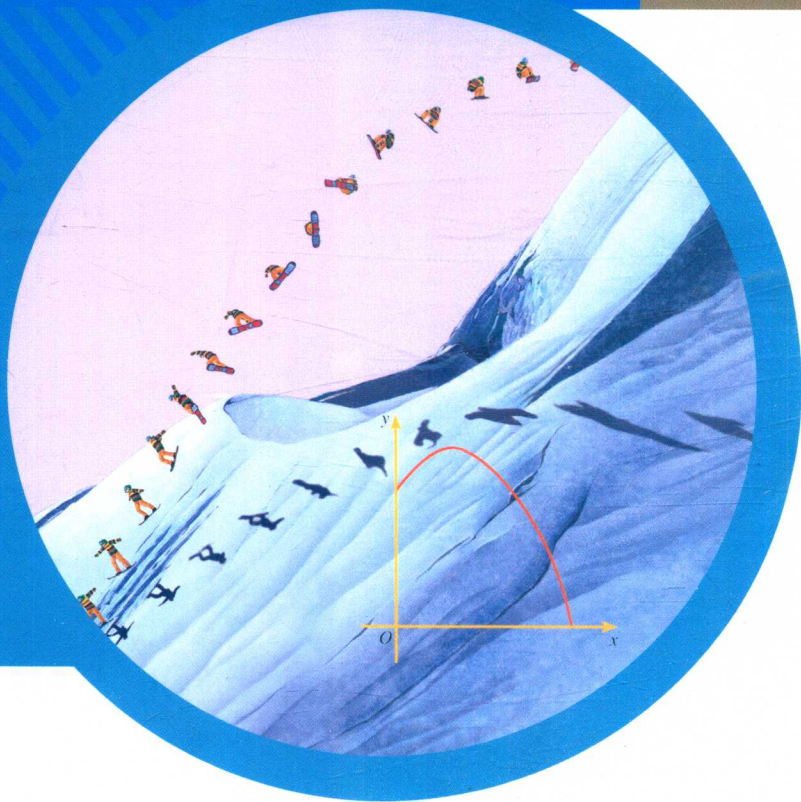


义务教育教科书

教师教学用书

数 学

九年级
上册



人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心

编著

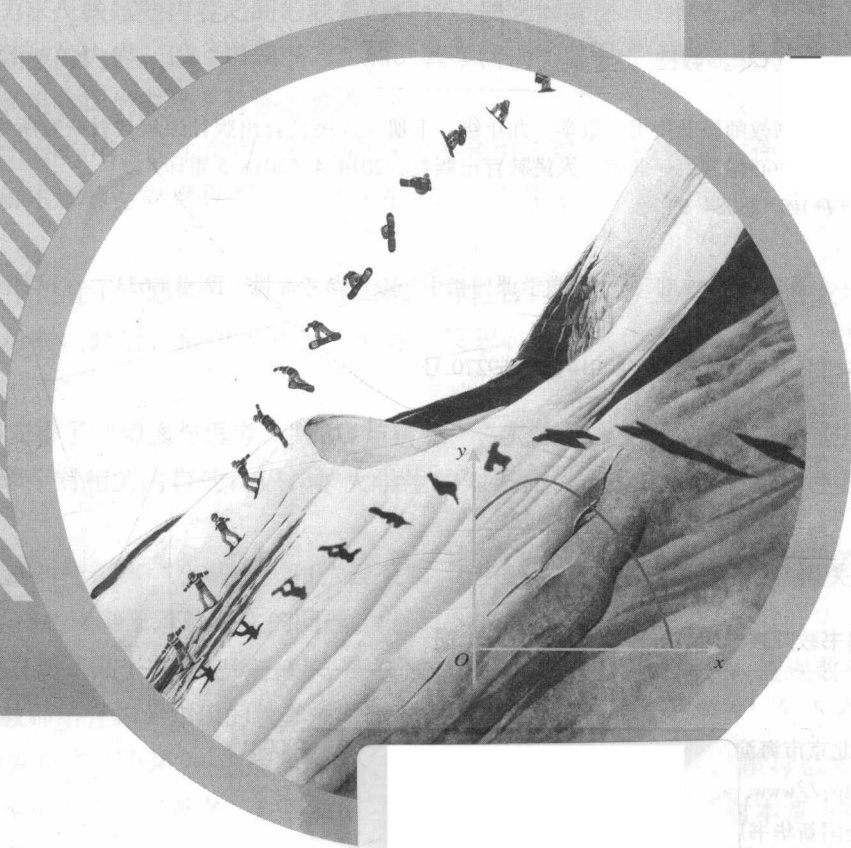
人民教育出版社

义务教育教科书

数 学

教师教学用书

九年级
上册



人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心

编著

人民教育出版社
· 北京 ·

主 编：林 群

副 主 编：田载今 薛 彬 李海东

本册主编：张劲松 王玉起

主要编者：章建跃 薛 彬 俞求是 李海东 张唯一 王玉起 曹凤梅

谢 慧 张 东 初 雨 黄兵彦 万书河 郑 燕

责任编辑：王 嵘

图书在版编目（CIP）数据

义务教育教科书教师教学用书. 数学. 九年级. 上册 / 人民教育出版社课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心编著. —北京：人民教育出版社，2014. 4（2018. 5 重印）

ISBN 978-7-107-28084-9

I. ①义… II. ①人… III. ①中学数学课—初中—教学参考资料 IV. ①G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 169270 号

义务教育教科书教师教学用书 数学 九年级 上册

出版发行 人民教育出版社

(北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼 邮编：100081)

网 址 <http://www.pep.com.cn>

经 销 全国新华书店

印 刷 山东德州新华印务有限责任公司

版 次 2014 年 4 月第 1 版

印 次 2018 年 5 月第 5 次印刷

开 本 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 19.25

字 数 460 千字

定 价 40.40 元

版权所有·未经许可不得采用任何方式擅自复制或本产品任何部分·违者必究
如发现内容质量问题、印装质量问题，请与本社联系。电话：400-810-5788

说明

