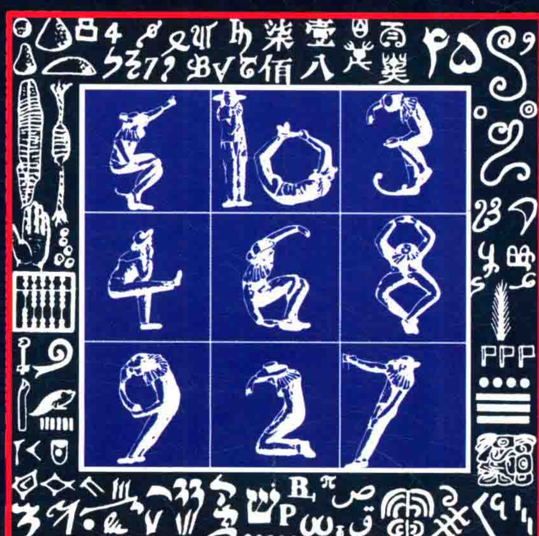
奥数最佳实战题

（上卷）

舒五昌　唐 淳　田廷彦　编著

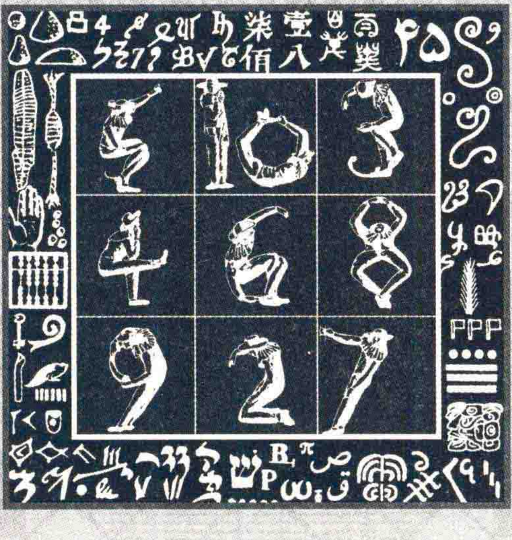


哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

奥数最佳实战题

（上卷）

舒五昌　唐 淳　田廷彦　编著



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书共分 3 章. 第 1 章为最佳实战题,共包括 40 道题;第 2 章为代数不等式六讲;第 3 章为重要的定理、结论与方法.

本书适合准备参加奥林匹克数学竞赛的学生及数学爱好者阅读使用.

图书在版编目(CIP)数据

奥数最佳实战题. 上卷/舒五昌,唐淳,田廷彦编著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2017.6

ISBN 978 - 7 - 5603 - 6411 - 7

Ⅰ. ①奥… Ⅱ. ①舒… ②唐… ③田… Ⅲ. ①数学 - 竞赛题 - 题解 Ⅳ. ①O1 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 000824 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 李 欣
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451 - 86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm × 1092mm 1/16 印张 14 字数 337 千字
版 次 2017 年 6 月第 1 版 2017 年 6 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 6411 - 7
定 价 38.00 元

前言

首先说说书名的由来.凡是关注过2010年上海世博会的读者不难猜到,这是模仿"城市最佳实践区"的说法.这样提还是比较上口的.作者分工如下:"最佳实战题"是舒五昌教授写的;"代数不等式六讲"是唐淳写的;后面的章节均由我整理.

本书写作经历了较长时间.唐淳是一个兴趣广泛、思路清晰、颇有见地也十分勤勉的学生,曾获全国高中数学联赛一等奖,之后去了浙江大学丘成桐数学班,如今已毕业.我一直记得和他一起钻研数学的美好时光.如今许多学生学而不思,"民科"则思而不学;唐同学是学而思,思而乐,这有助于自己不断进步.本书中,唐同学撰写的不等式讲座包含了不少心得体会,此外还有十余本笔记,记录了他认为比较典型或精彩的赛题.笔者整理这些笔记花费了较多时间,除了输入,主要是查错、比对,并删去一些重复或常见的习题.特别值得一提的是,笔者无意于凑数,但结果恰巧就是500道训练题!真是太神奇了!

另一位作者,复旦大学数学系的舒五昌教授是我十分敬仰的一位资深奥数教练.尽管在读中学时,他给我上课不多,仅仅是在上海中学理科班的几个月中,每周最多来一次,下午上半天课,但他却是给我印象最深的.一个老师的魅力究竟有多大,学生是最权威的评判者.好的老师除了口才外,必定要对自己的学科有感情和见解,决不能照本宣科.舒教授就是一位上课时非常陶醉于数学的人.他每次讲题不多,但都很有吸引力,使我们情不自禁地苦思冥想,然而大多数题还是做不出,只好仔细听他讲解,最后恍然大悟、拍案叫绝.只要舒教授出现在课堂里,"见证奇迹的时刻"就要到来,凡是听过他的课的人都感同身受.记得在上海中学,仅仅有一次他迟到了,原因是在公交车上思考数学题,结果发现车子坐反方向了;还有一次是中午,他跟我们几个学生大谈非欧几何,只买了个面包,结果也没吃,直接放进口袋.学生间流传着很多关于他的有趣故事,在学生眼里他是一位骑老坦克的快乐活神仙.

多年来,我一直希望自己能与舒教授有合作.当他终于答应写点东西的时候,我觉得十分荣幸.在他家里,舒教授一如既往地大谈数学,滔滔不绝.我相信不管面对谁,他谈起数学来都是那个样子,只要对方愿意听下去.舒教授的家有点乱,要在桌子上找一个东西也要花点时间.我相信他懒得整理,而把所有心思都花在解题上.

