21世纪应用型本科规划教材

微积分学习指导

主 编 韩立谋 尚海涛 周 勇
副主编 张 程 高晋芳 梁海峰

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

21 世纪应用型本科规划教材

微积分学习指导

主　编　韩立谋　尚海涛　周　勇

副主编　张　程　高晋芳　梁海峰

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书共十一章，内容包括：函数、极限与连续；导数与微分；微分学中值定理与导数的应用；不定积分；定积分；定积分的应用；空间解析几何与向量代数；多元函数微分法及其应用；重积分；无穷级数；微分方程。本书每章分为五个部分，帮助学生把握学习方向掌握重难点，从而更好地理解教材。每章的例题都配有详细的解答，部分例题选择了往年的研究生入学考试题或者数学竞赛题。每章后面的测试题也给出了答案，部分测试题给出了详细解答。

本书可作为学生微积分学习的辅导用书，也可作为老师备课和学生考研的参考教材。

图书在版编目（CIP）数据

微积分学习指导 / 韩立谋，尚海涛，周勇主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社，2017.8
21世纪应用型本科规划教材
ISBN 978-7-5170-5681-2

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①韩… ②尚… ③周… Ⅲ. ①微积分－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第173756号

书 名	21世纪应用型本科规划教材 **微积分学习指导** WEIJIFEN XUEXI ZHIDAO
作 者	主 编 韩立谋 尚海涛 周 勇 副主编 张 程 高晋芳 梁海峰
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038） 网址：www.waterpub.com.cn E－mail：sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）
经 售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	北京市密东印刷有限公司
规 格	184mm×260mm 16开本 9.25印张 220千字
版 次	2017年8月第1版 2017年8月第1次印刷
印 数	0001—2000册
定 价	**31.00**元

前言

QIANYAN

微积分是研究函数的微分、积分以及有关概念和应用的数学分支，在经济学的研究中有很大的作用。

本书旨在给初学者提供指导，使他们在学习中更有方向性，学得更轻松。学习时，精读本书有助于理解教材，把握重难点；阅读教材时，多联系本书内容小结，将前后所学知识串联起来，会理解得更加透彻。

本书每章的结构如下：

(1) 基本要求：将本章各节内容的学习要求列出来，帮助学生清晰地把握学习的方向和重难点。

(2) 知识结构：用图表的形式将本章的主要内容和逻辑结构直观地呈现出来，进一步明确学习的内容和方向。

(3) 内容小结：详细地将本章主要内容总结罗列出来，其中特别需要引起学生注意的地方备注为小结，帮助学生更好地理解教材。

(4) 例题解析：通过各章节涉及题型常用的解题思维模式和解题套路，覆盖本章所能用到的所有解题方法，帮助学生融会贯通。

(5) 测试题：检验学生对知识的掌握程度及运用所学知识解决问题、举一反三的能力。

本书由华东交通大学理工学院韩立谋、尚海涛、周勇任主编，张程、高晋芳、梁海峰任副主编。

由于编者水平有限及时间仓促，不妥之处在所难免。希望广大读者不吝批评、指正。

编者

2017 年 5 月

目录

MULU

前言

第一章　函数、极限与连续 …… 1
一、基本要求 …… 1
二、知识结构 …… 1
三、内容小结 …… 2
四、例题解析 …… 9
五、测试题 …… 15

第二章　导数与微分 …… 19
一、基本要求 …… 19
二、知识结构 …… 19
三、内容小结 …… 19
四、例题解析 …… 23
五、测试题 …… 29

第三章　微分学中值定理与导数的应用 …… 32
一、基本要求 …… 32
二、知识结构 …… 32
三、内容小结 …… 32
四、例题解析 …… 36
五、测试题 …… 41

