



Beyond Infinity ∞

An expedition to the outer limits of the mathematical universe

超越无穷大

一次跨越数学边界的冒险之旅

[英] 尤金妮娅·程 (Eugenia Cheng) —— 著

杜娟 —— 译



Beyond Infinity ————— ∞

An expedition to the outer limits of the mathematical universe

超越无穷大

一次跨越数学边界的冒险之旅

[英]尤金妮娅·程 (Eugenia Cheng) ———— 译



图书在版编目 (CIP) 数据

超越无穷大：一次跨越数学边界的冒险之旅 / (英)
尤金妮娅·程著；杜娟译. -- 北京：中信出版社，
2018.4

书名原文：Beyond Infinity: An expedition
to the outer limits of the mathematical universe
ISBN 978-7-5086-8566-3

I. ①超… II. ①尤… ②杜… III. ①经济数学—通
俗读物 IV. ① F224.0-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 017114 号

Beyond Infinity: An expedition to the outer limits of the mathematical universe by Eugenia Cheng

Copyright © Eugenia Cheng, 2017

Simplified Chinese translation copyright © 2018 by CITIC PRESS CORPORATION

All rights reserved

本书仅限中国大陆地区发行销售

超越无穷大——一次跨越数学边界的冒险之旅

著 者：[英] 尤金妮娅·程

译 者：杜 娟

出版发行：中信出版集团股份有限公司

(北京市朝阳区惠新东街甲 4 号富盛大厦 2 座 邮编 100029)

承 印 者：三河市西华印务有限公司

开 本：880mm × 1230mm 1/32

印 张：10.25 字 数：215 千字

版 次：2018 年 4 月第 1 版

印 次：2018 年 4 月第 1 次印刷

京权图字：01-2018-0370

广告经营许可证：京朝工商广字第 8087 号

书 号：ISBN 978-7-5086-8566-3

定 价：49.00 元

版权所有·侵权必究

如有印刷、装订问题，本公司负责调换。

服务热线：400-600-8099

投稿邮箱：author@citicpub.com

序 言

我讨厌机场。

我觉得机场让人特别有压力，拥挤而且吵闹。机场里总是充斥着过多的人、过多的队列、过少的作为和无处不在诱惑着我的不健康的食物。非常不幸的是，旅程总是从机场开始，这让我有一点点害怕旅行。旅行应该是一个令人兴奋的有关发现的过程，坐着飞机去一个新的地方，应该是一段壮美而充满魔力的经历。但是机场和狭窄的经济舱座椅经常会毁掉这一切。

学习数学应该也算得上一段令人兴奋的发现之旅，同样壮美且充满魔力，尽管它的开端也经常会毁掉一切。因为一开始你总是会遇见大量的事实、公式、让人感到压力的测试和等待解决的乏味问题。

相较坐飞机，我喜欢乘船旅行。

我喜欢身处开阔的水面，感受风吹过我的脸庞，看着远处的楼群和海岸线，但是又不用靠近。我喜欢一直朝着地平线前进，但是又永远不会到达。我喜欢感受自然的力量，但是又不用完全受大自然的摆布。我不是一个水手，所以通常掌控船的另有其人。偶尔我会遇到一些能够操作的船，这样一来，能够发挥我自己的能力就成了一种奖

励。我曾经划着一艘小的手划艇沿着包围着一座小小的法国城堡的护城河漫游，我也曾经沿着阿姆斯特丹的运河踩脚踏船，我还曾经沿着康河撑篙。不过，在一次失足落水之后，我就再也不到康河撑篙了，这和有些人最初在数学领域经历了一些挫折之后就再也不碰数学是一样的。我曾经在悉尼和洛杉矶乘船去看生活在离海岸很远的地方的大鲸鱼，也曾经在威尔士乘船去离海岸很远的地方看海豹和其他野生生物。我小的时候总会和家人一起坐着渡轮跨过英吉利海峡到法国度假，直到几乎不可能建成的欧洲之星变成现实。由此可见，我们人类是多么容易把之前看来几乎不可能的事情当作理所应当！

现在，我很少再为了到达某个目的地而乘船了。相反，我的目的就是享受乘船的过程，欣赏沿海风光和大自然，偶尔发挥一下我自己的能动性。一个例外就是泰晤士河上的渡轮，因为乘坐泰晤士河上的渡轮是伦敦市中心一种令人非常享受的通勤方式。它既能让乘客享受到乘船的乐趣，又能帮助乘客到达目的地。

在某种程度上，我喜欢抽象数学这件事和我喜欢乘船有点儿类似。对于我来说，这两者都超越了到达一个目的地的范畴，更多的是乐趣、锻炼头脑、与数学交流和欣赏数学之美。这本书是一个通往神秘而壮美的“无穷”世界的旅程。我们即将看到的风景会让我们大开眼界，惊叹不已，甚至有的时候会让我们觉得不可思议。我们将会沉浸在数学的魔力里，但是又不用完全受其摆布。我们将会朝着人类思想的地平线前进，但是又永远不会到达。

