新世纪高等学校规划教材 · 数学系列

数学教育丛书

数学哲学

张英伯　曹一鸣◎丛书主编

张景中　彭翕成◎著

SHUXUE ZHEXUE

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

新世纪高等学校规划教材 · 数学系列

数学教育丛书

数学哲学

张英伯 曹一鸣◎丛书主编

张景中 彭翕成◎著

SHU… …UE

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学哲学 / 张景中著. — 2版. — 北京 ：北京师范大学出版社，2017.4
新世纪高等学校规划教材. 数学系列
ISBN 978-7-303-22133-2

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①数学哲学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 028166 号

营销中心电话　010-62978190　62979006
北师大出版社科技与经管分社　www.jswsbook.com
电子信箱　jswsbook@163.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京市海淀区新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　刷：三河市东兴印刷有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：730 mm×980 mm　1/16
印　张：13.5
字　数：212 千字
版　次：2017 年 4 月第 2 版
印　次：2017 年 4 月第 4 次印刷
定　价：30.00 元

策划编辑：梁志国　刘风娟　责任编辑：梁志国　刘风娟
美术编辑：刘　超　装帧设计：刘　超
责任校对：李　菡　责任印制：赵非非

数学教育丛书

顾　　　问：徐利治　张景中　张奠宙

主　　　编：张英伯　曹一鸣

丛书编委会（按姓氏笔画为序）

马云鹏　王光明　孔凡哲　代　钦

宁连华　宋乃庆　张生春　张英伯

张春莉　张景中　张奠宙　松宫哲夫

徐利治　徐斌艳　高　夯　涂荣豹

黄秦安　曹一鸣　喻　平

总 序

成为一名优秀的数学教师，是每一位有责任心和事业心的数学教师的神圣使命。推动中国数学教育实践的良性发展，提高中国数学教育的质量，是每一位中国数学教育工作者的匹夫之责。

数学教育是数学的教育，数学教师需要有良好的数学素养。20 世纪后半叶及 21 世纪初科学技术的迅猛发展，对大、中、小学数学教育提出了越来越高的要求，数学课程改革需要不断应对时代的挑战。将一些现代数学的内容以及思想方法（譬如，微积分、向量、算法、编码、统计、群等）引进中学数学课程，已是大势所趋。相比以往，正在实施中的数学新课程，内容变化较大，许多选修课的内容甚至连教师都没有学过。现在的课程内容涉及的知识面广，难以全面掌握、深刻理解，使得广大的中学数学教师正面临着前所未有的危机与挑战。

教师是一个专门的职业，作为一位优秀的数学教师需要有良好的数学教育素养。面对时代的要求，面对新的教学理论、教育技术，如何处理传统与现代的关系，改进教学方式，让学生主动参与教学，减轻学生过重的数学学习负担，提高数学教学效率，促进学生长远发展，这些都需要教师对数学教育理论进行系统的学习与研究。

全国高等师范院校数学教育类课程与教材建设正在进行之中。近年来的全国高等师范院校数学教育研究会特别将“数学教育专业课程建设”以及“研究生培养”作为重点专题来研究。2005 年全国高等师范院校数学教育研究会常务

理事会期间，部分专家提出目前没有合适的、系统的数学教育本科、研究生(特别是教育硕士)教材。2006年全国高等师范院校数学教育研究会议再次提出这一问题。会议期间几位热心的学者着手策划此事，从而诞生了本套丛书。该套丛书得到了许多著名数学家以及数学教育家的鼎力支持。张景中院士、徐利治教授、张奠宙教授欣然答应担任丛书顾问，并承担丛书的编写工作。他们身体力行，为建设中国数学教育大业，提高数学教育类教材水平鞠躬尽瘁。他们严谨治学的态度深深地影响着参与丛书编写工作的各位同仁。各位编委(分册主编)齐心协力，充分利用参与国内外学术交流的机会，探讨交流、出谋划策，经过大家的共同努力，初步确定了这一套书的总体框架，也彰显了国内数学教育同仁的强烈责任心和神圣使命感。

北京师范大学出版社大力支持我国的数学教育类课程与教材建设，理科编辑室梁志国主任精心运作，将“丛书”纳入出版计划，体现了北京师范大学出版社服务于教育事业的使命感。

这套丛书共12本，构成一个整体，基于数学，紧密联系数学教学实践，各有侧重：一类加深对数学素养的提升，如《数学哲学》《数学方法论选读》《现代数学通览》《现代数学与中学数学》(第2版)；另一类则注重于提升数学教育理论与研究水平，如《数学教育原理——哲学、文化与社会的视角》《数学课程导论》《数学教学论》《数学教学心理学》《数学教育测量与评价》《数学教育研究方法与论文写作》《数学教育史》《数学教学案例研究》。