第四章　不定积分 …… 44
一、基本要求 …… 44
二、知识结构 …… 44
三、内容小结 …… 44
四、例题解析 …… 48
五、测试题 …… 53

第五章　定积分 …… 55
一、基本要求 …… 55

二、知识结构 …… 55
三、内容小结 …… 55
四、例题解析 …… 59
五、测试题 …… 66
第六章 定积分的应用 …… 69
一、基本要求 …… 69
二、知识结构 …… 69
三、内容小结 …… 69
四、例题解析 …… 72
五、测试题 …… 75
第七章 空间解析几何与向量代数 …… 78
一、基本要求 …… 78
二、知识结构 …… 78
三、内容小结 …… 79
四、例题解析 …… 82
五、测试题 …… 85
第八章 多元函数微分法及其应用 …… 88
一、基本要求 …… 88
二、知识结构 …… 88
三、内容小结 …… 88
四、例题解析 …… 93
五、测试题 …… 98
第九章 重积分 …… 102
一、基本要求 …… 102
二、知识结构 …… 102
三、内容小结 …… 102
四、例题解析 …… 107
五、测试题 …… 112
第十章 无穷级数 …… 115
一、基本要求 …… 115
二、知识结构 …… 115
三、内容小结 …… 115
四、例题解析 …… 120
五、测试题 …… 123
第十一章 微分方程 …… 128
一、基本要求 …… 128

二、知识结构 …… 128
三、内容小结 …… 128
四、例题解析 …… 132
五、测试题 …… 138
参考文献 …… 140

第一章　函数、极限与连续

一、基本要求

（1）理解集合及其运算，理解邻域的概念.

（2）理解函数的定义以及函数的三种表达方式；会求函数的定义域、表达式及函数值. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性；理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念；掌握基本初等函数的性质和图形，理解初等函数的定义.

（3）理解数列极限和函数极限的定义；掌握数列和函数极限的性质.

（4）理解无穷小与无穷大的概念.

（5）掌握极限运算法则.

（6）掌握两个极限存在准则以及两个重要极限，并会加以运用.

（7）掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.

（8）理解函数连续的定义（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型.

（9）了解连续函数和、差、积、商的连续性和初等函数的连续性.

（10）了解闭区间上连续函数的性质.

二、知识结构

- 函数、极限与连续
  - 函数
    - 函数定义
      - 集合及其运算，映射
      - 函数的表达方式
      - 函数的定义域、值域
    - 函数的性质：单调性、奇偶性、有界性、周期性
    - 复合函数和反函数
    - 基本初等函数和初等函数
  - 极限与连续
    - 函数的极限
      - 极限的定义
        - 数列的极限
        - 函数的极限
      - 极限的性质
      - 无穷小与无穷大
        - 定义
        - 无穷小与无穷大之间的关系
        - 无穷小的比较，等价无穷小
      - 极限的运算法则及计算
      - 极限存在准则及其应用
      - 两个重要极限及其应用
    - 函数的连续性
      - 连续的定义
      - 间断点的类型
      - 连续函数的运算及初等函数的连续性
      - 闭区间上连续函数的性质

三、内容小结

（一）函数的一些基本概念

（1）集合（简称集）是指具有某种特定性质的事物的全体，组成这个集合的事物称为该集合的元素（简称元）.

（2）以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$. 设 δ 是任一正数，则开区间 $(a-\delta,\ a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域，这个邻域称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即 $U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$. 其中点 a 称为这个邻域的中心，δ 称为这个邻域的半径.

（3）设 X，Y 是两个非空集合，对 X 中的任意一个元素 x，存在一个法则 f，使得按照法则 f，在 Y 中都有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作

$$f: X\to Y$$

其中 y 称为元素 x（在映射 f 下）的像，并记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$，而元素 x 称为元素 y（在映射 f 下）的一个原像，集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 D_f，即 $D_f=X$；X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域，记作 R_f 或 $f(X)$，即

$$R_f=f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$$

注意：映射存在一对一和多对一两种情况. 在不同的数学分支中，映射有不同的惯用名称.

（4）设数集 $D\subset R$，则称映射 f：$D\to R$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为

$$y=f(x),x\in D$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$.

注意：函数是从实数集到实数集的映射. 函数的两个基本要素：定义域和对应法则.

（5）表示函数的方法主要有三种：公式法、表格法和图形法.

（二）函数的性质

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\in D$，若存在正数 M，对任意 $x\in I$，使得 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 上有界，否则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\in D$，对任意的 x_1、$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加；若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调减少. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，对任意 $x\in D$，若 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为奇函数.

