中国矿业大学中央高校青年基金(JAC147173)
国家自然科学基金(61471361)

基于量子态调控的
量子信息隐形传输

胡克想　张国鹏 / 著

Jiyu Liangzitai Tiaokong De
Liangzi Xinxi Yinxing Chuanshu

中国矿业大学出版社

中国矿业大学中央高校青年基金(JAC147173)
国家自然科学基金(61471361)

基于量子态调控的量子信息隐形传输

胡克想　张国鹏　著

中国矿业大学出版社

内 容 简 介

本书从量子力学与量子信息基础理论出发，对微腔-量子点系统、量子调控以及量子态隐形传送等作了系统的分析。在深入剖析量子测量、法拉第旋转以及量子点对光子的调控基础上，聚焦量子传输技术，实现了对任意二粒子态以及微腔-量子点系统中多粒子 GHZ 态的传送，并且给出了相应的原理与方案。

本书内容深入浅出，可作为量子通信与光电工程领域相关研究人员参考，也可作为相关专业的教学参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

基于量子态调控的量子信息隐形传输 / 胡克想，张国鹏著.
—徐州：中国矿业大学出版社，2017.11

ISBN 978-7-5646-2855-0

Ⅰ.①基… Ⅱ.①胡… ②张… Ⅲ.①量子力学—应用—通信安全—安全技术—研究 Ⅳ.①TN918.91

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 229757 号

书　　名　基于量子态调控的量子信息隐形传输
著　　者　胡克想　张国鹏
责任编辑　周　丽
出版发行　中国矿业大学出版社有限责任公司
　　　　　　（江苏省徐州市解放南路　邮编 221008）
营销热线　(0516)83885307　83884995
出版服务　(0516)83885767　83884920
网　　址　http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
印　　刷　江苏凤凰数码印务有限公司
开　　本　787×960　1/16　**印张** 6.75　**字数** 125 千字
版次印次　2017 年 11 月第 1 版　2017 年 11 月第 1 次印刷
定　　价　36.00 元

前　言

20世纪90年代，人们将量子力学与电子信息科学、计算机科学等成功结合，产生了一门新兴的交叉学科——量子信息学。量子信息学是利用量子态对信息进行存储、编码、传输、提取等的信息科学。量子信息技术基于量子特性，如量子相干性、非局域性、纠缠性、不可克隆性等，以微观粒子作为载体，操纵、存储和传输量子状态，利用微观世界所特有的不同于宏观世界的量子现象，来实现一些经典计算和经典通信所无法完成的功能。量子信息技术具有运算速度快、功耗低、存储能力大、计算能力强、保密性好等性能，其应用前景难以估量。

量子信息发展的关键是量子态的调控和完备的量子隐形传输方案。利用腔QED系统可以实现原子的静止量子比特和光子的飞行量子比特之间信息的交换，进而完成量子信息的传递、存储和操作过程。同时，在量子点方案中通过对量子点和点内电子自旋的量子比特的制备和操作，可以实现信息的写入、编码、记忆、传送、处理和读出，从而实现量子计算。鉴于上述考虑，我们在腔-量子点系统中研究对光子极化偏转的调控来实现对量子态的简单可控操作，进而完成量子态的隐形传送。

本书包括如下内容：

第1章主要叙述量子力学所需的数学知识和量子力学基本假设。

第2章介绍量子信息的基本理论知识。

第 3 章分别介绍实现量子计算的物理系统——腔 QED 和量子点的实现方案，以及两种方案的有机结合——腔-量子点系统。

第 4 章在分析相关多粒子系统的哈密顿量后，借助于量子力学、固体物理和群论等的相关知识，对单光子的极化与偏转进行了具体的研究，从而在腔-量子点系统中完成了单量子点体系和多量子点体系分别对单光子偏振状态的可控操纵。