如今,我一想起他的家,就会联想到热力学第二定律:用家里的混乱为代价,获得了最高程度的秩序——数学推理过程和技巧.据说爱因斯坦家里也是这副样子(确实有同学将舒教授比喻成爱因斯坦).

本来这本书还应有一位作者,那就是1986年我国首位获得IMO金牌的张浩老师,他获得过复旦大学数学系的博士学位.我也很希望能与他一起合作.他已在合同上签字,不过后来我有打过两次电话,他都说自己身体不太好推掉了.我不好强求,只是感到遗憾.不久之后的2014年3月1日,他因病突然去世,年仅46岁.两天后叶中豪兄告诉我这一消息,我感到十分震惊和痛惜.几个月后,同样是中豪兄告诉我著名数学家肖刚患癌去世(6月27日),年仅63岁.他曾是单墫教授的同学,李克正说他是天赋极高的人,学习外语一天能背出一两千个单词,英语、法语均在几个月内基本搞定,花几天时间自学就能做出电视机和照相机.肖刚在艰深的复代数几何领域是国际上响当当的大牌,他的论文发表在头号杂志《数学年刊》上,那是怀尔斯发表费马大定理证明的杂志.我和中豪采访过肖刚,看上去挺粗大强壮的一个人.然而,肖刚在功成名就之后做出了一个较为惊人的决定,他似乎看透了什么,投身科技产业了,说白了就是赚钱去了.类似的例子还有周炜良和詹姆斯·西蒙斯,当然,这两位最后回归了数学[数学大神格罗滕迪克(去世于11月13日,又是一个2014年去世的数学牛人)和佩雷尔曼则选择了隐居,有一个非常有意思的观点认为:愿意做数学做到死的人,往往是搞数论或几何的].对于在学术上成就巨大、维持生计不成问题的人毅然投身过去曾被认为是"铜臭的勾当",必然有着深思熟虑,事实上与人的"深度"合作(从事商业、政治乃至谈恋爱),往往不比搞数学来得容易;而且人的能力、兴趣和价值观也并不能简单地一一对应.无论如何,眼看肖刚这么强大的头脑在瞬间归零,总是令我十分震惊,也为生命的脆弱而感慨.

张浩的经历也十分类似,原来也"下过海",后来决心放弃了.据他所说,做数学固然辛苦,但经商压力无疑大得多,我听了频频点头(我不想拿别人的价值观来比较,我是有题可做、有书可看就满足了,也许是逃避现实吧).这些年来,我和张浩时有接触,见过十余次面.他的身体是不好,饭量极小,往往只吃上一两口,但烟酒不断.尽管如此,我也决想不到他的身体会这样差,以至于英年早逝.张浩是一个十分平易近人的人,作为一个奥数老师,他花了很多时间去研究解题(可能对他身体也有影响)并从中获得了快乐,对学生也十分关心,尤其欣赏优秀的学生.张浩跟我讲过不少故事,比如他参赛时陶哲轩就在他身旁.他说陶哲轩那时只有11岁,不太懂事,做了几个题,其他的题就不想做了,想找他玩.张浩就对陶哲轩说:"等我写完就陪你玩."那年陶哲轩得了铜牌,翌年得了银牌,1988年13岁时得了金牌,据说这是一个迄今无人打破的纪录.张浩说,如果陶哲轩当时不贪玩,11岁就可能拿到金牌.陶哲轩现在当然已功成名就,大红大紫.无论名气大小,舒教授、陶哲轩或张浩有一点是很相像的,那就是他们的血液里流淌着数学,在他们身上看不到拜金的东西,也没有那种喜欢说三道四的小市民气乃至盛气凌人的某些官二代富二代腔.这就是具有高度忘我精神的

数学人！

在张浩去世大约 1 个月，得知高继扬同学入选 2014 年 IMO 国家队. 高同学是张浩最喜欢的学生，他经常跟我说起，说其他学生跟高同学不在一个档次（张浩跟我说过的数学高手主要就是两人——陶哲轩和高继扬）. 有一次我跟张浩说了一道未解决的问题：平面上任作 $n(\geq 4)$ 条直线，既无平行，也无三线共点，它们将全平面分成的互不重叠的区域中，至少有 $n-2$ 个三角形. 此题曾经征解过，但答案都是错误的. 其实，三角形数的一个有效的上界已经由 B. Grünbaum 和 R. Canham 得到，很难想象他们或别人不去研究有效的下界，或许此题在高等数学研究中已被数学家解决，但在奥数领域中从未见到，想必是道大难题（需要指出的是，几何学是传统数学的一部分，很细腻，所以搞到立体几何就做不下去了，因为太难太复杂了；后来的高维空间由拓扑学处理，拓扑学是现代数学的一部分，颇具后现代主义风格，比较粗糙. 近年来佩雷尔曼用几何分析的方法解决庞加莱猜想，说明拓扑学的不足，以及细腻的传统方法的力量和回归. 菲尔兹奖近年来也频频青睐传统数学. 传统与现代的结合，必将导致数学更加深邃、精妙、庞杂，组合几何也算是一个介于传统和现代之间的学科吧）. 张老师很有心地把这道题告诉了高同学，那时高同学只是个初中生. 后来两次见到张老师，他都把高同学的很有见地的一种方法拿给我讨论，尽管最终还是没能解决，但高同学已留给我较深的印象. 因为一般的学生不会如此执着，也不会有什么见地. 我至今未见过高同学，年仅 16 岁的他获得了 2014 年第 55 届 IMO 金牌，且是中国队唯一的满分，前途可谓无量！张老师若是有知，也会高兴的.