目 录

∞

序 言 III

1 数学世界里的尼斯湖水怪	3
2 希尔伯特旅馆实验	13
3 无穷不是自然数	31
4 有理数和无理数	43
5 一个函数问题	63
6 接近无穷	87
7 超越无穷	105
8 无穷 vs 无穷	121
9 无穷是什么?	141

第一部分 旅程

第二部分
景色

10 抽象事物	161
11 从千层酥到 iPod	169
12 维度问题	183
13 范畴论和结合体	205
14 无穷小	225
15 分裂	241
16 古怪的终极难题	279
17 跨越逻辑边界	307

致 谢 317

第一部分

∞

旅程

1

数学世界里的尼斯湖水怪

无穷就像尼斯湖水怪，以其令人惊叹的体型和难以捉摸的个性，吸引人们展开想象。无穷是一场梦，一个巨大的由无穷无尽的时间和空间所构成的迷幻世界。无穷是一个黑暗森林，在里面，你会遇见超越想象的生物、纠缠在一起的灌木丛和突然照射进来的阳光。无穷是一个环形，它在我们面前呈现为一个无穷无尽的螺旋。

我们的生活是有限的，我们的头脑是有限的，我们所处其中的世界也是有限的。但是我们仍旧能够瞥见我们周围的无穷。我小时候生活的房子中间有一个火炉，火炉上有一个烟囱。所有的房间都围绕着这个火炉连接在一起。这意味着我和妹妹可以一圈一圈地相互追逐，没有终点，感觉上就好像我们生活在一个无穷大的房子里一样。环形让人们可以在有限的空间里开启一个无穷的旅程。这个原理不仅仅被用在了孩子们的相互追逐上，还被用在了汽车赛道上和粒子对撞机上。

后来，我的母亲教我使用频谱计算机编程。直到现在，每当想起我最喜欢的计算机小程序时，我都还是会不由自主地笑出来。

10 打印输出“你好”

20 返回到 10

这些计算机语句能够产生一个无穷无尽的循环。当然，这是一个抽象概念的循环，而不是一个物理上的循环。每到这种时候，我就会点击“开始”，然后非常兴奋地看着“你好”这个词在屏幕上滚动。因为我知道，除非我点击“结束”，否则这个过程就会永远重复下去。我是那种不会轻易感到厌烦的孩子。我每天都会这么做，而不觉得自己应该赶紧写一些更加有用的程序。不幸的是，这也使得我的编程能力从来没有真正进步过。无穷的耐心导致了一个奇怪的后果。

我的这个简短但能产生冗长的打印输出结果的抽象循环背后的原理是：程序会自己回到原点。自我索引让我们能够从另一个角度窥测无穷。分形是用和自身形状相同的形状构建的形状。当你把其中的一部分放大的时候，你看到的将是相同的形状。为了达到这一目的，这个形状的细节需要能够“永远”保持下去。毋庸置疑，这些细节一定会超越我们能够描绘和能够看到的极限。图 1-1 描绘了一些分形树和著名的谢尔宾斯基三角（Sierpinski triangle）的最初几级。

如果你把两面镜子对在一起，你看见的将不再仅仅是自己的镜像，还有你的镜像的镜像。你的镜像的镜像又会产生出自己的镜像。只要你调整镜子的角度，这些镜像就会一直叠加下去。每一个镜像都会比前面的镜像小，从理论上讲，它们会像分形一样“无穷”延续下去。

我们能够从环形和自我索引中看到无穷，同样也能从镜子里的镜像越来越小这件事情上看到无穷。孩子们为了能够让自己一直吃到蛋糕，每次都只吃剩余的蛋糕的一半。一群人在分享一个蛋糕的时