第 5 章主要包括两方面内容：

(1) 基于对隐形传态及对 W 态和 W-Like 态等的纠缠结构的理解，我们借助于辅助粒子构造联合幺正矩阵，成功地实现了对任意二粒子态的隐形传送。

(2) 在第 4 章单光子可控操纵的基础上，我们在腔-量子点系统中成功地实现了多粒子 GHZ-Like 态的隐形传送及受控隐形传送，并且使传输成功的概率达到了 1。

在本书编写过程中，得到了王晓光教授、郑亦庄教授、金柏琪教授的悉心指导，在此向他们致以衷心的感谢！

由于作者水平有限，书中纰漏难免，敬请读者批评指正。

作者

2017 年 11 月

目　录

第1章　量子力学引论

1.1　引言

量子力学对已知世界的描述是最精确和完整的，也是理解量子信息的基础。本章提供与本书内容相关的量子力学背景知识。

本章从复习线性代数的一些内容开始，然后给出量子力学的基本假设。阅读完本章节，读者就掌握了量子力学的基本原理，这有助于读者对初等量子力学的理解。

1.2　线性代数

线性代数研究向量空间及其上的线性算子，掌握好初等线性代数是理解好量子力学的基础。

线性代数研究的基本对象是向量空间。我们最感兴趣的向量空间是所有 n 元复数 $(z_1, \cdots, z_n)$ 构成的向量空间 C^n，向量空间的元素称为向量，有时用列矩阵记号

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \tag{1-1}$$

来表示向量。还有把向量对变成其他向量的加运算。C^n 上的向量加运算定义为

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1' \\ \vdots \\ z_n' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} z_1 + z_1' \\ \vdots \\ z_n + z_n' \end{bmatrix} \tag{1-2}$$

其中右边的加运算就是通常的复数加法。而且向量空间中还有标量乘运算，C^n 上的该运算定义为

$$z\begin{bmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}zz_1\\ \vdots\\ zz_n\end{bmatrix} \tag{1-3}$$

其中 z 是标量，即为一复数，右边的乘法是普通的复数乘法。物理学家有时把复数称为 c^- 数。

复习线性代数的目的是描述量子力学，因此，我们用量子力学的标准记号来表述线性代数概念。向量空间中向量的标准量子力学符号为

$$|\psi\rangle \tag{1-4}$$

其中 ψ 是该向量的标号，符号 $|\cdot\rangle$ 用来表明该对象为一向量。整个对象 $|\psi\rangle$ 有时称为一个右态矢。

向量空间包含一个特殊的零向量，记作 0。它满足性质：对任意其他向量 $|\upsilon\rangle$，$|\upsilon\rangle+0=|\upsilon\rangle$ 都成立。注意我们不用右态矢的记号表示零向量，这是唯一的例外。这个例外的原因是，零向量的记号 $|0\rangle$ 习惯上已有其他含义。关于标量乘，对任意复数 z，有 $z0=0$。为方便起见，我们用 $(z_1,\cdots,z_n)$ 表示项为 $z_1,\cdots,z_n$ 的列矩阵。C^n 的零元是 $(0,\cdots,0)$。向量空间 V 的一个向量子空间是 V 的一个子集 W，满足：W 也构成一个向量空间，即 W 必须对标量乘和加运算封闭。

基与线性无关

向量空间的一个生成集是一组向量 $|\upsilon_1\rangle,\cdots,|\upsilon_n\rangle$，它使得向量空间中的任意向量 $|\upsilon\rangle$ 都能表示成该组中向量的线性组合 $|\upsilon\rangle=\sum_i a_i|\upsilon_i\rangle$。例如，向量空间 C^2 的一个生成集是

$$|\upsilon_1\rangle\equiv\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},|\upsilon_2\rangle\equiv\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \tag{1-5}$$

因为 C^2 中任意向量

$$|\upsilon\rangle\equiv\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix} \tag{1-6}$$

都可以写成 $|\upsilon_1\rangle$ 和 $|\upsilon_2\rangle$ 的线性组合 $|\upsilon\rangle=a_1|\upsilon_1\rangle+a_2|\upsilon_2\rangle$，于是我们说 $|\upsilon_1\rangle$ 和 $|\upsilon_2\rangle$ 张成向量空间 C^2。