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在正数 T，使得对任意 $x\in D$，有 $(x\pm T)\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常说的周期是指最小正周期.

(三) 复合函数与反函数

1. 复合函数

设函数 $y=f(u)(u\in D_f)$ 和函数 $u=\varphi(x)(x\in D)$，若 $\varphi(D)\subset D_f$，则称 $y=f[\varphi(x)]$为 x 的复合函数，记为

$$(f\circ\varphi)(x)=f[\varphi(x)]$$

其中 x 称为自变量，u 称为中间变量，y 称为因变量，定义域为 D.

注意："复合"是由简单函数构造复杂函数的一种重要方法. 在讨论函数的性质时，往往是先将复杂函数分解为简单函数，再讨论简单函数的相应性质，最后讨论"复合"的复杂函数的有关性质.

2. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 遍取区间 $I_x\subset D_f$ 时，其对应的函数值的集合为 I_y，若对任意 $y\in I_y$，有唯一的 $x\in I_x$，使 $f(x)=y$，则在 I_y 上确定了一个函数 $x=\varphi(y)$，$y\in I_y$，$x=\varphi(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数.

由定义可知，如果 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，则 $y=f(x)$ 也是 $x=\varphi(y)$ 的反函数，即 $x=\varphi(y)$ 与 $y=f(x)$ 互为反函数.

注意：首先，并不是每一个函数都有反函数；其次，函数单调是存在反函数的充分条件而不是必要条件，即一个非单调函数也可能存在反函数.

3. 其他

由于函数的定义中并没有限制对应关系用何种形式来表达，通常情况下函数解析法的表达形式有如下几种：

(1) 显函数：把因变量 y 用含有自变量 x 的解析式 $y=f(x)$ 直接表示出来的函数，称为显函数.

(2) 隐函数：自变量 x 与因变量 y 之间的对应法则由二元方程 $f(x,y)=0$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 称为隐函数.

(3) 分段函数：如果函数在其定义域的不同部分，对应法则由不同的解析式表达，则称这种函数为分段函数.

(4) 参数方程确定的函数：如果变量 x 与变量 y 之间的对应法则由参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$$

所确定，则称这种函数为参数方程确定的函数，或称为参数式函数. 式中 t 为参数.

(四) 基本初等函数和初等函数

1. 基本初等函数

(1) 常数函数：$y=c$.

(2) 幂函数：$y=x^\mu$(μ 为实数).

(3) 指数函数：$y=a^x(a>0,a\neq1)$.

(4) 对数函数：$y=\log_a x(a>0,a\neq1)$.

(5) 三角函数：

$y=\sin x$(正弦函数)　$y=\cos x$(余弦函数)

$y=\tan x$（正切函数）　$y=\cot x$（余切函数）

$y=\sec x$（正割函数）　$y=\csc x$（余割函数）

(6) 反三角函数：

$y=\arcsin x, x\in[-1,1], y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$y=\arccos x, x\in[-1,1], y\in[0,\pi]$

$y=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty), y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$y=\operatorname{arccot} x, x\in(-\infty,+\infty), y\in(0,\pi)$

2. 初等函数

六类基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可以用一个式子表示的函数，称为初等函数.

注意：微积分中所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

(五) 极限的定义

1. 数列的极限

按照一定的顺序排列起来的一组数 x_1，x_2，…，x_n，…称为数列，记作 $\{x_n\}$. 数列中的每一个数称为数列的项，第 n 项称为数列的通项.

设 $\{x_n\}$ 为一数列，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（ε 可以任意小），总存在正整数 N，当 $n>N$ 时，不等式

$$|x_n-A|<\varepsilon$$

恒成立，那么就称常数 A 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，或 $x_n\to A(n\to\infty)$.

如果这样的 A 不存在，则称该数列的极限不存在或者该数列发散.

注意：如果让数列中的元素与实数轴上的点一一对应，那么若某个数列存在极限，这表示当 n 足够大时，落在区间 $(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$ 内的点有无穷多个.

2. 函数的极限

(1) 自变量趋于有限值时函数的极限.

