考研数学命题人士豪金系列丛书

2017

双色印刷+重点突出+分类解析+习题精练

考研数学命题人历年真题精析

（数学一）

全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会 编著

北京大学 尤承业 教授 清华大学 徐荣 教授

北京大学 刘德荫 教授 首都师范大学 童武 教授

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

考研数学命题人士豪金系列丛书

2017

双色印刷+重点突出+分类解析+习题精练

考研数学命题人历年真题精析

（数学一）

全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会　编著

北京大学　尤承业　教授　清华大学　徐荣　教授

北京大学　刘德荫　教授　首都师范大学　童武　教授

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书是作者在10多年收集、整理考研数学资料和进行考研数学辅导的基础上，通过对历年试题的精心研究和分析，并结合授课体会和学生的需要全新编写而成。

本书收录了1998—2016年考研数学一真题，并进行了详细的解析；精辟阐明解题思路，全面剖析考点、重点、疑点和难点。在每章后面还提供了1987—1997年的相关典型真题作为习题，以便考生进一步巩固相关知识。

本书由来自北京大学、清华大学和中国人民大学的原命题组组长、命题研究专家，以及一线教师共同编写而成。通过研读本书，考生不仅可以了解考研以来数学考试的全貌，而且可以方便地了解有关试题和信息，从中发现规律，进一步把握考试的特点及命题的思路，从容应考，轻取高分。

本书适用于参加研究生入学数学考试的广大考生。

图书在版编目(CIP)数据

2017考研数学命题人历年真题精析. 数学一 / 全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会编著. -- 北京 : 北京航空航天大学出版社, 2016.4

ISBN 978-7-5124-2073-1

Ⅰ. ①2… Ⅱ. ①全… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第051614号

2017考研数学命题人历年真题精析(数学一)

全国硕士研究生入学考试辅导用书编委会 编著

责任编辑 刘晓明

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路37号(邮编100191) http://www.buaapress.com.cn

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱: bhpress@263.net 邮购电话:(010)82316936

北京时代华都印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×1 092 1/16 印张:28.5 字数:658千字

2016年4月第1版 2016年4月第1次印刷

ISBN 978-7-5124-2073-1 定价:44.80元

编 委 会

前　言

自 1987 年全国工学、经济学硕士研究生入学实行统一考试以来，已有30 载。这些历年考研试题是考生了解、分析和研究全国硕士研究生入学考试最直接、最宝贵的第一手资料，也是命题组专家的智慧结晶。而拥有一套内容完整、编排合理、分析透彻、解答规范、总结到位的历年数学真题，则是广大准备考研同学的期盼。

本书严格按照最新的全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲的要求和精神编写，对历年考研真题逐题给出了详细解答，并尽量做到一题多解。只要认真分析研究，了解、消化和掌握历年试题，便能发现数学试题总是有稳定的、普遍的、反复出现的共性，也可从中发现命题的特点和趋势，找出知识之间的有机联系，总结每部分内容的考查重点、难点，归纳常考题型，凝练解题思路、方法和技巧，明确复习方向，从而真正做到有的放矢，事半功倍。

本书包括两部分内容：

一部分是 1998—2016 年的完整真题。旨在让考生对历年考研真题有一个完整的印象，从总体上了解考研数学命题的基本形式和命题规律。

编者从历年真题和辅导班内部资料中，精选出重点考查且不易解决的题目。这些题目大多是研究生考试中的解答题，分值较高。编者分考点归纳习题，总结各类题型的解题思路和方法，并重点指出考生易错之处。

另一部分是试题精析。我们分章节、考点对题目归类。本部分不仅给出了详解，还在逐题解析历年考研数学试题的基础上，给每题作了评注。不仅分析了每题考查的知识点和难点，还对试题类型、各类型试题的解法进行了归纳和总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过列举具体题目，分析常犯的错误，使考生引以为戒；各考点前都配有知识点和复习方法的归纳总结。

本书的特点：

1. **内容全面**　汇集了 1998 年以来所有真题，以便考生对历年真题有大致的了解，并可研究真题。

2. **题型丰富**　本书按考点对历年真题分类，对每种题型都进行了归纳和总结，方便考生复习。

3. **解析详尽**　首先给出本题相应考点，再分析解题思路，给出详解，并尽量给出多

种解法以供参考和比较。题目最后还附有评注，点出本题应注意之处。

基础复习阶段，考生可以利用试题精析部分，体会各知识点及题型的命题形式和特点。模拟演练阶段，考生应在考试规定的时间内，完成真题部分，锻炼和提高解题速度以及准确率。如此复习，既能加深和巩固知识点，又能提高自己的解题能力。