人教版义务教育教材数学（七～九年级），是以教科书为基础的系列化教材，包括基本教材和配套教学资源。基本教材是教科书和教师教学用书；配套教学资源包括同步解析与测评、教学设计与案例、人教数字校园、自读课本等。

人教版《义务教育教科书·数学（七～九年级）》是根据教育部制定的《义务教育数学课程标准（2011年版）》（以下简称《课标（2011年版）》）编写的。全套书分为六册，每学期一册，内容包括“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”“综合与实践”四个领域，在体系结构的设计上力求反映这些内容之间的联系与综合，使它们成为一个有机的整体，其中对于“综合与实践”领域的内容，以“课题学习”和“数学活动”等形式分散地编排于各章之中。

本套教科书在体例安排上有如下特点：

1. 每章开始均用反映本章主要内容的章前图和引言引入本章内容，使学生了解本章内容的概貌，了解本章的主要思想方法和学习方法，可供学生预习用，也可作为教师导入新课的材料。

2. 正文中设置了“思考”“探究”“归纳”等栏目，栏目中以问题、留白或填空等形式引导学生通过观察、分析、猜想、试验、推理、反思、交流等活动获取数学知识，积累学习经验。

3. 适当安排了“阅读与思考”“观察与猜想”“实验与探究”“信息技术应用”等选学栏目，为加深学生对相关内容的认识，扩大学生的知识面，运用现代信息技术手段学习等提供资源。

4. 正文的边空设有“小贴士”和“云朵”，“小贴士”介绍与正文内容相关的背景知识，“云朵”中是一些有助于理解正文的问题。

5. 每章安排了几个有一定综合性、实践性、开放性的“数学活动”，体现数学知识的综合应用，可供教师结合相关知识的教学或全章复习时选用。

6. 每章安排了“小结”，包括本章的知识结构图和对本章内容的回顾与思考。“本章知识结构图”体现了本章知识要点、发展脉络和相互联系；“回顾与思考”对本章主要内容及其反映的思想方法进行提炼与概括，并通过在重点、难点和关键环节上提出的有思考力度的具体问题，深化学生对本章核心内容及其反映的数学思想方法的理解。

7. 本书的习题分为练习、习题、复习题三类。练习供课上使用，有些练习是对所学内容的巩固，有些练习是相关内容的延伸；习题供课内或课外作业时选用；复习题供复习全章时选用。其中习题、复习题按照习题的功能分为“复习巩固”“综合应用”“拓广探索”三类。

这套教师教学用书与《义务教育教科书·数学（七～九年级）》相对应，供教师教学时参考使用。全套书分为六册，每册书按章编排，每章内容与相应教科书内容对应。教师教学用书的每一章主要包括以下六部分：