谨以此书作为对张浩老师的纪念.

田廷彦

2016 年 6 月

⊙目录

第 1 章　最佳实战题　//1

第 2 章　代数不等式六讲　//52

第 3 章　重要的定理、结论与方法　//109

第1章　最佳实战题

1. $S=\{1,2,\cdots,n\}$，$A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是 S 的子集，其中不会有一个集是另一个集的子集. 求这样一批子集的个数 k 的最大值.

解　这样一批子集的个数最大值为 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$. $\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有 $[\frac{n}{2}]$ 元子集满足要求.

因此，只要证明当 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一批子集 $A_1,A_2,\cdots,A_k$，没有一个是另一个的子集时，$k\leqslant C_n^{[\frac{n}{2}]}$. 为此，先证明下面的引理.

引理　设 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的不同的 l 元子集，$l>[\frac{n}{2}]$. 则必有 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的不同的 $l-1$ 元子集 $B_1,B_2,\cdots,B_k$ 满足：每个 B_i 是某个 A_j 的子集.

记 $\mathscr{L}_i=\{B\mid B$ 是 A_i 的 $l-1$ 元子集$\}$ $(i=1,2,\cdots,k)$. 由于 A_i 是 l 元集，所以 $|\mathscr{L}_i|=l$. 因此，$\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2,\cdots,\mathscr{L}_k$ 中的集共有 kl 个，而对于每个 $l-1$ 元集 B，包含 B 的 l 元集有 $n-l+1$ 个. 由于 $l>[\frac{n}{2}]$，所以 $n-l+1\leqslant l$，即这 kl 个集中至少有 k 个不同的集，即 $|\mathscr{L}_1\cup\mathscr{L}_2\cup\cdots\cup\mathscr{L}_k|\geqslant k$. 在 $\mathscr{L}_1\cup\mathscr{L}_2\cup\cdots\cup\mathscr{L}_k$ 中任取 k 个不同的集 $B_1,B_2,\cdots,B_k$ 就符合要求. 引理证毕.

现设 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集，且没有一个是另一个的子集.

不妨设 $|A_1|\geqslant|A_2|\geqslant\cdots\geqslant|A_k|$，若 $|A_1|=l>[\frac{n}{2}]$，且 $A_1,\cdots,A_m$ 都是 l 元集（$|A_{m+1}|<l$）. 由引理知，有 $l-1$ 元子集 $B_1,\cdots,B_m$，它们中每个集都是某个 $A_j(1\leqslant j\leqslant m)$ 的子集.

于是，$B_1,B_2,\cdots,B_m,A_{m+1},A_{m+2},\cdots,A_k$ 这个子集中，依旧没有一个是另一个的子集.

$B_1,\cdots,B_m$ 是不同的 $l-1$ 元集，不会有一个是另一个的子集. $A_{m+1},A_{m+2},\cdots,A_k$ 中没有一个是另一个的子集. 而后面的集不会是前面的集的子集，因为 $B_1,\cdots,B_m$ 都是 $A_1,\cdots,A_m$ 中某一个的子集. 前面的集也不会是后面的集的子集，因为 $|B_i|\geqslant|A_j|$ $(i=1,2,\cdots,m,j=m+1,m+2,\cdots,k)$. $B_i\supset A_j$，即 $B_i=A_j$. 如果 $|B_1|=l-1$ 仍使 $l-1>[\frac{n}{2}]$，而这些集中 $l-1$ 元集有 m_1 个，由引理可把这 m_1 个都换掉. 这样最后可得到 k 个集 $D_1,D_2,\cdots,D_k$，依旧没有一

心得 体会 拓广 疑问

个集是另一个集的子集,$[\frac{n}{2}]\geqslant|D_1|\geqslant|D_2|\geqslant\cdots\geqslant|D_k|$,再取这 k 个集的补集,即 $\{1,2,\cdots,n\}\setminus D_i(i=1,2,\cdots,k)$. 于是,这 k 个集的补集(D_i 的补集记为 E_i)$E_k,E_{k-1},\cdots,E_1$ 使 $|E_k|\geqslant|E_{k-1}|\geqslant\cdots\geqslant|E_1|\geqslant[\frac{n}{2}]$,且依旧满足条件(没有一个是另一个的子集)重复上一过程. 最后将得到 k 个不同的 $[\frac{n}{2}]$ 元集. 因为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的 $[\frac{n}{2}]$ 元子集有 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$ 个,所以 $k<C_n^{[\frac{n}{2}]}$.

注 本题的结论称为斯潘诺定理. 主要是证明 $k\leqslant C_n^{[\frac{n}{2}]}$,这里用了比较直接的证法,一般是用 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的排列数为 $n!$,及对每个集作出了一个排列所成的子集来证明的,是比较巧妙的做法. 但这里的直接做法也是不容易想到的.

2. 求最小的有下面性质的正整数 n:把集 $\{1,2,\cdots,n\}$ 任意分成两个集 A,B 时,总有一个集中有两个不同的数 a,b,使得 $a+b$ 是一个正整数的立方.

解 本题的最小 n 为 124.

为方便起见,若 $\{1,2,\cdots,n\}$ 任意分成两个集时,总存在一个集中有两个不同的数 a,b,使 $a+b$ 是立方数,就说 n 具有性质 P. 反之,如果 $\{1,2,\cdots,n\}$ 可以分成两个集,且每个集中都不会有两个不同的数,它们的和是立方数,就说 n 存在性质 $\overline{P}$. 若 n_0 有性质 P,显然不小于 n_0 的数都有性质 P.