"宝剑锋从磨砺出，梅花香自苦寒来。"成功源于努力拼搏，源于自信。

我们深信，考生仔细研读本书后，必能上一个新台阶。最后祝愿各位考生都能圆名校之梦！

编者　于清华园

目　　录

第一篇　2015—2016 年考研数学一试题及答案与解析

第二篇　1998—2014 年考研数学一试题

第三篇　1998—2014 年考研数学一试题分类解析

第一篇

2015—2016年考研数学一试题及答案与解析

2016 年全国硕士研究生入学统一考试 数学一试题

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目的要求,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x$ 收敛,则( ).

(A) $a<1$ 且 $b>1$ (B) $a>1$ 且 $b>1$

(C) $a<1$ 且 $a+b>1$ (D) $a>1$ 且 $a+b>1$

(2) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1\\ \ln x, & x\geqslant 1\end{cases}$,则 $f(x)$ 的一个原函数是( ).

(A) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(\ln x-1), & x\geqslant 1\end{cases}$ (B) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(\ln x+1)-1, & x\geqslant 1\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(\ln x+1)+1, & x\geqslant 1\end{cases}$ (D) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant 1\end{cases}$

(3) $y=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$;$y=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解,则 $q(x)=$( ).

(A) $3x(1+x^2)$ (B) $-3x(1+x^2)$ (C) $\frac{x}{1+x^2}$ (D) $-\frac{x}{1+x^2}$

(4) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0\\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots\end{cases}$,则( ).

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点 (B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

(C) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导 (D) $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,则下列结论错误的是( ).

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似 (B) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似

(C) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似 (D) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似

(6) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3+4x_1x_3$,则 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 在空间直角坐标下表示的二次曲面为( ).

(A) 单叶双曲面 (B) 双叶双曲面 (C) 椭球面 (D) 柱面

(7) 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$,记 $p=P\{X\leqslant\mu+\sigma^2\}$,则( ).

(A) p 随着 μ 的增加而增加 (B) p 随着 σ 的增加而增加

(C) p 随着 μ 的增加而减小 (D) p 随着 σ 的增加而减小

(8) 随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1,A_2,A_3,且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$. 将试验 E 独立重复做 2 次,X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数,Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数,则 X 与 Y 的相关系数为( ).

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{1}{3}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\,dt}{1-\cos x^2}=$________.

(10) 向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=(x+y+z)\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 的旋度 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=$________.

(11) 设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则 $dz\big|_{(0,1)}=$________.

(12) 设函数 $f(x)=\arctan x-\frac{x}{1+ax^2}$，且 $f'''(0)=1$，则 $a=$________.

(13) 行列式 $\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=$________.

(14) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，样本均值 $\bar{x}=9.5$，参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8，则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）

已知平面区域 $D=\{(r,\theta)\,|\,2\leqslant r\leqslant 2(1+\cos\theta),\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D x\,dx\,dy$.

(16)（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$，其中 $0<k<1$.

(Ⅰ) 证明：反常积分 $\int_0^{+\infty}y(x)\,d$ 收敛；

(Ⅱ) 若 $y(0)=1,y'(0)=1$，求 $\int_0^{+\infty}y(x)\,dx$ 的值.

(17)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$，且 $f(0,y)=y+1$，L_t 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,t)$ 的光滑曲线，计算曲线积分 $I(t)=\int_{L_t}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$，并求 $I(t)$ 的最小值.

(18)（本题满分 10 分）

设有界区域 Ω 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成，Σ 为 Ω 整个表面的外侧，计算曲面积分 $I=\iint\limits_\Sigma(x^2+1)\,dy\,dz-2y\,dz\,dx+3z\,dx\,dy$.

(19)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 可导,且 $f(0)=1,0<f'(x)<\frac{1}{2}$,设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1,2,\cdots)$,证明:

(Ⅰ)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛;

(Ⅱ)$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,且 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$.

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&2\\1&a\\-a-1&-2\end{bmatrix}$. 当 a 为何值时,方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解、有唯一解、有无穷多解?在有解时,求此方程.

(21)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}^{99}$.

(Ⅱ)设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}$. 记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$,将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布,令

$$U=\begin{cases}1, & X\leqslant Y\\0, & X>Y\end{cases}.$$

(Ⅰ)写出 (X,Y) 的概率密度;

(Ⅱ)U 与 X 是否相互独立?并说明理由;

(Ⅲ)求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(X,\theta)=\begin{cases}\frac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta\\0, & 其他\end{cases}$. 其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数,X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本,令 $T=\max\{X_1,X_2,X_3\}$.