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（ε 可以任意小），总存在正数 δ，使得当 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

那么常数 A 就称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0)$$

如果这样的 A 不存在，则称该函数在该点的极限不存在.

(2) 自变量趋于无穷大时函数的极限.

函数 $f(x)$ 在 $|x|$ 大于某一正数时有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（ε 可以任意小），总存在正数 X，使得当 x 满足 $|x|>X$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

那么常数 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty)$$

(3) 单侧极限.

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ε（ε 可以任意小），总存在正数 δ，使得当 x 满足 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

那么常数 A 就称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^-)=A$$

注意：类似可定义自变量趋于正无穷大、负无穷大时函数的极限和左右极限.

把数列也看成函数，那么共有 7 种基本极限类型：

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$

(六) 极限的性质

1. 数列极限的性质

(1) 极限的唯一性.

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，则其极限唯一.

(2) 收敛数列的有界性.

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，则其必定有界. 即存在 $M>0$，使得 $|x_n|\leqslant M$，$\forall n\in N$.

注意：如果数列 $\{x_n\}$ 无界，则其必发散.

(3) 收敛数列的保号性.

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 且 $A>0$（或 $A<0$），那么存在正整数 N，当 $n>N$ 时，都有 $x_n>0$（或 $x_n<0$）.

推论 1 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$ 且 $x_n\geqslant y_n$，则 $A\geqslant B$.

推论 2 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A>B$（或 $A<B$），则当 n 充分大时，有 $x_n>B$（或 $x_n<B$）. 特别地，若 $B=0$，则当 n 充分大时，有 $x_n>0$（或 $x_n<0$）.

(4) 收敛数列与其子数列的关系.

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，那么它的任一子列也收敛，且极限也是 A.

2. 函数极限的性质

为简单明确起见，仅就 $x\to x_0$ 的情形叙述. 其他五种极限形式也有相应的性质.

(1) 函数极限的唯一性.

如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则其极限唯一.

(2) 函数极限的局部有界性.

如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则在点 x_0 的附近，函数 $f(x)$ 有界.

(3) 函数极限的局部保号性.

如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，且$A>B$，则在点$x_0$的附近，有$f(x)>g(x)$. 则它的逆否命题为：如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，且在点$x_0$的附近，有$f(x)\leqslant g(x)$，则$A\leqslant B$.

特别地，如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>B$（或$A<B$），则在点$x_0$的附近，有$f(x)>B$［或$f(x)<B$］. 若$B=0$，则在点$x_0$的附近，有$f(x)>0$［或$f(x)<0$］.

(4) 函数极限与数列极限的关系.

如果极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，$\{x_n\}$为函数$f(x)$的定义域内任一收敛于$x_0$的数列，且满足$x_n\neq x_0(n\in N^+)$，那么相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$必收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

注意：有些教材把该性质称为海涅定理或者归结原则，意义在于把函数极限归结为数列极限问题来处理.

（七）无穷小与无穷大

1. 定义

(1) 当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时，若$f(x)\to 0$，则称$f(x)$为$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的无穷小.

(2) 对于任意$M>0$，存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，若$|f(x)|>M$恒成立，则称当$x\to x_0$时，$f(x)$为$x\to x_0$时的无穷大.

同样的方法，可以定义$x\to\infty$时的无穷大.

2. 无穷小的比较

在同一变化过程中，设$\alpha\to 0$，$\beta\to 0$.

(1) 若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称$\beta$相对于$\alpha$是高阶无穷小，记为$\beta=o(\alpha)$.

(2) 若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称$\beta$相对于$\alpha$是低阶无穷小.

(3) 若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，则称$\beta$与$\alpha$是同阶无穷小.

(4) 若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0$，则称$\beta$是关于$\alpha$的$k$阶无穷小.

(5) 若$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称$\beta$与$\alpha$是等价无穷小，记为$\alpha\sim\beta$.

3. 等价无穷小的替换原理

在同一变换过程中，设$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且$\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$存在，则$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

在利用等价无穷小求函数极限的时候，常见的一些等价无穷小有：

$x\to 0$时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$.

（八）极限的运算法则及计算

如果$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，那么：

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$.