本题要求最小的具有性质 P 的 n,相当于求具有性质 $\overline{P}$ 的最大正整数.

如果 k 具有性质 $\overline{P}$,即 $\{1,2,\cdots,k\}$ 可以分成两个集 A,B,每个集中不会有两个不同的数,它们的和是立方数,那么在考虑集 $\{1,2,\cdots,k+1\}$ 时,要看在 $\{1,2,\cdots,k\}$ 中与 $k+1$ 的和是立方数的数的个数. 当这样的数没有时,把 $k+1$ 放在 A 或 B 中都可以,当这样的数只有一个时,只要把 $k+1$ 放在另一个集中即可. 这时,$k+1$ 也具有性质 $\overline{P}$. 由此可见,62 有性质 $\overline{P}$,而 63 是第一个(最小的)这样的数:比它小而与它的和是立方数的数有两个:1 及 62. 由于 62 与 2 不在同一集中,只要 1 与 2 不在同一集中,1 与 62 就在同一集中,可见 63 有性质 $\overline{P}$. 这样可知 108 有性质 $\overline{P}$. 接下来的 109,110,…,124 都是"有问题"的数(如果 124 有性质 $\overline{P}$,可得 171 有性质 $\overline{P}$).

下证 124 有性质 P. 用反证法,若 124 有性质 $\overline{P}$,即 $\{1,2,\cdots,$

$124\}$可以分成两个集A,B，且每个集中不会有两个不同的数a,b，它们的和是立方数，那么：

(1)两个不同的、和为34的数不会在同一个集中，因为如果$a\neq b,a+b=34,a,b\in A$，于是$125-a\in B,125-b\in B$，而$(125-a)+(125-b)=250-(a+b)=216=6^3$；

(2)两个不同的、和为20的数不会在同一个集中，因为若$c\neq d,c+d=20,c,d\in A$，于是$27-c\in B,27-d\in B$，且$(27-c)+(27-d)=54-(c+d)=34$与(1)矛盾；

(3)两个不同的、和为6的数不会在同一个集中，因为如果$e\neq f,e+f=6,e,f\in A$，则$20-e\in B,20-f\in B$，且$(20-e)+(20-f)=40-(e+f)=34$与(1)矛盾；

(4)两个不同的、和为4的数(也就是1与3)不会在同一个集中. 若$1,3\in A$，则由(1)知，$33,31\in B$，但$33+31=64=4^3$.

由此，124有性质P. 若124有性质$\overline{P}$，$\{1,2,\cdots,124\}$可分成两个集A,B，每个集中不会存在两个不同的数，它们的和是立方数. 不妨设$1\in A$，由(4)知$3\in B$，由(3)知$5\in B$，而$3+5=8=2^3$. 矛盾!

最后，说明123有性质$\overline{P}$. 为此，只要把$\{1,2,\cdots,32\}$分成两个集A,B，使得1,2不在同一集中，每个集中不会有两个不同的数、和为立方数及34即可(这时，109，110，…，123都可以适当地放在一个集中).

A：1 3 4 6 8 10 11 13 15 18 20 22 25 27 29 32

B：2 5 7 9 12 14 16 17 19 21 23 24 26 28 30 31

3. 在一个圆周上有2 000个点，每个点都染上一种颜色，共有五种颜色可用. 满足：任何连着的25个点中，五种颜色的点都有. 求最小的有下面性质的n：对于满足条件的染色法，必有连着的n个点，其中五种颜色的点都有.

解 所求的最小n为19.

先证19有所要求的性质. 用反证法，若结论不对，则对任何连着的19个点，都不会五种颜色的点都有. 任取连着的19个点，不妨设按顺时针方向依次为$P_1,P_2,\cdots,P_{19}$(按此次序下面的点依次为$P_{20},P_{21},\cdots$). 由条件知，在$P_1,P_2,\cdots,P_{25}$这25个点中，五种颜色的点都有，而$P_7,P_8,\cdots,P_{25}$这19个点中，并不是五种颜色的点都有. 因此，在$P_1,P_2,\cdots,P_6$这6个点中，必有一点的颜色在$P_7,\cdots,P_{25}$中都不用的，称之为第一色.

同理，如果把P_7作为第一个点，在$P_7,P_8,P_9,P_{10},P_{11},P_{12}$这6个点中，必有一个点的颜色(当然不会是第一色，我们称之为第二

心得 体会 拓广 疑问

色.)是其后的 19 个点(从 P_{13} 到 P_{31})中没有的. 接下去在其后的 6 个点 P_{13},P_{14},P_{15},P_{16},P_{17},P_{18} 中,必有一个点的颜色(当然不会是第一色及第二色,我们称之为第三色.)在其后的 19 个点(从 P_{19} 到 P_{37})中是没有的.

由上所述,在 P_1,P_2,$\cdots$,P_{25} 中,在最后的 7 个点 P_{19},P_{20},$\cdots$,P_{25} 中,不会有第一色、第二色及第三色的点. 而任何一个点可作为 P_1. 因而在任何连着的 7 个点中,至多只用了两种颜色. 当然,连着的任何 7 个点不会是同一色的(否则再取下面的 18 个点,把这连着的 7 个点的前 6 个点去掉,这 19 个点中五种颜色的点都有).

综上所述,可知在连着的 7 个点中,恰好有两种颜色.