第一部分是总体设计，包括本章学习目标、本章知识结构框图、内容安排、课时安排、编

写本章时考虑的问题、对本章教学的建议等内容。

第二部分是教材分析，这部分含有教科书相应章节的正文，正文旁有教科书正文的注释及教科书中练习的答案和说明，正文下部按小节分条阐述各小节的编写意图，说明本节内容的知识结构、知识点及其发生发展过程（逻辑关系）、重点、学生学习过程中可能出现的困难和问题等。

第三部分是本章习题的参考答案。

第四部分提供了几个教学案例，供教师教学时参考。每一个教学案例是一个课时的课堂教学设计，内容包括内容和内容解析、目标和目标解析、教学问题诊断分析、教学支持条件分析、教学过程设计、目标检测设计等几方面。

第五部分是拓展资源。根据每章的教学内容，为教师提供相应的拓展资料，包括知识的拓展延伸与相关史料、拓展性问题等。

第六部分是评价建议与测试题。评价建议从知识技能、数学思考、问题解决、情感态度等几方面为教师提出本章评价建议，并提供了一套测试题供参考，并说明了每道测试题的设计意图。

本书是九年级上册的教师教学用书，内容包括“一元二次方程”“二次函数”“旋转”“圆”“概率初步”五章，各章授课时间大致分配如下（仅供参考）：

第二十一章	一元二次方程	13 课时
第二十二章	二次函数	12 课时
第二十三章	旋转	7 课时
第二十四章	圆	16 课时
第二十五章	概率初步	9 课时

本书在编写过程中征求了全国各地部分教师和教研人员的意见，在此表示衷心感谢。

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心

2014 年 3 月

目 录

第二十一章 一元二次方程	1
.....	
I 总体设计	1
II 教材分析	7
21.1 一元二次方程	8
21.2 解一元二次方程	11
21.3 实际问题与一元二次方程	25
数学活动	29
小结	30
复习题 21	31
III 习题解答	33
IV 教学设计案例	35
21.2 解一元二次方程 (第 1 课时)	35
21.2 解一元二次方程 (第 7 课时)	39
第二十一章 小结与复习 (两课时)	42
V 拓展资源	46
VI 评价建议与测试题	52
.....	
第二十二章 二次函数	55
.....	
I 总体设计	55
II 教材分析	59
22.1 二次函数的图象和性质	60
22.2 二次函数与一元二次方程	75
22.3 实际问题与二次函数	81
数学活动	86
小结	87

复习题 22	88
III 习题解答	90
IV 教学设计案例	93
22.1 二次函数的图象和性质 (第 2 课时)	93
22.1 二次函数的图象和性质 (第 5 课时)	97
22.3 实际问题与二次函数 (第 1 课时)	100
V 拓展资源	104
VI 评价建议与测试题	107

第二十三章 旋转 111

I 总体设计	111
II 教材分析	115
23.1 图形的旋转	116
23.2 中心对称	121
23.3 课题学习 图案设计	129
数学活动	131
小结	132
复习题 23	133
III 习题解答	135
IV 教学设计案例	138
23.1 图形的旋转 (第 1 课时)	138
23.2 中心对称 (第 1 课时)	142
V 拓展资源	147
VI 评价建议与测试题	152

第二十四章 圆 156

I 总体设计	156
II 教材分析	162
24.1 圆的有关性质	163
24.2 点和圆、直线和圆的位置关系	176
24.3 正多边形和圆	189
24.4 弧长和扇形面积	195

数学活动	202
小结	205
复习题 24	206
III 习题解答	210
IV 教学设计案例	214
24.1 圆的有关性质 (第 4 课时)	214
24.2 点和圆、直线和圆的位置关系 (第 4 课时)	219
24.4 弧长和扇形面积 (第 1 课时)	223
数学活动 探究四点共圆的条件	227
V 拓展资源	232
VI 评价建议与测试题	238

第二十五章 概率初步 241

I 总体设计	241
II 教材分析	246
25.1 随机事件与概率	247
25.2 用列举法求概率	256
25.3 用频率估计概率	262
数学活动	270
小结	271
复习题 25	272
III 习题解答	274
IV 教学设计案例	276
25.1 随机事件与概率 (第 2 课时)	276
25.2 用列举法求概率 (第 1 课时)	279
25.3 用频率估计概率 (第 1 课时)	284
V 拓展资源	291
VI 评价建议与测试题	298