(2) $\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\lim g(x)=AB$.

(3) 若又有 $B\neq0$，则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$.

(4) 特别地：如果 $\lim f(x)$ 存在，而 c 为常数，则 $\lim[cf(x)]=c\lim f(x)$；

如果 $\lim f(x)$ 存在，而 n 是正整数，则 $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$.

注意：上述极限包括极限的 7 种类型，前提条件是极限存在.

(九) 极限的存在法则及应用

1. 夹逼准则

如果数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件：

Ⅰ. $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,3,\cdots)$.

Ⅱ. $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$.

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

注意：夹逼准则也适用于函数.

2. 单调有界准则

单调有界数列必有极限.

(十) 两个重要极限及应用

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ (1^∞型)

(十一) 函数连续的定义

(1) 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续．若 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y\neq0$，则称该函数在这点不连续.

(2) 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续.

(3) 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处有 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 左连续；设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处有 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 右连续．当 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$时，称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

注意：函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的三种定义形式不同，但其实质是相同的，互相之间是等价的.

(十二) 间断点的类型

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则称 x_0 是 $f(x)$ 的间断点.

(1) 若 $f(x)$ 在点 x_0 处的左右极限都存在，那么 x_0 称为函数 $f(x)$ 的第一类间断

点．第一类间断点包含以下两种：

1）可去间断点：$f(x)$ 在点 x_0 处的左右极限都存在且相等．

2）跳跃间断点：$f(x)$ 在点 x_0 处的左右极限都存在但不相等，发生了跳跃．

（2）若 $f(x)$ 在点 x_0 处的左右极限至少有一个不存在，那么 x_0 称为函数 $f(x)$ 的第二类间断点．第二类间断点有以下几种类型：

1）无穷间断点：$f(x)$ 在点 x_0 处的极限不存在且趋向于∞，例如：$x=\frac{\pi}{2}$就是$y=\tan x$的无穷间断点．

2）震荡间断点：当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的函数值在 a 和 b 之间变动无数多次，其中$a\neq b$．

（十三）连续函数的运算及初等函数的连续性

1．连续函数的和、差、积、商的连续性

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 处连续，则它们的和（差）$f\pm g$、积 fg 及商 $\frac{f}{g}$ ［当 $g(x_0)\neq 0$ 时］都在点 x_0 连续．

2．反函数的连续性

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加（或单调减少）且连续，那么它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也在对应的区间 $I_y=\{y\mid y=f(x),x\in I_x\}$ 上单调增加（或单调减少）且连续．

3．复合函数的连续性

函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=g(x)$ 复合而成，$U(x_0)\subset D_{f\circ g}$．若函数 $u=g(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，且 $g(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 连续，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在 $x=x_0$ 也连续．

4．初等函数的连续性

首先，基本初等函数在其定义域内都是连续的．根据初等函数的定义，一切初等函数在其定义区间内都是连续的．

（十四）闭区间上连续函数的性质

1．最值性

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必能取得最小值 m 和最大值 M，即在 $[a,b]$ 上至少存在两点 ξ_1 和 ξ_2，使得 $f(\xi_1)=M$，$f(\xi_2)=m$．

2．有界性

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界．

3．介值性

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=A$，$f(b)=B(A\neq B)$，则对介于 A 和 B 之间的任何一个数 C，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=C$．

注意：实际上，闭区间上连续函数必能取得介于最大值与最小值之间的任何值．

4．零点存在定理

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$，ξ 称为 $f(x)$ 的零点．

四、例题解析

【例 1-1】　下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同？

(1) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$，$g(x)=\dfrac{1}{x+1}$；

(2) $f(x)=\sqrt{(1-x)^2}$，$g(x)=1-x$；

(3) $f(x)=x$，$g(x)=\ln e^x$.

解　(1) $f(x)$ 的定义域为 $x\neq\pm1$，$g(x)$ 的定义域为 $x\neq-1$，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是相同的函数.

(2) $f(x)=\sqrt{(1-x)^2}=|1-x|$，所以当 $x>1$ 时，$f(x)\neq g(x)$，即 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应法则不相同，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是相同的函数.