在 2 000 个点中,取两个相连的不同色的点 A,B,不妨设 A 是红色,B 是黄色的. 按顺时针方向是先 A 后 B,在 B 后面取 5 个点,在 A 之前取 5 个点. 如记 A 为 Q_6,B 为 Q_7,则 Q_1,Q_2,$\cdots$,Q_{12} 这 12 个点中,都是红色或黄色的. 而如前面所说,在 Q_1,$\cdots$,Q_6 这 6 个点中的第一色必是红色,从而 Q_7,$\cdots$,Q_{12} 必定全是黄色的. 接着 Q_{13} 不是黄色,而 Q_{13},Q_{14},Q_{15},Q_{16},Q_{17},Q_{18} 全都是同色. 不妨设是蓝色,等等. 因此,这 2 000 个点的染色法只有一种可能:从某一点 B 开始连着 6 个点是一种颜色,接下来 6 个点是另一种颜色,而五种颜色依次出现,接下来又循环地出现,所以,这个染色是以 30 为周期的,但 $30 \nmid 2\ 000$,这就出现了矛盾.

最后,我们要说明 18 不具有这个性质,即要举出一个染色的方法,它满足题中的条件,但任何连着的 18 个点都不会五种颜色的点都有.

我们用 0,1,2,3,4 表示五种颜色,我们的染色是以 25 为周期的,其中一个周期的 25 个点的颜色为

0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 3 0 0 0 4

易见,任何连着的 25 点中,五种颜色的点都有,但 1,2,3,4 这四种颜色的点都是只有一个. 而任何连着的 18 个点可认为是连着的 25 个点中去掉后面的 7 个点,而连着的 7 个点不会都是 0. 所以总有一个颜色的点是没有的.

4. 是否存在函数 $f:\mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$($\mathbf{N}^*$ 表示正整数全体)满足下面三个要求:

(1)$f(1)=2$;

(2)$f(f(n))=f(n)+n$(对任何 $n\in\mathbf{N}^*$);

(3)$f(n+1)>f(n)$(对任何 $n\in\mathbf{N}^*$).

解 若 $f:\mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ 满足要求. 由 $f(1)=2$ 及 $f(f(n))=f(n)+n$,可知 $f(2)=f(f(1))=f(1)+1=3$,$f(3)=f(f(2))=f(2)+2=5$,$\cdots$,可知记 $\{f_n\}$ 为如下的 Fibonacci 数列:$f_1=1$,$f_2=2$,$f_{n+2}=f_n+$

f_{n+1}，则 $f(f_n)=f_{n+1}$.

上述数列 $\{f_n\}$ 有下面性质

$$1+f_1+f_3+f_5+\cdots+f_{2k+1}=f_{2k+2}$$
$$1+f_2+f_4+f_6+\cdots+f_{2k}=f_{2k+1}$$

这由 $1+f_1=f_2$，$1+f_2=f_3$ 及 $f_{n+2}=f_n+f_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$ 即可得到.

由此，任何正整数 n 都可以表示成 $\{f_n\}$ 中若干项之和（可以是一项）. 若 n 不是数列中的项，则 $n=f_{i_1}+f_{i_2}+\cdots+f_{i_k}(k\geqslant 2)$，且下角标从小到大排列时，$i_2\geqslant i_1+2$，$i_3\geqslant i_2+2$，$\cdots$，$i_k\geqslant i_{k-1}+2$，且满足这样要求的写法是唯一的.

这可用第二归纳法来证. 若 n 是这数列中的项，当然可以表示. 如果不是，则有 k，$f_k<n<f_{k+1}$，于是 $n=f_k+(n-f_k)$. 由归纳法假设，$n-f_k=f_{i_1}+\cdots+f_{i_t}$，由于 $n-f_k<f_{k+1}-f_k=f_{k-1}$，当 $i_1<i_2<\cdots<i_t$ 时，$i_t<k-1$，$n=f_{i_1}+\cdots+f_{i_t}+f_k$，$k\geqslant i_t+2$（这说明每个正整数可以表示成这种形式，归纳基础当然对.）.

若 $n=f_{i_1}+f_{i_2}+\cdots+f_{i_k}=f_{j_1}+f_{j_2}+\cdots+f_{j_l}(i_1,i_2,\cdots,i_k,j_1,j_2,\cdots,j_l$ 都是单调上升，且相邻数至少差 2 的正整数). 若 $i_k>j_l$，则 $f_{i_k}=f_{i_{k-3}}+f_{i_{k-5}}+\cdots+1>f_{j_1}+f_{j_2}+\cdots+f_{j_l}$. 同样 $j_l>i_k$ 也不行，必定 $i_k=j_l$. 去掉这一项依旧可知 $i_{k-1}=j_{l-1}$，这就说明表示法是唯一的. 对正整数 n，若 $n=f_{i_1}+f_{i_2}+\cdots+f_{i_k}$（可以只有一项），令 $f(n)=f_{i_1+1}+f_{i_2+1}+\cdots+f_{i_k+1}$.

这个函数显然满足 $f(1)=2$，而 $f(f(n))=f_{i_1+2}+f_{i_2+2}+\cdots+f_{i_k+2}$，故 $f(f(n))=f(n)+n$.

性质 3 也是易见的. 若 $n=f_{i_1}+f_{i_2}+\cdots+f_{i_k}$，则 $n+1$ 的表示式中标号从大到小来看，总有一个比 n 的表达式中的相应标号大，或者是增加一项 f_1（当 $i_1\geqslant 3$ 时）. 可见 $f(n+1)>f(n)$.