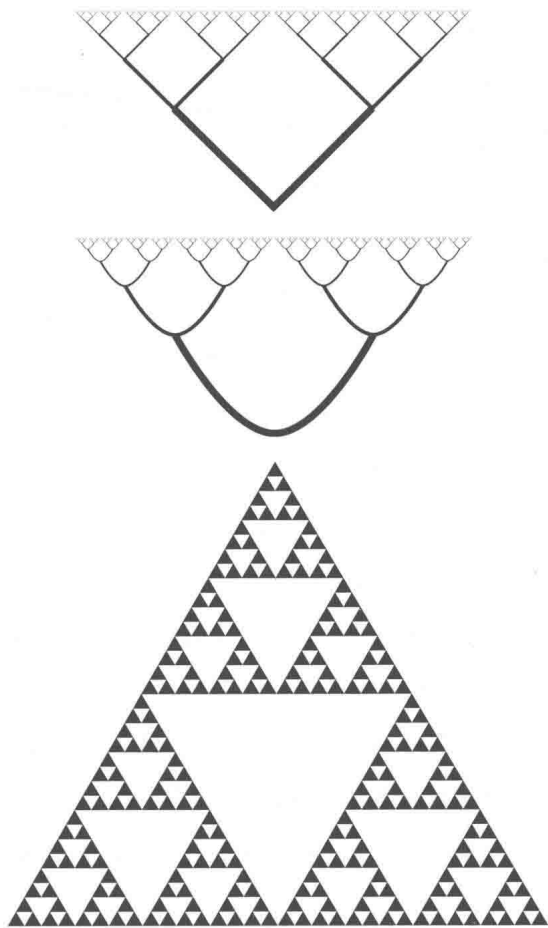


图 1-1

候，都很谦让，不愿意吃最后的一块，所以每个人都吃剩余部分的一半。有人告诉我日语里有一个专门形容这个现象的词——“enryo no katamari”，意思就是大家都很谦让而不愿意吃的最后一点蛋糕。

我们并不确切地知道宇宙是不是无穷的。但是我喜欢抬头看教堂的尖塔，让自己相信塔尖的两侧是平行的，而这个塔无穷地冲往天

际，直至无穷。我们的生活是有限的，但是不朽的传奇和神话故事能够穿越时间、跨越文化。

对于无穷，我们有如此多需要探索的，就像是尼斯湖波光粼粼的水面下可能藏着也可能没藏着的那个巨大的、古老的、神秘的怪物。这个被我们称为无穷的怪物到底是什么？当我们说“永远”这个听起来平淡无奇的词的时候，我们所指的到底是什么？在我们所生活的这个缺乏耐心的世界里，人们总是很夸张地使用“永远”这个词。可能我们刚在网络上等待了两分钟就会说，“我看起来要永远在线等待了！”如果网页三秒钟没有打开，我们就会说，“这个网页难道永远也打不开吗？”西班牙巴斯克的作家阿玛妮亚·家本桃修（Amaia Gabantxo）告诉我，在巴斯克语里，11对应的词是“hamaika”，这个词同时也有无穷的意思。我的一个来自巴斯克的朋友证实了这一点。他观察了一个橱柜，然后宣称里面有“4瓶2013年的、10瓶2014年的和许多瓶2015年的”自制果酱。很明显，超过10就会被认为是无穷了。我的研究领域是高维范畴理论。在这里，“高”通常意味着三维或者更多，其中也包含无穷。换句话说，从三到无穷都被囊括在了同一个字里。

我们在自己的平凡生活里思考的无穷可能是很梦幻且令人兴奋的，但是一经仔细研究，这些无穷就消失了。就好像彩虹一样，无论你怎样努力也没办法触摸到它。而且，这些无穷往往会造成矛盾、冲突、不可逾越的鸿沟和黑暗的陷阱。在后面的讨论中我们会看到，它们其实禁不起严格的逻辑检验。

数学的一个作用就是解释我们周围世界中出现的各种现象，特别是会在很多不同的地方发生的同样的现象。如果同一个观点能够联系

很多不同的情形，数学家就会冲进来试图寻找能将这些情形统一起来的大一统的理论。一旦他们找到了这个理论，我们就能更好地理解这些情形背后的相同点。无穷就是这样的一个观点。它作为一个引人遐想的观点无处不在。它看起来好像也能像其他的数学观点一样最终被统一起来，就好像长度、体积或者数量一样。但是，为什么当我们把这些简单的数学概念延伸到无穷的时候就这么困难呢？这正是这本书的主旨：为什么这件事这么困难？数学家为此付出的努力最终带来了什么？在这个探索无穷的旅程中我们能看到什么？

无穷的本能

无穷是一个很容易想象但是很难具体描述的概念。小孩子能够很快地理解无穷这个概念，而数学家们却花了几千年的时间从纯技术的层面遵循严格的逻辑论证无穷。下面是一些可能会让我们联想到无穷的事物。孩子们经常会产生这些关于无穷的联想：

无穷会永远持续下去。

无穷比最大的数字还要大。

无穷比我们能想到的任何巨大的事物都更大。

无穷加一，它还是无穷。

无穷加无穷，它还是无穷。

无穷乘以无穷，它依旧是无穷。

孩子们第一次接触无穷这个概念的时候可能会非常激动。他们学习从一数到十，再数到二十，然后学着数到一百、一千、一万、一亿。如果你问一个小孩最大的数字是多少，他们通常会说“一亿”。如果你