(3) 对 $\forall x$，$\ln e^x=x$，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域相同且对应法则也相同，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是相同的函数.

【例 1-2】　求函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}+\arcsin\dfrac{1}{x+1}$ 的定义域.

解　依题意有 $\begin{cases}1-x^2\neq0\\ x+1\neq0\\ \left|\dfrac{1}{x+1}\right|\leqslant1\end{cases}$，即 $\begin{cases}x\neq\pm1\\ x\neq-1\\ x\leqslant-2\text{ 或 }x\geqslant0\end{cases}$，解得 $x\leqslant-2$ 或 $0\leqslant x<1$ 或 $x>1$，

所以函数的定义域为 $(-\infty,-2]\cup[0,1)\cup(1,+\infty)$.

【例 1-3】　设 $f(x+1)=x^2+x+3$，求 $f(x)$.

分析：首先，我们把 $f(x+1)$ 看作一个整体，用拼凑法将等式右边改写成 $(x+1)$ 的函数关系式，再换元写出函数的表达式.

解法一　$f(x+1)=(x+1)^2-(x+1)+3$，则 $f(x)=x^2-x+3$.

解法二　令 $\mu=x+1$，则 $x=\mu-1$，代入得

$$f(\mu)=(\mu-1)^2+(\mu-1)+3=\mu^2-\mu+3$$

所以 $f(x)=x^2-x+3$.

【例 1-4】　求下列函数的反函数：

(1) $y=1+\log_4 x$；(2) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

解　(1) $\log_4 x=y-1$，$x=4^{y-1}=\dfrac{1}{4}\times4^y$，$y\in R$.

则反函数为 $y=\dfrac{1}{4}\times4^x$，$x\in(0,1)$.

(2) $y2^x+y=2^x$，$2^x=\dfrac{y}{1-y}$，$x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$，$y\in(0,1)$.

则反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$，$x\in(0,1)$.

【例 1-5】　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2}-\dfrac{n}{3}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2}-\frac{n}{3}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^2}-\frac{n}{3}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)(2n+1)-2n}{6}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+1+\frac{1}{n}}{6}=\frac{1}{2}$$

【例 1-6】 已知 $a>0$，$x_1>0$，定义 $x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(3x_n+\frac{a}{x_n^{\ 3}}\right)(n=1,2,3,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$ 存在，并求其值.

证 第一步，先证数列 $\{x_n\}$ 的极限存在.

当 $n\geqslant 2$ 时，$x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(x_n+x_n+x_n+\frac{a}{x_n^{\ 3}}\right)\geqslant\sqrt[4]{x_nx_nx_n\,\frac{a}{x_n^{\ 3}}}=\sqrt[4]{a}$，因此数列 $\{x_n\}$ 有下界.

又 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{4}\left(3+\frac{a}{x_n^{\ 4}}\right)\leqslant\frac{1}{4}\left(3+\frac{a}{a}\right)=1$，即 $x_{n+1}\leqslant x_n$，所以 $\{x_n\}$ 单调递减. 由极限存在准则知，数列 $\{x_n\}$ 有极限.

第二步，求数列 $\{x_n\}$ 的极限.

设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A$，则有 $A\geqslant\sqrt[4]{a}>0$.

由 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{n+1}=\frac{1}{4}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3x_n+\frac{a}{x_n^{\ 3}}\right)$，得 $A=\frac{1}{4}\left(3A+\frac{a}{A^3}\right)$，解得 $A=\sqrt[4]{a}$（舍掉负根），即 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\sqrt[4]{a}$.

【例 1-7】 求极限 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$，其中 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant1\\2-x, & x>1\end{cases}$.

解 由于 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x^2=1$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(2-x)=1$，则 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$.

【例 1-8】 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$.

分析：所求代数式属 $\frac{0}{0}$ 型，且分子带根号，则先进行有理化，再求出极限.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{\sin x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{\sin x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1.$$

【例 1-9】 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，其中 a 和 b 为常数，求 a、b.

分析：

(1) 综合利用函数表达式的特点及极限 $x\to\infty$ 时的性质求解.

(2) 此题实质上是求相应曲线的渐近线问题，a、b 可以直接带公式求得.