注　本题是 1993 年 IMO 题 5. 原题一般是直接作出一个这样的函数，例如 $f(n)=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot n+\frac{1}{2}\right]$，并说明它满足题中的三个条件.

5. 设 n 是正整数，$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的排列，如果某个 i 使 $a_i=i$，称 i 是排列 a 的不动点. 对 $k=0,1,\cdots,n$，在 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的排列中，不动点个数为 k 的排列个数，记为 $P_{n,k}$.

证明：对任何正整数 n，$\sum\limits_{k=0}^{n}kP_{n,k}=n!$

证　$\{1,2,\cdots,n\}$ 的排列共有 $n!$ 个. 取 $n!$ 张纸条，每张写上 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个排列，并在每张纸条的这个排列下面写上它的所有的不动点.

心得 体会 拓广 疑问

再取另外一些纸条(为与上面的纸条相区别,上面的 $n!$ 张纸条是白色,现取的是黄色的纸条). 对于每一张白纸条,如果它上面写的某一个排列,而下面写着这排列的所有不动点. 若不动点个数为 k 就用 k 张黄纸条,上面写上这个排列,下面分别写上这排列的一个不动点.

因为对每一个有 k 个不动点的排列 a 相应地用了 k 张黄纸条,所以黄纸条的张数为

$$\sum_{k=0}^{n} kP_{n,k}$$

另一方面,黄纸条上写的是:上面写着 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的有不动点的排列,下面则写着它的一个不动点. 可见下面写 $i(i\in\{1,2,\cdots,n\})$ 的黄纸条数是以 i 为不动点的排列数,即 $(n-1)!$. 从而黄纸条的张数为 $n\cdot(n-1)!\ =n!$.

由此, $\sum\limits_{k=0}^{n} kP_{n,k}=n!$

注 本题是1987年IMO试题.

6. 设 $n\geqslant 3$, n 项的正数数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足

$$0<x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n \text{ 及 } x_1+x_2\leqslant x_n$$

求 $(x_1+x_2+\cdots+x_n)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n})$ 的最小值.

解 先看 $n=3$ 的情况,即要求 $(x_1+x_2+x_3)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3})$ 的最小值.

由柯西不等式知

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n})\geqslant n^2$$

$$(\sqrt{x_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\sqrt{x_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_2}}+\cdots+\sqrt{x_n}\cdot\frac{1}{\sqrt{x_n}})^2$$

$$\leqslant(x_1+x_2+\cdots+x_n)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n})$$

记 $s=x_1+x_2$,所以 $(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2})\cdot s\geqslant 4$, $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\geqslant\frac{4}{s}$. 从而

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+x_3)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3})&\geqslant(s+x_3)(\frac{4}{s}+\frac{1}{x_3})\\&=4+1+\frac{4x_3}{s}+\frac{s}{x_3}\\&=5+2(\frac{2x_3}{s}+\frac{s}{2x_3})\end{aligned}$$

令 $f(t)=t+\frac{1}{t}(t>0)$,由条件 $s\leqslant x_3$,所以 $\frac{s}{2x_3}\leqslant\frac{1}{2}$. 由于 f 在

$(0,\frac{1}{2}]$中单调下降,所以

$$(x_1+x_2+x_3)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3})\geqslant 5+2\cdot f(\frac{1}{2})$$
$$=5+2\cdot\frac{5}{2}=10$$

当且仅当 $x_1=x_2, x_1+x_2=x_3$ 时,上式为10. 可见 $n=3$ 时,所求最小值为10. 下面考虑 $n>3$ 的情况,记 $n-3$ 为 k. 要求 $(x_1+x_2+\cdots+x_n)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n})$ 的最小值.

记 $x_1+x_2+x_n$ 为 s,并记其余 k 个数的和为 kt. 于是

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_n}\geqslant\frac{10}{s},\frac{1}{x_3}+\cdots+\frac{1}{x_{n-1}}\geqslant\frac{k^2}{kt}=\frac{k}{t}$$

从而

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n})$$
$$\geqslant(s+kt)(\frac{10}{s}+\frac{k}{t})$$
$$=10+k^2+\frac{10kt}{s}+\frac{sk}{t}$$
$$=10+k^2+\sqrt{10}k(\frac{\sqrt{10}t}{s}+\frac{s}{\sqrt{10}t})$$
$$\geqslant 10+k^2+2\sqrt{10}k$$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 分取值为 $1,1,\frac{4}{\sqrt{10}},\frac{4}{\sqrt{10}},\cdots,\frac{4}{\sqrt{10}},2$ 时等式成立.

所求的最小值为 $10+k^2+2\sqrt{10}k=10+(n-3)^2+2\sqrt{10}(n-3)$.

注 本题是由2004年IMO的第四题改编而成.

7. 对正整数 n,a_n 表示数码都属于 $\{1,3,4\}$ 且各数码之和为 n 的正整数的个数,证明对任何正整数 n,a_{2n} 都是完全平方数.

证 对正整数 n,A_n 表示数码为1,3,4且各数码之和为 n 的正整数全体,$a_n=|A_n|$. 又用 B_n 表示数码仅有1,2的,各数码之和为 n 的正整数全体,记 $b_n=|B_n|$.

再记 $A'_n=\{10a+2\mid a\in A_n\}$, $B=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$.

作函数 $f:B\to\mathbf{N}^*$ 如下:对于数码仅有1,2的正整数 a,从左到右看 a 的码,见到1时,把该数码记下,见到2时,把这数码与它后一个(右边一个)数码相加,用和代替这两个数码.