一般，向量空间可能有许多不同的生成集。向量空间 C^2 的另一生成集是

$$|\upsilon_1\rangle\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},|\upsilon_2\rangle\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \tag{1-7}$$

因为任意的向量$|v\rangle=(a_1,a_2)$可以写成$|v_1\rangle$和$|v_2\rangle$的线性组合，即

$$|v\rangle=\frac{a_1+a_2}{2}|v_1\rangle+\frac{a_1-a_2}{2}|v_2\rangle \tag{1-8}$$

一组非零向量$|v_1\rangle,\cdots,|v_n\rangle$是线性相关的，如果存在一组复数$a_1,\cdots,a_n$，其中至少对一个$i$有$a_i\neq0$，即

$$a_1|v_1\rangle+a_2|v_2\rangle+\cdots+a_n|v_n\rangle=0 \tag{1-9}$$

成立。如果一组向量不是线性相关的，则是线性无关的。可以证明任意两个线性无关向量组如果都是向量空间V的生成集，则必包含相等数目的元素。我们称这样的向量组为V的一个基，而且，这样的基总是存在的。基包含向量的数目称为V的维数。

线性算子与矩阵

向量空间V和W之间的线性算子定义为，任意对输入是线性的函数$A:V\to W$，满足：

$$A\left(\sum_i a_i|\psi\rangle\right)=\sum_i a_iA(|\psi\rangle) \tag{1-10}$$

通常把$A(|v\rangle)$记作$A|v\rangle$。当我们说一个线性算子A定义在向量空间V上时，指A是从V到V的线性算子。恒等算子I_V是任意线性空间V上的一个重要的线性算子，定义为对所有向量$|v\rangle$有等式$I_V|v\rangle=|v\rangle$。只要不引起混淆，我们就省略V，而只用I表示恒等算子。另一重要算子是零算子，记作0。零算子把所有向量反映为零向量，即$0|v\rangle\equiv0$。从式(1-10)易知，一旦确定了线性算子A在一基上的作用，A在所有输入上的作用就完全被确定了。

设V,W和X是向量空间，而$A:V\to W$和$B:W\to X$是线性算子，用记号BA表示B和A的复合，定义为$(BA)(|v\rangle)\equiv B(A(|v\rangle))$，$(BA)(|v\rangle)$简记为$BA|v\rangle$。理解线性算子最方便的途径是通过它们的矩阵表示。事实上，线性算子和矩阵是完全等价的，读者可能更熟悉矩阵。为明确二者的联系，首先要知道$m\times n$阶以A_{ij}为元素的矩阵A在同C^n向量进行矩阵乘法时，实际上是把C^n向量转移到C^m的一个线性算子。更确切地，矩阵A是线性算子的断言意味着

$$A\sum_i a_i|\psi\rangle=\sum_i a_iA|\psi\rangle \tag{1-11}$$

其等式的作用是A和列向量的矩阵乘积，很显然这是对的。

我们已看到矩阵可以被视为线性算子，但能给出线性算子的一个矩阵表示吗？的确可以，我们就来说明这一点。这两种观点之间的等价性可以互换使用

矩阵和算子理论的术语。设 $A:V\to W$ 是向量空间 V 和 W 之间的一个线性算子，设 $|v_1\rangle,\cdots,|v_m\rangle$ 是 V 的一个基，而 $|\omega_1\rangle,\cdots,|\omega_n\rangle$ 是 W 的一个基。于是对 1，$\cdots$，m 中每个 j，存在复数 A_{1j} 到 A_{mj}，使

$$A\,|\,v_j\rangle=\sum_i A_{ij}\,|\,\omega_i\rangle \tag{1-12}$$

具有元素 A_{ij} 的矩阵称为算子 A 的一个矩阵表示。A 的这个矩阵表示的说法与算子 A 的说法完全等价，我们将交替使用矩阵表示和抽象算子观点。注意为把矩阵和线性算子联系起来，我们需要为线性算子的输入和输出向量空间指定基。