但愿该套丛书的出版能够为有志于系统研习数学教育理论，全面提高数学及数学教学、科研水平的中小学教师、教研员、本科生、研究生提供有效的帮助。

数学教育丛书编委会

目 录

第12章　数学与哲学随想/174

第 1 章 “万物皆数”观点的破灭与再生——第一次数学危机与实数理论

联系数学的发展历史学习数学哲学，有趣而且有效。

数学史为数学哲学的研究提供了背景资料，让我们看到不同时期的数学家对数学的看法，他们的思想是如何产生和发展的。

西方数学史言必称希腊，这是因为希腊确实有其值得荣耀的地方。第 1 章从古希腊的毕达哥拉斯学派讲起，因为他们最早提出了系统的数学哲学思想。在今天看来，他们掌握的数学知识不多，但志向不小。他们面对浩瀚宇宙，希望寻找万物的本原，提出了“万物皆数”这样一个大一统的命题，并为论证该命题作出了很多的努力。

对于毕达哥拉斯学派用数来解释万物及其变化规律，恩格斯给出很高的评价，认为“宇宙的规律性第一次被说出来了”。

毕达哥拉斯学派对后世的数学哲学思想有着深远的影响。

面对$\sqrt{2}$这个新事物的出现，已有的体系已经容不下它。是把它驱逐出去，还是建立一个更大的体系来容纳它？

说清楚$\sqrt{2}$需要建立实数系统，需要把什么是连续性说清楚。这是一个古老的哲学问题。毕达哥拉斯学派和后来的许多哲学家都没有解决这个问题。在两千多年后，数学家解决了这个问题。因为这本质上是一个数学问题。

学习完本章，我们可以看到，数学和哲学自古以来就有密切的联系。

古代的哲学家大都是博学多才的人，他们不但能滔滔不绝地讲自己的哲学见解，还能讲自然现象、社会伦理，特别是数学的道理。你不要以为这是因为古人特别聪明，或是后来的哲学家不行了。这主要是因为那时各门科学还没有分家，哲学就是包罗万象的学问。另外，那时人类的知识比现在贫乏得多。所谓博学，是相对于当时多数人知识贫乏而言的。实际上，古代所谓精通数学的哲学家，他的数学知识未必赶得上今天的中学生。

在古希腊，哲学家大都格外重视数学。最早的唯物主义哲学家泰勒斯，提出原子唯物论的德谟克利特，最早的唯心主义哲学家毕达哥拉斯，都曾到埃及学习几何知识。创立理念论唯心主义体系的柏拉图，也特别推崇数学知识。在

这些人当中，最推崇数学、在数学上成就最大的，当推毕达哥拉斯。

1.1 毕达哥拉斯学派的信条——万物皆数

毕达哥拉斯(约前 580—前 500)是古希腊著名的数学家和哲学家，早年曾游历埃及、波斯学习几何、语言和宗教知识，回意大利后在一个名叫克罗顿的沿海城市定居。在那里，他招收了 300 个门徒，建立了一个带有神秘色彩的团体，这个团体被人们称为毕达哥拉斯学派。

毕达哥拉斯被他的门徒们奉为圣贤。凡是该学派的发明、创见，一律归功于毕达哥拉斯。这个学派传授知识，研究数学，还很重视音乐。“数”与“和谐”，是他们的主要哲学思想。

他们沉醉于数学知识带给他们的快慰，产生了一种幻觉：数是万物的本原；数产生万物，数的规律统治万物。他们认为：1 是最神圣的数字，1 生 2，2 生诸数，数生点，点生线，线生面，面生体，体生万物。他们研究数与形状的关系，研究数与音乐的关系。

毕达哥拉斯强调事物间数量关系所起的重要作用，这在人类认识史上是一个进步。

与此类似，我国古代老子《道德经》中也有“道生一、一生二、二生三、三生万物”的说法，这也近于万物皆数的哲学思想，只是没那么明确和系统罢了。

有趣的是，正是毕达哥拉斯学派自己的发现，导致了“万物皆数”理论的破灭。

1.2 第一个无理数

形如 $\frac{a}{b}$ 的数(其中 a，b 是正整数)，我们今天称之为分数，而毕达哥拉斯则认为 $\frac{a}{b}$ 并不是单个实体，而是两个整数之间的一个比例关系。在这样的基础上，毕达哥拉斯学派发展了初步的比例理论。

用现代数学的观点来看，整数有序对(a, b)之间适当定义了运算，就叫有理数。但毕达哥拉斯认为分数表示的量既然能够用整数比来表示，那也就没有必要将分数单独列出来了。那么，是不是存在某一些量不能用整数比来表

示呢?