例如: $f(12112121)=13133$, $f(112212221)=114143$,

$f(2112112)=31312$(当依次看到2是最后一个数码时,这个2就直接照抄.).

这个映射显然是一对一的,且 $f(B_{2n})=A_{2n}\cup A'_{2n-2}(n\geqslant 2$ 时).

所以 $b_{2n}=a_{2n}+a_{2n-2}(n\geqslant 2$ 时).

当 $n\geqslant 2$ 时,b_{2n} 是 B_{2n} 中元素的个数,对于 B_{2n} 中的元,即数码为1或2的,数码之和为 $2n$ 的正整数.这样的数可以分成两种,当数码从左到右累加时,有可以加出 n 及不可以加出 n 的情况.可以加出 n 的数实际就是两个 B_n 中的数(可以相同)拼接而成;不可以加出 n 的数当然可以加出 $n-1$,此后是数码2,其后的数码之和是 $n-1$.这样的数实际上就是两个 B_{n-1} 中的数中间加一个2拼接而成.由此

$$b_{2n}=b_n^2+b_{n-1}^2 \quad (n\geqslant 2\text{ 时})$$

$$b_n^2+b_{n-1}^2=a_{2n}+a_{2n-2} \quad (n\geqslant 2\text{ 时})$$

直接计数可知 $a_2=1,b_1=1,b_1^2=a_2$.由上述等式即知 $a_{2n}=b_n^2$ $(n=1,2,3,\cdots)$.

由 b_n 的定义可知 $b_1=1,b_2=2,b_{n+2}=b_{n+1}+b_n$.

即 $\{b_n\}$ 表示数列 $1,2,3,5,8,13,\cdots$.

注 本题是1991年全国高中联赛试题.

8.实数列 $\{x_n\}(n=1,2,\cdots)$ 中,$x_1\in[0,1)$ 且

$$x_{n+1}=\begin{cases}0,\text{当 } x_n=0\text{ 时}\\ \dfrac{1}{x_n}-\left[\dfrac{1}{x_n}\right],\text{当 } x_n\neq 0\text{ 时}\end{cases} \quad (n=1,2,\cdots)$$

又数列 $\{f_n\}$ 满足:$f_1=f_2=1,f_{n+2}=f_n+f_{n+1}(n=1,2,\cdots)$,证明:对任何正整数 n,$x_1+x_2+\cdots+x_n<\dfrac{f_1}{f_2}+\dfrac{f_2}{f_3}+\cdots+\dfrac{f_n}{f_{n+1}}$.

证 用数学归纳法.当 $n=1$ 时,即 $x_1<1$,由假设即知成立.下证 $n=2$ 时结论成立,即 $x_1+x_2<\dfrac{3}{2}$.由于 $x_2\in[0,1)$,当 $x_1\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时,当然 $x_1+x_2<\dfrac{3}{2}$.而当 $x_1\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 时,$\dfrac{1}{x_1}\in(1,2)$,所以 $x_2=\left\{\dfrac{1}{x_1}\right\}=\dfrac{1}{x_1}-1$.从而 $x_1+x_2=x_1+\dfrac{1}{x_1}-1$.由于函数 $f(t)=t+\dfrac{1}{t}(t>0)$ 在 $(0,1]$ 时是严格单调递减的,故 $x_1+\dfrac{1}{x_1}<f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{2}$.

所以 $x_1+x_2<\dfrac{5}{2}-1=\dfrac{3}{2}$.

设 $n=k$ 及 $n=k+1$ 时结论成立,要证 $n=k+2$ 时结论也成立.

由于数列 $\{x_n\}$ 中每一项都在 $[0,1)$ 中,所以这个数列去掉前

面若干项后的数列依然可看成符合条件的数列. 由归纳假设, $n=k$ 及 $n=k+1$ 时结论成立. 即

$$x_3+x_4+\cdots+x_{k+2}<\frac{f_1}{f_2}+\frac{f_2}{f_3}+\cdots+\frac{f_k}{f_{k+1}} \tag{1}$$

$$x_2+x_3+\cdots+x_{k+2}<\frac{f_1}{f_2}+\frac{f_2}{f_3}+\cdots+\frac{f_{k+1}}{f_{k+2}} \tag{2}$$

于是, 若 $x_1\leqslant\frac{f_{k+2}}{f_{k+3}}$, 与式(2)相加, 得到

$$x_1+x_2+\cdots+x_{k+2}<\frac{f_1}{f_2}+\frac{f_2}{f_3}+\cdots+\frac{f_{k+2}}{f_{k+3}}$$

而若 $x_1>\frac{f_{k+2}}{f_{k+3}}\left(>\frac{1}{2}\right)$, 则

$$x_2=\frac{1}{x_1}-1$$

$$\begin{aligned}x_1+x_2&=x_1+\frac{1}{x_1}-1<f\left(\frac{f_{k+2}}{f_{k+3}}\right)-1\\&=\frac{f_{k+2}}{f_{k+3}}+\frac{f_{k+3}}{f_{k+2}}-1=\frac{f_{k+2}}{f_{k+3}}+\frac{f_{k+1}}{f_{k+2}}\end{aligned}$$

与式(1)相加, 得

$$x_1+x_2+\cdots+x_{k+2}<\frac{f_1}{f_2}+\frac{f_2}{f_3}+\cdots+\frac{f_k}{f_{k+1}}+\frac{f_{k+1}}{f_{k+2}}+\frac{f_{k+2}}{f_{k+3}}$$

由此, $n=k+2$ 时, 结论也成立.

9. 设 n 和 k 都是正整数, $k\leqslant n$. 求 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 的所有 k 元子集中最小数的算术平均值.