(Ⅰ)求 T 的概率密度;

(Ⅱ)确定 a,使得 aT 为 θ 的无偏估计.

2016 年全国硕士研究生入学统一考试 数学一试题解析

一、选择题

1.【答案】 C

【考点提示】 反常积分

【解题分析】 由题可知：$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx=\int_0^1\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx.$

因为$\int_0^1\frac{1}{x^p}dx$ 在 $p<1$ 时收敛，可知 $a<1$，而此时$(1+x)^b$ 无影响.

同理，等式右边第二项，可得

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{a+b}\left(1+\frac{1}{x}\right)^b}dx,$$

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 在 $p>1$ 时收敛，可知 $a+b>1$，此时$\left(1+\frac{1}{x}\right)^b$ 不影响. 由此可得 $a<1$ 且 $a+b>1$，故选 C.

2.【答案】 D

【考点提示】 求分段函数的原函数

【解题分析】 由定理可知，原函数可导，因此原函数必然连续，所以原函数在 $x=1$ 处连续，选项 A 和选项 C 被排除；

在 B 选项中，可以验证 $F'_+(1)=2$，根据题意又可知，原函数满足 $F'(1)=f(1)=0$.

故 B 不符合，因此选 D.

3.【答案】 A

【考点提示】 微分方程

【解题分析】 由微分方程解的关系可知，$y_1-y_2=-2\sqrt{1+x^2}$是一阶齐次微分方程 $y'+p(x)y=0$ 的解，代入得

$$-2\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+p(x)(-2\sqrt{1+x^2})=0,$$

所以

$$p(x)=-\frac{x}{1+x^2},$$

根据解的性质得，$\frac{y_1+y_2}{2}$是 $y'+p(x)y=q(x)$的解.

所以 $q(x)=3x(1+x^2)$，选 A.

4.【答案】 D

【考点提示】 间断点

【解题分析】 根据题意易知：$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-0}{x}=1$，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{n}-0}{\frac{1}{n}}=1$，

即 $f'_+(0)=f'_-(0)$ 满足导数定义，所以选 D.

5.【答案】 C

【考点提示】 矩阵相似

【解题分析】 由相似定义可知，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}=((\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}$，所以 A 正确.

$\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{P}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}P$，所以 B 正确.

$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{P}$，所以 D 正确.

所以不正确的为 C 选项，故选 C.

6.【答案】 B

【考点提示】 二次型

【解题分析】 根据题意易知，二次型矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$.

又根据 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，可得其特征值为 $\lambda_1=5,\lambda_2=\lambda_3=-1$（一正两负）.

所以其正惯性指数和负惯性指数分别为 1，2.

故二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形为 $f=z_1^{\ 2}-z_2^{\ 2}-z_3^{\ 2}$，即 $z_1^{\ 2}-z_2^{\ 2}-z_3^{\ 2}=2$.

移项得 $\dfrac{z_1^{\ 2}}{(\sqrt{2})^2}-\dfrac{z_2^{\ 2}}{(\sqrt{2})^2}-\dfrac{z_3^{\ 2}}{(\sqrt{2})^2}=1$，故对应的曲面为双叶双曲面，选 B.

7.【答案】 B

【考点提示】 概率论

【解题分析】 由题意可知：

$$P\{X\leqslant\mu+\sigma^2\}=P\{X-\mu\leqslant\sigma^2\}=P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant\sigma\right\}.$$

所以概率随着 σ 的增大而增大，选 B.

8.【答案】 C

【考点提示】 相关系数

【解题分析】 由题意可知：

$$X\sim B\left(2,\frac{1}{3}\right),\qquad Y\sim B\left(2,\frac{1}{3}\right),$$

所以 $E(X)=E(Y)=\dfrac{2}{3}$，$D(X)=D(Y)=\dfrac{4}{9}$，$E(XY)=1\cdot 1\cdot P(X=1,Y=1)=\dfrac{2}{9}$.

所以 $\rho_{XY}=\dfrac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}-\sqrt{D(Y)}}=-\dfrac{1}{2}$，选 C.

二、填空题

9.【答案】 $\dfrac{1}{2}$

【考点提示】 求极限

【解题分析】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1+x\sin x)}{2x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{2x^2}=\dfrac{1}{2}$.