Pauli 矩阵

Pauli 矩阵有 4 个常用矩阵，它们是 2×2 矩阵，并各有记号，相应的矩阵和符号如下：

$$\sigma_0\equiv I\equiv\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1-13}$$

$$\sigma_1\equiv\sigma_x\equiv X\equiv\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \tag{1-14}$$

$$\sigma_2\equiv\sigma_y\equiv Y\equiv\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix} \tag{1-15}$$

$$\sigma_3\equiv\sigma_z\equiv Z\equiv\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \tag{1-16}$$

Pauli 矩阵对量子计算和量子信息极其有用。

由 Pauli 矩阵可以推导出三类非常有用的两矩阵，称之为关于 $\hat{x}$，$\hat{y}$，$\hat{z}$ 轴的旋转算子，定义如下：

$$R_x(\theta)=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\theta X}{2}},$$

$$R_y(\theta)=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\theta Y}{2}},$$

$$R_z(\theta)=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\theta Z}{2}},$$

根据两矩阵可以在量子信息理论中进行有关的量子计算。

内积和外积

内积是向量空间上的二元复数函数。两个向量 $|v\rangle$ 和 $|\omega\rangle$ 的内积是一个复数，暂且把 $|v\rangle$ 和 $|\omega\rangle$ 的内积写成 $(|v\rangle,|\omega\rangle)$，但这并不是量子力学的标准记号。

内积$(|v\rangle,|\omega\rangle)$在量子力学中的标准符号为$\langle v|\omega\rangle$，其中$|v\rangle$和$|\omega\rangle$是内积空间中的向量，符号$\langle v|$表示向量$|v\rangle$的对偶向量。对偶运算是从内积空间$V$到复数$C$的一个线性算子，对偶向量的矩阵表示正是行向量。

从$V\times V$到C的函数$(\cdot,\cdot)$是内积，如果它满足以下条件：

(1) $(\cdot,\cdot)$对第二个自变量是线性的，即

$$\left(|v\rangle,\sum_i\lambda_i|\omega_i\rangle\right)=\sum_i\lambda_i(|v\rangle,|\omega_i\rangle)\tag{1-17}$$

(2) $(|v\rangle,|\omega\rangle)=(|\omega\rangle,|v\rangle)^*$；

(3) $(|v\rangle,|v\rangle)\geqslant 0$，当且仅当$|v\rangle=0$时取等号。

例如，C^n具有如下定义的一个内积：

$$((y_1,\cdots,y_n),(z_1,\cdots,z_n))\equiv\sum_i y_i^* z_i=[y_1^*,\cdots,y_n^*]\begin{bmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{bmatrix}\tag{1-18}$$

带有内积的向量空间称为内积空间。

量子力学的讨论常提到 Hilbert 空间。在量子计算与量子信息中遇到的有限维数复向量空间类中，Hilbert 空间与内积空间完全是一回事。我们可以不加区分地使用这两个术语，但更倾向于使用 Hilbert 空间的说法。无穷维 Hilbert 空间在内积空间基础上要求满足附加的技术性限制，我们可不考虑这种情况。

如果向量$|v\rangle$和$|\omega\rangle$的内积为 0，则称它们为正交。例如，$|\omega\rangle\equiv(1,0)$和$|v\rangle\equiv(0,1)$相对于式(1-18)定义的内积是正交的。定义向量$|v\rangle$的范数为

$$\||v\rangle\|\equiv\sqrt{\langle v|v\rangle}\tag{1-19}$$

向量$|v\rangle$是单位向量，如果满足$\||v\rangle\|=1$。如果$\||v\rangle\|=1$，还称向量$|v\rangle$为归一化的。对任意非零向量$|v\rangle$，向量除以其范数，称为向量的归一化，即$|v\rangle/\||v\rangle\|$是$|v\rangle$的归一化形式。一组以i为指标的向量$|i\rangle$称为标准正交向量组，如果每个向量都是单位向量，不同向量之间正交，即$\langle i|j\rangle=\delta_{ij}$，其中$i$和$j$都是从指标集中取的。