解 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的 k 元子集有 C_n^k 个. 为求出这些集中最小数的算术平均值, 也就是要求出这些集中最小数的和$\triangle$. 而算术平均值即为$\frac{\triangle}{C_n^k}$.

对于$\{1,2,\cdots,n\}$的每个 k 元子集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$, 不妨设最小数为 a_1.

对于这样的 A, 作 a_1 个集$\{a_0,a_1,a_2,\cdots,a_k\}$, 其中 $a_1=0,1,\cdots,a_1-1$.

容易看到, 对$\{1,2,\cdots,n\}$的两个不同的 k 元子集 A,B 所作出的集不会相同. 而当 A 取$\{1,2,\cdots,n\}$的所有 k 元子集时, 所作出的集就是$\{0,1,2,\cdots,n\}$的 $k+1$ 元子集全体. 因此$\triangle=C_{n+1}^{k+1}$, 而所求的算术平均值为

$$\frac{C_{n+1}^{k+1}}{C_n^k}=\frac{n+1}{k+1}$$

注 本题是由第 22 届 IMO 的题 2 改编的, 原题是证明题.

10. 对于 n 项的每项为 0 或 1 的数列 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,当 $n\geqslant2$时,$f(a)$表示如下的 $n-1$ 项的数列$(b_1,b_2,\cdots,b_{n-1})$;$b_i=\begin{cases}0,当\ a_i=a_{i+1}时\\1,当\ a_i\neq a_{i+1}时\end{cases}(i=1,2,\cdots,n-1)$. 当 $n\geqslant3$ 时,令 $f^{(2)}=f\circ f$. 一般地,$f^{(k)}=f\circ f^{(k-1)}(k=2,3,\cdots,n-1)$,而$f^{(1)}$即为$f$. 对正整数 n,a 取成 n 项的每项为 0 或 1 的数列时,求 $a,f(a),\cdots,f^{(n-1)}(a)$这些数列中 1 的个数(的总和)的最大值.

解 所求的最大值记为 $g(n)$. 直接可知 $g(1)=1,g(2)=2$,$g(3)=4$. 当 $n=4$ 时,易见 $g(4)\leqslant4+g(3)=8$. 但若 a 取成$(1,1,1,1)$时,$f(a),f^{(2)}(a),f^{(3)}(a)$都是全 0 的数列,而当取 $a=(1,1,0,1)$时,$f(a)=(0,1,1),f^{(2)}(a)=(1,0),f^{(3)}(a)=(1)$共有 7 个 1,所以 $g(4)=7$. 接下去 $n=5$ 时,当然 $g(5)\leqslant5+g(4)=12$. 12 当然不可能,因为 a 取成$(1,1,1,1,1)$时,$f(a),f^{(2)}(a),f^{(3)}(a),f^{(4)}(a)$全都是 0,所以 $g(5)\leqslant11$. 而若要为 11 的话,a 这个数列中要有 4 个 1. 而当取 $a=(1,1,1,1,0),(1,1,1,0,1),(1,1,0,1,1),(1,0,1,1,1),(0,1,1,1,1)$都不会有 11 个 1. 当 $a=(1,1,0,1,1)$时依次有$f(a),f^{(2)}(a),f^{(3)}(a),f^{(4)}(a)$为$(0,1,1,0),(1,0,1),(1,1),(0)$,总共有 10 个 1,所以 $g(5)=10$. 这基本上是用穷举的方法来做的. 若对 $n=6,7$ 等再做的话,就会做出如下的猜测:当 a 取成$(1,1,0,1,1,0,\cdots,1,1,0,\cdots)$时,$a,f(a),\cdots,f^{(n-1)}(a)$中 1 的个数是最多的. 而对于这样的 a,$f^{(3)}(a)$是 a 去掉前三项后的数列.

基于上面的判断,考虑如下的问题:

设 $n\geqslant3$,$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$是每项为 0 或 1 的 n 项数列. 求 $a,f(a),f^{(2)}(a)$中 1 的个数的最大值 $h(n)$. 显然 $h(3)=g(3)=4$. 而当 $n>3$ 时

$$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$
$$f(a)=(b_1,b_2,\cdots,b_{n-1})$$
$$f^{(2)}(a)=(c_1,c_2,\cdots,c_{n-2})$$

其中 1 的个数等于 $a_1+b_1+c_1$ 再加上$(a_2,\cdots,a_n),(b_2,\cdots,b_{n-1}),(c_2,\cdots,c_{n-2})$中 1 的个数. 可见 $h(n)\leqslant3+h(n-1)$,而要$h(n)=3+h(n-1)$,必定 $a_1=b_1=c_1=1$ 且数列$(a_2,\cdots,a_n)$(记为 $\tilde{a}$)使 $\tilde{a},f(\tilde{a}),f^{(2)}(\tilde{a})$中的个数等于 $h(n-1)$. 由 $c_1=1$ 及 $b_1=1$ 可知 $b_2=0$,由 $b_1=1,a_1=1$ 可知 $a_2=0$,再由 $b_2=0$ 可知 $a_3=0$.

然而,前两项都是 0 的数列 $\tilde{a}=(a_2,a_3,\cdots,a_n)$,不可能使 $\tilde{a}$,$f(\tilde{a}),f^{(2)}(\tilde{a})$中的 1 的个数等于 $h(n-1)$($n-1=3$ 时显然),$n-1\geqslant4$时,根据 a_4,a_5 的情况,改变 a_2,a_3,这只影响到 b_2,b_3 及