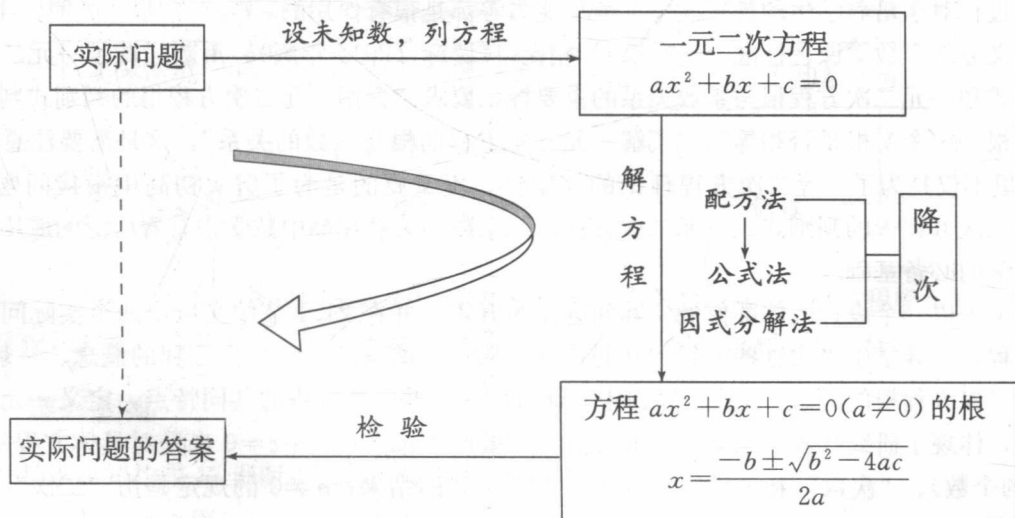
第二十一章 一元二次方程

I 总体设计

一、本章学习目标

1. 理解配方法，能用配方法、公式法、因式分解法解数字系数的一元二次方程.
2. 会用一元二次方程根的判别式判别方程是否有实根和两个实根是否相等.
3. 了解一元二次方程的根与系数的关系.
4. 能根据具体问题的实际意义，检验方程的解是否合理.
5. 能根据具体问题中的数量关系列出一元二次方程，并利用一元二次方程模型解决简单的实际问题.

二、本章知识结构框图



三、内容安排

现实生活中，许多问题中的数量关系可以抽象为一元二次方程。因此，从深化数学模型思想、加强应用意识的角度看，从实际问题中抽象出数量关系，列出一元二次方程，求出它的根进而解决实际问题，是本章学习的一条主线。

学生已经学习一元一次方程的解法和实际应用，知道可以利用运算律、等式的基本性质，通过去括号、移项、合并同类项等求出它的解。学生还学过二元一次方程组以及三元一次方程组的解法和实际应用，知道可以通过消元，将它们转化为一元一次方程。从数学知识的内部发展看，二元、三元一次方程组可以看成是对一元一次方程在“元”上的推广。自然地，如果在次数上做推广，首先就是一元二次方程。类比二（三）元一次方程组的解法，可以想到：能否将一元二次方程转化为一元一次方程？

元一次方程？如何转化？因此，利用什么方法将“二次”降为“一次”，这是本章学习的另一条主线。

与一元一次方程、二元一次方程组的解法相比，一元二次方程的解法涉及更多的知识，可以根据方程的具体特点，选择相关的知识和方法，对方程进行求解。这是培养学生的思维品质（特别是思维的敏捷性、灵活性、深刻性等）的机会。根据《课标（2011年版）》的规定，教科书着重介绍了配方法、公式法和因式分解法等一元二次方程的解法，而且限定在解数字系数的一元二次方程。

解一元二次方程的基本策略是降次，即通过配方、因式分解等，将一个一元二次方程转化为两个一元一次方程来解。具体地，根据平方根的意义，可得出方程 $x^2=p$ 和 $(x+n)^2=p$ 的解法；通过配方，可将一元二次方程转化为 $(x+n)^2=p$ 的形式再解；一元二次方程的求根公式，就是对方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 配方后得出的。如能将 ax^2+bx+c 分解为两个一次因式的乘积，则可令每个因式为 0 来解。