外积表示是利用内积表示线性算子的一个有用方法。设$|v\rangle$是内积空间V中的向量，而$|\omega\rangle$是内积空间W的向量，定义$|\omega\rangle\langle v|$为从V到W的线性算子：

$$(|\omega\rangle\langle v|)(|v'\rangle)\equiv|\omega\rangle\langle v|v'\rangle=\langle v|v'\rangle|\omega\rangle\tag{1-20}$$

此式与我们对符号的约定非常吻合。表达式$|\omega\rangle\langle v|v'\rangle$有两种可能的含义：算子$|\omega\rangle\langle v|$在$|v'\rangle$上的作用，或$|\omega\rangle$与一个复数$\langle v|v'\rangle$相乘。我们的定义使两种

解释相一致，事实上，我们把前者定义为后者。

外积算子 $|\omega\rangle\langle\upsilon|$ 进行线性组合的方式是显然的，因为根据定义 $\sum_i a_i|\omega_i\rangle\langle\upsilon_i|$ 是一个线性算子，其在 $|\upsilon'\rangle$ 上的作用是产生输出 $\sum_i a_i|\omega_i\rangle\langle\upsilon_i|\upsilon'\rangle$。

外积概念的有用性可以从标准正交向量的称为完备性关系的重要结果看出。令 $|i\rangle$ 为向量空间 V 的任意标准正交基，于是任意向量 $|\upsilon\rangle$ 可形成 $|\upsilon\rangle=\sum_i \upsilon_i|i\rangle$，$\upsilon_i$ 是一组复数。注意到 $\langle i|\upsilon\rangle=\upsilon_i$，于是

$$\left(\sum_i |i\rangle\langle i|\right)|\upsilon\rangle=\sum_i |i\rangle\langle i|\upsilon\rangle=\sum_i \upsilon_i|i\rangle=|\upsilon\rangle \tag{1-21}$$

由于最后一个等式对所有 $|\upsilon\rangle$ 成立，故有

$$\sum_i |i\rangle\langle i|=I \tag{1-22}$$

这个等式称为完备性关系。完备性关系的一个应用是把任意线性算子表示成外积形式。设 $A:V\rightarrow W$ 是一个线性算子，$|\upsilon_i\rangle$ 是 V 的一个标准正交基，且 $|\omega_j\rangle$ 是 W 的一个标准正交基，两次应用完备性关系得到

$$A=I_W A I_V=\sum_{ij}|\omega_j\rangle\langle\omega_j|A|\upsilon_i\rangle\langle\upsilon_i|=\sum_{ij}\langle\omega_j|A|\upsilon_i\rangle|\omega_j\rangle\langle\upsilon_i| \tag{1-23}$$

这就是 A 的外积表示。从此式还可以看到相对于输入基 $|\upsilon_i\rangle$ 和输出基 $|\omega_j\rangle$，A 的第 i 列第 j 行元素是 $\langle\omega_j|A|\upsilon_i\rangle$。

第二个说明完备性关系有用的应用是 Cauchy-Schwarz 不等式。该不等式是 Hilbert 空间的一个重要几何事实，它断言对两个任意的向量 $|\upsilon\rangle$ 和 $|\omega\rangle$，$|\langle\upsilon|\omega\rangle|^2\leqslant\langle\upsilon|\upsilon\rangle\langle\omega|\omega\rangle$ 成立。

特征向量和特征值

线性算子 A 在向量空间上的特征向量(本征向量)指非零的向量 $|\upsilon\rangle$，使得 $A|\upsilon\rangle=\upsilon|\upsilon\rangle$，其中 υ 是一个复数，称为 A 对应于 $|\upsilon\rangle$ 的特征值(本征值)。为方便起见，通常采用 υ 表示特征向量的标号和特征值。特征函数定义为 $c(\lambda)\equiv\det|A-\lambda I|$，其中 det 是矩阵的行列式，可以证明特征函数仅依赖于算子 A，而不依赖于 A 的特定矩阵形式。特征方程 $c(\lambda)=0$ 的根是算子 A 的特征值。由代数基本定理，每个多项式至少有一个复根，因此每个算子 A 至少有一个特征值和一个对应的特征向量，对应于一个特征值 υ 的本征空间是以 υ 为特征值的向量的集合，它是算子 A 在其上作用的向量空间的子空间。