10.【答案】 $(0,1,y-1)$

【考点提示】 旋度

【解题分析】 根据旋度公式易得

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{A})=\left\{\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right\}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\x+y+z&xy&2\end{vmatrix}=\boldsymbol{j}+(y-1)\boldsymbol{k}.$$

所以 $\operatorname{rot}(\boldsymbol{A})=(0,1,y-1)$.

11.【答案】 $-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$

【考点提示】 全微分

【解题分析】 根据题意：对 $(x+1)x-y^2=x^2f(x-z,y)$ 两边分别关于 x,y 求导可得

$$z+(x+1)z_x'=2xf(x-z,y)+x^2f_1'(x-z,y)(1-z_x').$$

$$(x+1)z_y'-2y=x^2[f_1'(x-z,y)(-z_y')+f_2'(x-z,y)].$$

将 $\begin{cases}x=0\\y=1\\z=1\end{cases}$ 代入求得 $z_x'=-1,z_y'=2$.

所以 $\mathrm{d}z\Big|_{(0,1)}=-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$.

12.【答案】 $\dfrac{1}{2}$

【考点提示】 导数

【解题分析】 根据题意并结合泰勒公式易得

$$f(x)=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)-x[1-ax^2+o(x^2)]=\left(a-\frac{1}{3}\right)x^3+o(x^3).$$

所以 $f^{(3)}(0)=1,a-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$，故 $a=\dfrac{1}{2}$.

13.【答案】 $\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$

【考点提示】 求行列式

【解题分析】 根据题意并展开第一列有

$$\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&0\\0&\lambda&-1&0\\0&0&\lambda&-1\\4&3&2&\lambda+1\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\\3&2&\lambda+1\end{vmatrix}+4\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}-1&0&0\\\lambda&-1&0\\0&\lambda&-1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4.$$

14.【答案】 $(8.2,10.8)$

【考点提示】 置信区间

【解题分析】 $$P\left\{-\mu_{0.025}<\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<\mu_{0.025}\right\}=P\left\{\bar{x}-\mu_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{x}+\mu_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}$$

$$=0.95.$$

因为 $\bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\mu_{0.025}=10.8$,且 $\bar{x}=9.5$,所以$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\mu_{0.025}=1.3$.

所以置信下限 $\bar{x}-\mu_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=8.2$,故置信区间为 (8.2,10.8).

三、解答题

15.【考点提示】 重积分

【解题分析】 根据题意,将原式放在极坐标系下进行计算,且积分区域关于 x 轴对称,则有

$$\begin{aligned}\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2}^{2(1+\cos\theta)}r^2\cos\theta\mathrm{d}r = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\left.\frac{r^3}{3}\right|_{2}^{2(1+\cos\theta)}\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3\cos^2\theta+3\cos^2\theta+\cos^4\theta)\mathrm{d}\theta.\\
&=8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos2\theta+1}{2}\mathrm{d}\theta+8\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\mathrm{d}\sin\theta+\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\sin\theta\\
&=4\left(\frac{\sin2\theta}{2}+\theta\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+8\left(\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}3\sin^2\theta\cos^{2\theta}\mathrm{d}\theta\\
&=4\pi+\frac{32}{3}-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^22\theta\mathrm{d}\theta\\
&=5\pi+\frac{32}{3}.\end{aligned}$$

16.【考点提示】 微分方程

【解题分析】 (Ⅰ)由题意可知:微分方程的特征方程为 $r^2+2r+k=0$,因 $0<k<1$,所以特征方程有两个不相同的特征值,$r_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4k}}{2}=-1\pm\sqrt{1-k}$,$r_{1,2}<0$.

由二阶常系数齐次线性方程的解的关系可知,$y(x)=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}$.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\left(C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{+\infty}C_1\mathrm{e}^{r_1x}\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}C_2\mathrm{e}^{r_2x}\mathrm{d}x\\
&=\frac{C_1}{r_1}\left(\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{r_1x}-1\right)+\frac{C_2}{r_2}\left(\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{r_2x}-1\right).\end{aligned}$$

又因为 $r_{1,2}<0$,所以$\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=-\frac{C_1}{r_1}-\frac{C_2}{r_2}$ 极限存在,故收敛.

(Ⅱ)根据 $y(x)=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}$,$y(0)=1$,$y'(0)=1$ 可知,

$$\begin{cases}C_1+C_2=1,\\C_1r_1+C_2r_2=1,\\r_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-k}.\end{cases}$$

解得 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$,代入$\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=-\frac{C_1}{r_1}-\frac{C_2}{r_2}$,得$\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{1-k}}{k}$.