毕达哥拉斯在欧洲是第一个发现勾股定理并给出证明的人。据说，他在观察地板上的方形图案时，发现以直角三角形的斜边为边长的正方形的面积(图 1.2-1)，恰好是以这个直角三角形的两条直角边为边长的两个正方形的面积之和，于是受到启发，进一步找出了一般证明。

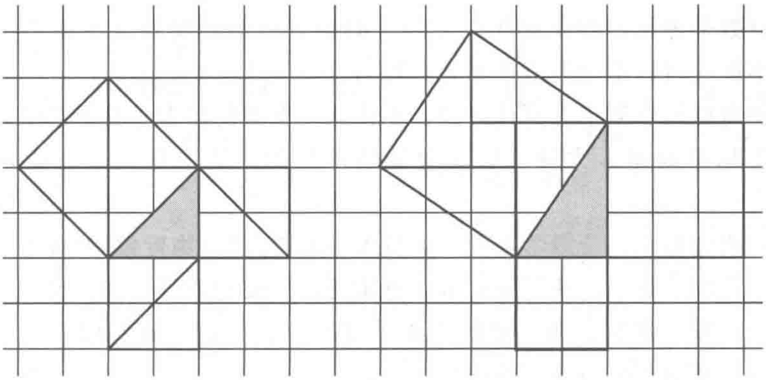

图 1.2-1

根据勾股定理，边长为 1 的正方形，其对角线的长度应当是$\sqrt{2}$。毕达哥拉斯的门徒希帕苏斯发现，$\sqrt{2}$既不是自然数，也不是分数。因为，如果有两个自然数 m 和 n 使

$$\sqrt{2}=\frac{n}{m}\quad\left(\frac{n}{m}\text{既约}\right), \tag{1.1}$$

则两端平方后可得

$$2m^2=n^2。 \tag{1.2}$$

由于 $2m^2$ 是偶数，所以 n 必为偶数。又因为$\frac{n}{m}$既约，所以 m 是奇数。于是式(1.2)左端不能被 4 整除，右端可以被 4 整除，矛盾。

这个事实的发现，是毕达哥拉斯学派的一大成就。因为它不能从经验与观察得出，只能靠抽象的思考证明，它标志着人类的思维有了更高的抽象能力。

关于勾股定理，在中国、巴比伦，有的数学家比毕达哥拉斯知道得早得多。但是东方数学家始终没有发现$\sqrt{2}$不能表示为分数这一矛盾。这也许与东方数学仅着重于解决实际问题、忽视抽象思维有关。试想一下？谁也不会去买$\sqrt{2}$匹布、$\sqrt{5}$只羊？卖东西的不好卖，给钱也不好给。这一现象颇有趣。也许数学史与哲学史的研究者能从社会、政治、文化的角度作更好的说明。

在日常生活中，用到小数点后两位数字足矣。即从理论上讲，有理数似乎也够用。容易证明，有理数是处处稠密的，即任意两个有理数之间还有有理数。因此好像并没有引入新数的必要。

有理数不能表示的几何量的发现，令毕达哥拉斯学派大伤脑筋。因为他们心目中的数只有自然数与自然数之比——分数。万物皆数，就是万物皆可用自然数或分数来表示，如今发现边长为 1 的正方形的对角线竟不能用“数”来表示，岂不证明自己学派的信条不是真理吗？

毕达哥拉斯学派千方百计封锁，不让这一发现传出去，甚至把泄露了这一秘密的希帕苏斯抛入大海。但真理是锁不住的，这个发现最终还是被传播开来。

当时研究数学的希腊学者们，虽然不一定赞同“万物皆数”的观点，却仍认为在数学当中，算术比几何更基本、更重要。现在知道了有些几何线段不能用数来表示，他们便对数的重要性产生了怀疑，转而把几何看成更基本的数学了。于是，几何学的研究便繁荣昌盛起来。直到非欧几何被发现，几何在数学中的基础地位才又让位于算术。

1.3　无理数之谜

本来，哲学家们认为世界上的量都可以用数来表示。你看，在一根长为 1 的线段上，中点可以用$\frac{1}{2}$表示；把线分成 3 段，分点可以用$\frac{1}{3}$和$\frac{2}{3}$表示；分成 5 段，分点可用$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{4}{5}$表示……也就是说，分数可以表示极小极小的量。任何两个分数，无论它们在数轴上挨得多么近，它们之间总还有无穷多个分数。但现在这么多的数，居然不能表示某些线段的长度。这一事实令当时的哲学家极度震惊，数的万能的力量被否定了！这就是数学史上的第一次数学危机。

那么，边长为 1 的正方形的对角线的长度究竟是什么？是$\sqrt{2}$。$\sqrt{2}$又是什么呢？它是不是数？不是数，为何能表示确定的几何量？是数，为何求不出它的准确值？在这个问题上，欧洲哲学家与数学家在两千多年间一直陷在迷雾中。数学家们一方面为了解题不得不使用根式，另一方面又说不清带根号而得不出准确值的东西是不是数。直到 17 世纪，还有一些数学家坚决不承认无理