向量空间 V 上算子 A 的对角表示是具有形式 $A=\sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|$ 的一个表示，其中向量组 $|i\rangle$ 是 A 的特征向量构成的标准正交向量组，对应的特征值为 λ_i。如果一个算子有一个对角表示，它被称为可对角化。作为对角表示的例子，Pauli 矩阵可写作

$$Z=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=|0\rangle\langle 0|-|1\rangle\langle 1| \tag{1-24}$$

其中矩阵表示分别是相对标准正交向量 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的。对角表示有时称为标准正交分解。

当本征空间大于一维时，称为简并。例如，定义为 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 的矩阵对应于特征值 2 有一个二维本征空间，特征向量 $(1,0,0)$ 和 $(0,1,0)$ 称为简并的，因为它们是线性无关且对应 A 的同一特征值。

伴随与 Hermite 算子

设 A 是 Hilbert 空间 V 上的线性算子，实际上 V 上存在唯一的线性算子 $A^\dagger$ 使得对所有向量 $|v\rangle,|\omega\rangle\in V$ 成立：

$$(|v\rangle,A|\omega\rangle)=(A^\dagger|v\rangle,|\omega\rangle) \tag{1-25}$$

这个线性算子称为 A 的伴随共轭或 Hermite 共轭。从定义出发易知 $(AB)^\dagger=B^\dagger A^\dagger$。习惯上，如果 $|v\rangle$ 是向量，那么定义 $|v\rangle^\dagger\equiv\langle v|$。根据此定义，不难看出 $(A|v\rangle)^\dagger=\langle v|^\dagger A^\dagger$。

在算子 A 的矩阵表示中，Hermite 共轭运算的作用是把 A 的矩阵变为共轭转置矩阵，$A^\dagger=(A^*)^{\mathrm{T}}$，其中 $\{*\}$ 表示复共轭，T 表示转置运算。例如：

$$\begin{bmatrix}1+3\mathrm{i} & 2\mathrm{i}\\ 1+\mathrm{i} & 1-4\mathrm{i}\end{bmatrix}^\dagger=\begin{bmatrix}1-3\mathrm{i} & 1-\mathrm{i}\\ -2\mathrm{i} & 1+4\mathrm{i}\end{bmatrix} \tag{1-26}$$

如果算子 A 的共轭转置仍为 A，则称 A 为 Hermite 或自伴算子。投影算子是一类重要的 Hermite 算子。设 W 是 d 维向量空间 V 的 k 维子空间，采用 Gram-Schimdt 过程，可以为 V 构造一个标准正交基 $|1\rangle,\cdots,|d\rangle$，使得 $|1\rangle,\cdots,|k\rangle$ 是 W 的一个标准正交基。定义

$$P\equiv\sum_{i=1}^{k}|i\rangle\langle i| \tag{1-27}$$

是到 W 上的投影算子。容易验证这个定义独立于 W 的标准正交基 $|1\rangle,\cdots,$

$|k\rangle$。根据定义，任意向量 $|\upsilon\rangle$，$|\upsilon\rangle\langle\upsilon|$ 都是 Hermite 的，故 P 是 Hermite 的，$P^{\dagger}=P$。常用向量空间 P 的简称，作为投影算子 P 映到其上的向量空间。P 的正交补是算子 $Q\equiv I-P$，容易看出 Q 是到由 $|k+1\rangle,\cdots,|d\rangle$ 张成的向量空间上的投影，这个空间也称为 P 的正交补，也可记作 Q。

如果 $AA^{\dagger}=A^{\dagger}A$ 成立，算子 A 称为正规的。显然，Hermite 算子是正规的。如果 $U^{\dagger}U=I$，则矩阵 U 称为是酉的，类似地，算子 U 也是酉的，酉算子也满足 $U^{\dagger}U=I$，因此 U 是正规的。