接着问一亿零一是不是更大呢，他们的眼睛通常会因诧异而瞪大。

无论他们想到的是多大的数字，你都可以加上一然后获得一个更大的数字。说服他们接受这一点并不困难。这说明了一个道理，那就是，最大的数字是不存在的。数字可以一直加下去！但是，一共有多少个数字呢？无穷这个概念由此生成了。

也许一些孩子最初接触无穷这个概念是在电影《玩具总动员》中。他们听见巴斯光年说，“飞向无穷浩瀚的宇宙！”（“To infinity ... and beyond!”）这个口号听着就很激动人心。但是，在我还是个孩子的时候，《玩具总动员》这个电影还没有制作出来。我是通过前面描述的循环、家里的物理回路和我最喜欢的计算机程序中的抽象循环来理解无穷的。

一旦孩子们开始思考无穷，他们就会提出很多非常难以回答的关于无穷的问题。无穷是什么？是一个数字吗？是一个地点吗？如果不是地点的话，我们怎么能像巴斯光年说的那样飞向无穷呢？

从孩子们在学校里听见无穷这个概念起，问题就开始了。一除以零是不是等于无穷？一除以无穷是不是等于零？如果无穷加上一还是无穷的话，那么无穷减去无穷是什么呢？

面对孩子们提出的这些看起来无法回答的数学问题，大人们可能会觉得难为情。因为大人们总会觉得自己需要知道所有的答案。但是数学教育家和创新者克里斯托弗·丹尼尔森说，学习的一个重要的方面就是能够提出新的问题，这比陈述新的事实更加重要。在数学领域，总会有更多的问题。即便是数学非常好的人或者在大学学习数学专业的人，甚至每天从事数学研究的数学家，也总会发现更多的尚且没有得到解答的关于无穷的问题。

无穷的不可思议

下面是一些我最喜欢的令人费解的题目或结论。我们将会在今后的章节中探讨这些题目。

* 如果你有一个有无穷房间的旅馆，而这个旅馆已经客满了，你是否还可以通过将每一个客人挪后一个房间来容纳下一个客人？

* 如果一个彩票机里面有无穷多个号码球，你中奖的概率有多大？

* 一些无穷比其他的无穷要大！

* 无穷的袜子在某种程度上比无穷的鞋子多。

* 如果我能够获得永生，那么我可以一直磨磨蹭蹭。

* 你从甲地到乙地旅行，你需要经过两地之间的中点，然后经过剩余路程的中点，然后再经过剩余路程的中点，以此类推。剩余的路程永远有中点，那么你永远也到达不了你的目的地。是不是这样？

* 循环小数 $0.9999\dots$ 等于 1。

* 一个圆形是不是有无穷条边？

* 为什么数学好的人也会在微积分上卡壳？是的，这里面也有一个关于无穷的问题。

无穷能够通过不同的方式激发任何年龄段、任何知识水平的人的热情。这本书将会带领大家探索无穷并且超越无穷。如果你仔细思考并且使用正确的方式思考的话，你就会理解确实存在超越无穷的可

能，就像我们总有更多的可问的问题和更多的值得探索的事物一样。无穷不是一个物理上的地点，所以我们要经历的并不是一个物理上的旅程。你可以坐在原地和我一起体验这个旅程，因为这个旅程是抽象的。这个旅程将会通往一个深入的、杂乱的、神秘的、无边无际的世界。

为什么

我们为什么要参与这个旅程？就像物理的旅程一样，抽象的旅程也有其存在的诸多意义。每个人都有自己的理由。也许你要在目的地做一件特别的事；也许终点处有非常好的风景；也许旅途中有美妙的景色；也许你喜欢行走或者攀爬所带来的物理体验，或者快速驾驶所带来的愉悦，又或者坐在火车上观看两边的田野向后飞掠所带来的静谧感（虽然我自己有关火车的经历往往牵涉延迟和恼怒的通勤者而不是静谧感，但是我们可以暂时把这些放在一边）；也许你喜欢探索未知的世界；也许你享受四处游荡，在陌生的城市迷路；也许你就是喜欢旅行，想要见识尽可能多的地方，因为“世界那么大，我想去看看”。

所有这些理由在抽象的世界中都有所对应。你要在目的地做一件特定的事——比如上班通勤，对应你脑中想要解决的一个特定的难题。这种抽象旅程的目的往往不是发现喜悦，而是完成任务。终点处的好风景对应我们通过研究获得的看待日常事物的新视角。旅途的美妙景色对应我们在研究过程中产生的神秘而美好的观点和看法。看着一个几乎不可能的观点逐渐被证实的喜悦，就像看到迷雾逐渐散去，大海开始在地平线上闪闪发光。我并不像很多人那样只是单纯地喜欢旅行，但是我有非常大的好奇心想要探索抽象的世界。我能够平静而