数是数。

无理数之谜与连续性的概念密切相关。

1.4 连续性的奥秘

世界上有些平平常常的事，仔细想想又有点怪。比如说，两个朋友几天不见了，偶然在街上碰见，彼此马上就能认出来，打招呼。能认出来，似乎是当然的事。可是细追究起来，这又很怪。几天之内，两人的模样变了没有呢？当然变了。要是几天之内不变，那几年、几十年也不会变，人怎么能由小到大，到老呢？既然变了，又为什么能认出来呢？只能说，变化很小。变化小到什么程度呢？时间越短，变化越小。如果你盯着一个婴儿不停地看，你简直不可能说他在变。其实几年之后，他确实明显变大了。这变化是逐渐的、不间断的。

世界上的事物在不停地变化。尽管如此，我们仍能知道甲是甲，乙是乙，这是因为事物的变化大多是一点一点改变的，通常不会一下子突然变个样。这就给我们一种感觉：许多变化是连续的。

事物变化的连续性是我们的感觉，但感觉不一定都是正确的。电影实际上是由许多不同的画面构成的，它不是连续变化的。可是因为相继的两个画面相差甚微，我们便以为它是连续的了。直觉告诉我们，世界上许多事物的变化是真正连续的，不是像电影那样由微小的跃变所组成的。测量技术永远不可能证实这种直觉。事实上，如果物质由分子、原子组成，事物的成长是不可能连续进行的。不过，这并不妨碍我们形成“连续”的概念。我们可以想：时间的变化是连续的，运动是连续的。一个点从一条线段的这一端到达另一端，它应当经过线段上的所有点！

经过所有点又是什么意思呢？设线段长度是1，我们来考查运动的点与出发点的距离。在运动中，这个距离从0渐渐变为1。它经过线段上的所有点，就是这个距离的数值取遍0到1之间的一切数。

那么，0到1之间的一切数又是哪些数呢？当初，人们还不知道$\sqrt{2}$这种无理数，这一切数就指比0大比1小的分数。有了无理数，就麻烦了。在0与1之间有无穷多个无理数，像$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{3}$，$\frac{\sqrt{3}}{4}$，等等。是不是把这些带根号的怪物添上就够了呢？很难说。说不定什么时候又发现了新的无理数。

连续性的问题是自古以来哲学家们都谈论过的问题，它与无穷问题密切相

关。因为连续变化必然经过无穷个不同的阶段。毕达哥拉斯、芝诺、亚里士多德、莱布尼茨等学者都讨论过连续性问题。然而如何建立"连续性"概念，始终是摆在哲学家面前的难题。

这困难不可能在哲学中解决。因为它已转化为数学上的困难：在 0 与 1 之间，除了有理数之外究竟还有哪些数？更进一步，"全体实数"是哪些东西？

哲学对连续性的看法是说不清楚的。对于数学家与物理学家来说，在弄清实数是什么之前，对连续性的看法也是说不清的。

例如，亚里士多德认为，当两个互相接触的物体各自的端点成为两者的共同端点时，就会出现连续的连接。他不承认连续直线由无穷多点组成的说法。

伽利略反对亚里士多德的看法，认为连续的东西可以由无限个元素组成，好比一种可以研成极细粉末的固体。

莱布尼茨提出了"连续性定律"，认为世界上的一切东西都是连续变化的。他和牛顿大体上有相同的看法：数学上的连续性是用无穷小量来定义的一个理想概念。这个无穷小量，似乎类似于伽利略的"极细粉末"。

这里有一个困难：一粒粉末有没有体积？如果体积是 0，加起来岂不还是 0？如果体积不是 0，无穷粒粉末加起来体积又怎能有限呢？可能亚里士多德已经看到了这个困难，所以坚决反对直线(或物体)由无穷多个点组成的看法。但是，正如伽利略指出的那样，有穷个不可分的东西组成的东西，又怎能连续变化呢？

1.5 戴德金分割

直到 19 世纪末，即经过两千多年的探索之后，连续统的公认概念才出现，数学上严格的实数理论建立了。

戴德金与康托几乎同时提出了实数理论。这里按戴德金的方法陈述。

设想一条连续的直线，它由无穷多个点组成。取定原点和单位尺度，直线上的许多点都可以用分数表示。这是我们已经知道了的。我们又知道一些不能用分数表示的点，比如 $\sqrt{2}$ 代表的点。我们不知道的是，为了使直线是连续的、天衣无缝的，还需要添上些什么。

设想用一把锋利无比的刀，猛地砍向直线，会发生什么情况呢？

这一刀，应当砍在直线的某一点 P 上。不然，砍在空隙里，直线还能叫天衣无缝吗？于是，如此细的直线被斩为两截。问题是：点 P 在哪一段上呢？