级排列，也不是 6 级排列。

n 级排列的总数共有 $n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1=n!$个。

如 3 级排列有 123,132,231,213,312,321 共 $3!=6$ 个。

在一个 n 级排列中,可能有较大的数码排在较小的数码前面,构成与自然顺序相反的顺序,我们称之为逆序。

定义 1.1　在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,若有较大的数码 i_t 排在较小的数码 i_s 前面($i_s<i_t$),则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序。一个 n 级排列的逆序的总数,称为它的逆序数,记为

$$N(i_1i_2\cdots i_n)$$

例如,在 5 级排列 31245 中,3 在 1 前面,构成一个逆序(31),3 在 2 前面,又构成一个逆序(32),这个 5 级排列共有两个逆序,它的逆序数为 $N(31245)=2$。

5 级排列 12345 无逆序,其逆序数 $N(12345)=0$

计算一个 n 级排列的逆序数时,可以从第一个数码起,依次求出各数码与其后面各数码构成的逆序个数 $n_1,n_2,\cdots,n_{n-1}$,然后再将各数相加,即可。

例如　5 级排列 31254 中,3 与后面数码构成的逆序个数 $n_1=2$;1 与后面数码不构成逆序 $n_2=0$;同理 2,5 分别与其后面数码构成的逆序个数为 $n_3=0,n_4=1$,所以

$$N(31254)=n_1+n_2+n_3+n_4=2+0+0+1=3$$

一个 n 级排列的逆序数如果为奇数,称这个 n 级排列为奇排列;如果为偶数或零,称这个 n 级排列为偶排列。

如前面 5 级排列 31254 为奇排列;

再比如, $N(41253)=3+0+0+1=4$,41253 为偶排列;$N(1234)=0$,1234 为偶排列。

在一个 n 级排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中,如果仅将它的两个数码 i_s 与 i_t 对调,得到另一个新的 n 级排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$,这样的变换称作一个对换,记为对换$(i_s,i_t)$。

例如,对排列 21354 施以对换(1,4) 得排列 24351;再对排列

24351 施以对换(2,3) 得排列 34251。

因 $N(21354)=1+0+0+1=2$

$N(24351)=1+2+1+1=5$

$N(34251)=2+2+1+1=6$

所以 21354 为偶排列，经对换(1,4) 后变为奇排列，24351 再经对换(2,3) 又得偶排列 34251。

由此我们发现如下规律：

定理 1.1 任意一个 n 级排列经过一次对换后，奇偶性改变。

证 (1) 首先证明对换两个相邻数码的特殊情形。设排列为

$$AijB$$

其中 A,B 表示 n 级排列除 i,j 外的其余数码。经过对换 (ij) 变为排列

$$AjiB$$

比较以上两个排列中的逆序，显然，A、B 中数码的次序没有变，而且 i,j 与 A,B 中各数码的次序也没有变，改变的仅仅是 i 与 j 的次序，因此，当 $i>j$ 时，经过对换 (i,j)，新排列比原排列减少了一个逆序；当 $i<j$ 时，新排列比原排列增加了一个逆序。所以对换前后两个排列奇偶性相反。

(2) 再讨论一般情形。设排列为

$$Aik_1k_2\cdots k_sjB$$

经过对换 (i,j) 得新的排列 $Ajk_1k_2\cdots k_siB$。

新排列可以由原排列中的数码 i 依次与数码 $k_1,k_2,\cdots\cdots k_s j$ 作 $s+1$ 次相邻对换得 $Ak_1k_2\cdots k_sjiB$ 后，再由 j 依次与 $k_sk_{s-1}\cdots k_2k_1$ 作 s 次相邻对换而得到。即新排列可以由原排列作 $2s+1$ 次相邻对换而得到。由 (1) 知，它们的奇偶性相反。

二 n 阶行列式定义

我们先研究三阶行列式的各项规律。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

通过分析可以发现：

(1) 三阶行列式等于所有位于不同行不同列三个元素的乘积的代数和，三个元素的乘积可以写成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

$j_1j_2j_3$ 是三级排列，当 $j_1j_2j_3$ 取遍所有的三级排列时，得到三阶行列式的所有项（不含符号），共 $3! = 6$ 项。

(2) 各项的符号是，当这一项中元素的行标按自然顺序排列时，如果列标构成的排列为偶排列，则取正号；如果列标构成的排列为奇排列，则取负号。

如三阶行列式中 $a_{12}a_{23}a_{31}$，$N(231) = 2$，该项为正，$a_{13}a_{22}a_{31}$ 为负，因为 $N(321) = 3$。

三阶行列式的一般项可以表示为 $(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$。

三阶行列式展开式可以表示为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有的三级排列求和。

根据这个规律，我们定义 n 阶行列式。

定义 1.2 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i = 1,2\cdots,n, j = 1,2\cdots n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式。它表示所有位于不同行不同列的 n 个元素乘积的

代数和，共 $n!$ 项，各项的符号是，当这一项中元素的行标按自然顺序排列时，若列标构成的排列为偶排列，取正号，否则，取负号。n 阶行列式简记为 $|a_{ij}|$。

n 阶行列式的展开式为

$$|a_{ij}| = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列求和，共 $n!$ 项。

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

称为 n 阶行列式的一般项。

例如　四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3j_4}(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

表示的代数和共有 $4! = 24$ 项。

$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 的行标、列标均不相同，它是 D 的一项。因列标构成的排列为 1234，$N(1234) = 0$，所以该项取正号。

$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 也是 D 的一项，列标构成的排列为 4312，因 $N(4312) = 5$，所以该项取负号。

$a_{14}a_{23}a_{33}a_{42}$ 的列标顺序为 4332，有两个元素取自第 3 列，所以它不是 D 的一项。

下面介绍几个特殊行列式，三角形行列式及对角形行列式。

$$\text{行列式 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (a_{ii} \neq 0, i = 1,2,\cdots,n)$$

中，主对角线以上的元素均为零，即当 $j > i$ 时，$a_{ij} = 0$，这样的行列式