张量积

张量积是将向量空间合在一起，构成更大向量空间的一种方法，这个构造对理解量子力学的多粒子系统很关键。

设 V 和 W 是维数分别是 m 和 n 的向量空间，并假定 V 和 W 是 Hilbert 空间，于是 $V\otimes W$（读作"V 张量 W"）是一个 mn 维向量空间。$V\otimes W$ 的元素是 V 的元素 $|\upsilon\rangle$ 和 W 的元素 $|\omega\rangle$ 的张量积 $|\upsilon\rangle\otimes|\omega\rangle$ 的线性组合。特别地，如果 $|i\rangle$ 和 $|j\rangle$ 是 V 和 W 的标准正交基，则 $|i\rangle\otimes|j\rangle$ 是 $V\otimes W$ 的一个基，常用缩写符号 $|\upsilon\rangle|\omega\rangle$，$|\upsilon,\omega\rangle$ 或 $|\upsilon\omega\rangle$ 来表示张量积 $|\upsilon\rangle\otimes|\omega\rangle$。例如，当 V 是以 $|0\rangle$，$|1\rangle$ 为基向量的二维向量空间，则 $|0\rangle\otimes|0\rangle+|1\rangle\otimes|1\rangle$ 是 $V\otimes V$ 的一个元素。

由定义，张量积满足如下的基本性质：

(1) 对任意标量 z，V 的元素 υ 和 W 的元素 ω，满足

$$z(|\upsilon\rangle\otimes|\omega\rangle)=(z|\upsilon\rangle\otimes|\omega\rangle)=|\upsilon\rangle\otimes(z|\omega\rangle) \tag{1-28}$$

(2) 对 V 中任意的 υ_1 和 υ_2，W 中的 $|\omega\rangle$，满足

$$(|\upsilon_1\rangle+|\upsilon_2\rangle)\otimes|\omega\rangle=|\upsilon_1\rangle\otimes|\omega\rangle+|\upsilon_2\rangle\otimes|\omega\rangle \tag{1-29}$$

(3) 对 V 中任意的 $|\upsilon\rangle$ 和 W 中的 ω_1 和 ω_2，满足

$$|\upsilon\rangle\otimes(|\omega_1\rangle+|\omega_2\rangle)=|\upsilon\rangle\otimes|\omega_1\rangle+|\upsilon\rangle\otimes|\omega_2\rangle \tag{1-30}$$

$V\otimes W$ 上的线性算子有哪些类型？设 $|\upsilon\rangle$ 和 $|\omega\rangle$ 分别是 V 和 W 中向量，A 和 B 是 V 和 W 上的线性算子。我们可以在 $V\otimes W$ 上定义一个线性算子 $A\otimes B$，定义如下：

$$(A\otimes B)(|\upsilon\rangle\otimes|\omega\rangle)\equiv A|\upsilon\rangle\otimes B|\omega\rangle \tag{1-31}$$

为保证其线性，$A\otimes B$ 的定义可以自然地扩展到 $V\otimes W$ 的所有元素，即

$$(A\otimes B)\Big(\sum_i a_i\,|\upsilon_i\rangle\otimes|\omega_i\rangle\Big)\equiv\sum_i a_i A\,|\upsilon_i\rangle\otimes B\,|\omega_i\rangle \tag{1-32}$$

算子函数

算子和矩阵上可以定义很多重要的函数。一般而言，给定从复数到复数的函数 f，可以通过下面的步骤定义正规矩阵上的相应矩阵函数。令 $A=\sum_a a|a\rangle\langle a|$ 是正规算子 A 的一个谱分解，定义 $f(A)=\sum_a f(a)|a\rangle\langle a|$，容易看出 $f(A)$ 是唯一定义的。

另一个重要的矩阵函数是矩阵的迹。A 的迹定义为它的对角元素之和，即

$$\mathrm{tr}(A)\equiv\sum_i A_{ii} \tag{1-33}$$

容易看到迹是循环的，即 $\mathrm{tr}(AB)=tr(BA)$；是线性的，即 $\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$，$\mathrm{tr}(zA)=z\mathrm{tr}(A)$，其中 A 和 B 是任意矩阵，z 是复数。而且，由循环性质得到矩阵的迹在酉相似变换 $A\rightarrow UAU^\dagger$ 下不变，因为 $\mathrm{tr}(UAU^\dagger)=\mathrm{tr}(U^\dagger UA)=\mathrm{tr}(A)$。受这个结果启发，可以把算子 A 的迹定义为 A 的任意矩阵表示的迹。迹在酉相似变换下的不变性，保证算子的迹是定义良好的。

对易式和反对易式

两个算子 A 和 B 之间的对易式定义为

$$[A,B]\equiv AB-BA \tag{1-34}$$

若 $[A,B]=0$，即 $AB=BA$，则说 A 和 B 是对易的。类似地，两个算子 A 和 B 的反对易式定义为

$$\{A,B\}\equiv AB+BA \tag{1-35}$$

如果 $\{A,B\}=0$，则 A 与 B 反对易。

1.3 量子力学假设

量子力学本身不能告诉我们物理系统服从什么定律，但它却提供了研究这些定律的数学和概念的框架。量子力学假设把物理世界和量子力学的数学描述联系了起来。量子力学假设是经过长期的尝试与失败后而推导出来的，经过了发明者的大量猜测和摸索。假设的动机不明显，这不足为奇，因为量子力学的基本假设即使对专家而言也是令人吃惊的。

状态空间

量子力学的第一条假设建立起量子力学适用的场合，即线性代数中熟知的Hilbert 空间。

假设 1 任一孤立物理系统都有一个称为系统状态空间的复内积向量空间(即 Hilbert 空间)与之相联系，系统完全由状态向量所描述。这个向量是系统状态空间的一个单位向量。

量子力学并不告诉我们，对一个给定的物理系统，它的状态空间是什么，也不告诉我们，系统的状态向量是什么。对特定系统找出状态空间和状态向量是困难的问题，物理学家已为此研究出许多复杂和漂亮的规则。例如，有一门量子电动力学理论(常称为 QED)来描述原子和光的相互作用，它就是告诉我们用什么状态空间给出原子和光的量子描述。我们对像 QED 那样的复杂理论不太关心，因为我们感兴趣的是量子力学所提供的一般框架，对我们的目的而言，关于系统状态空间作一些非常简单并且合理的假设，并坚持这些假设就足够了。

最简单，也是我们最常关心的量子系统，是量子比特。一个量子比特有一个二维的状态空间。设$|0\rangle$和$|1\rangle$构成这个状态空间的一个标准正交基，则状态空间中的任意状态向量可写作

$$|\psi\rangle=a|0\rangle+b|1\rangle \tag{1-36}$$

其中 a 和 b 是复数。于是$|\psi\rangle$为单位向量的必要条件，即$\langle\psi|\psi\rangle=1$，就等价于$|a|^2+|b|^2=1$。条件$\langle\psi|\psi\rangle=1$ 常称为状态向量的归一化条件。

我们把量子比特视为最基本的量子力学系统。量子比特的物理系统是真实存在的，不过目前只抽象讨论而不涉及特定物理实现。对量子比特的讨论总是相对某个已经固定的标准正交向量基$|0\rangle$和$|1\rangle$，直观上，状态$|0\rangle$和$|1\rangle$对应于一个比特可能取的两个值 0 和 1。量子比特和比特的不同之处在于，这两个状态可能存在形如 $a|0\rangle+b|1\rangle$ 的叠加，叠加态下不能确定地说状态是$|0\rangle$或$|1\rangle$。

最后介绍与描述量子状态有关的一些有用术语。任意线性组合 $\sum_i a_i|\psi_i\rangle$ 理解为状态$|\psi_i\rangle$ 的一个$|\psi_i\rangle$ 具有幅度 α_i 的叠加，于是状态

$$\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{1-37}$$