一元二次方程的三种解法——配方法、公式法和因式分解法各有特点。一般地，配方法是推导一元二次方程求根公式的工具。掌握了公式法，就可以直接用公式求一元二次方程的根了。当然，也要根据方程的具体特点，选择适当的解法，因式分解法就显示了这样的灵活性。配方法是一种重要的、应用广泛的数学方法，如后面研究二次函数时也要用到它。在推导求根公式的过程中，从 $x^2=p$ 到 $(x+n)^2=p$ 再到 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$)，是方程形式的不断推广，体现了从特殊到一般的过程；而求解方程的过程则是将推广所得的方程转化为已经会解的方程，体现了化归思想。显然，这个过程对于培养学生的推理能力、运算能力等都是很有作用的。

与《义务教育数学课程标准（实验稿）》相比，《课标（2011年版）》重新强调了一元二次方程根的判别式和一元二次方程根与系数关系的重要性，要求“会用一元二次方程根的判别式判别方程是否有实根和两个实根是否相等”，“了解一元二次方程的根与系数的关系”，这是需要注意的一个变化。这里不仅是为了一元二次方程理论的完整性，更重要的是为了解决初高中衔接问题。实际上，一元二次方程根的判别式、一元二次方程根与系数的关系在高中数学中有着广泛的应用，是学习高中数学的必备基础。

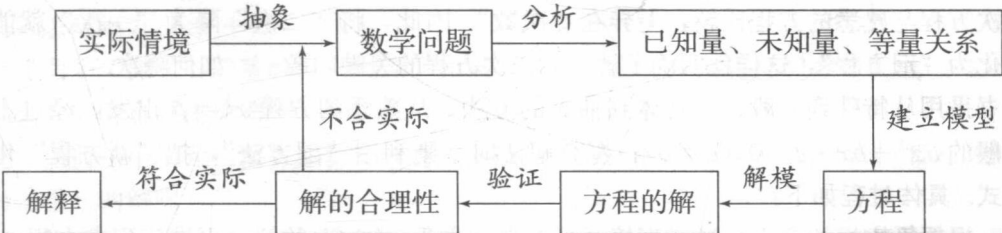
教科书先以一个设计人体雕像的实际问题作为开篇，并在 21.1 节中又给出两个实际问题，通过建立方程，引导学生思考这些方程的共同特点，从而归纳得出一元二次方程的概念、一般形式，给出一元二次方程根的概念。在这个过程中，通过归纳一些具体方程的共同特点，定义一元二次方程的概念，体现了研究代数学问题的一般方法；一般形式 $ax^2+bx+c=0$ 也是对具体方程从“元”（未知数的个数）、“次数”和“项数”等角度进行归纳的结果； $a \neq 0$ 的规定是由“二次”所要求的，这实际上也是从不同侧面理解一元二次方程概念的契机。

一元二次方程的解法，包括配方法、公式法和因式分解法等，是全章的重点内容之一。教科书在 21.2 节中，首先通过实际问题，建立了一个最简单的一元二次方程，并利用平方根的意义，通过直接开平方法得到方程的解；然后将它一般化为 $x^2=p$ ，通过分类讨论得到其解的情况，从而完成解一元二次方程的奠基。接着，教科书安排“探究”栏目，自然引出解 $(x+3)^2=5$ 并总结出“降次”的策略，从而为用配方法解比较复杂的一元二次方程作好铺垫，然后教科书重点讲解了配方的步骤，并归纳出通过配方将一元二次方程转化为 $(x+n)^2=p$ 后的解的情况。以配方法为基础，教科书安排了“探究”栏目，引导学生自主地用配方法解一般形式的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ，得到求根公式。最后，通过实际问题，获得一个显然可以用“提取公因式法”而达到“降次”目的的方程，从而引出因式分解法解一元二次方程，并在“归纳”栏目中总结出几种解法的基本思路、各自特点和适用范围等。上述过程的思路自然，体现了从简单的、特殊的问题出发，通过逐步推广

而获得复杂的、一般的问题，并通过将一般性问题化归为特殊问题，获得这一类问题的解。这是具有普适性的数学思想方法。

由于限定在实数范围，因此对求根公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ，首先要关注判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的讨论。这是使学生领悟分类讨论数学思想方法的契机。另一方面，求根公式不仅直接反映了方程的根由系数唯一确定（系数 a, b, c 确定，方程就确定，其根自然就唯一确定），而且也反映了根与系数的联系。这里体现了一种多角度看问题的思想观点，而“韦达定理”是根与系数联系性的更简洁的表现方式。教科书仍然采用从特殊到一般的方法，先讨论“将方程 $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ 化为 $x^2 + px + q = 0$ 的形式， x_1, x_2 与 p, q 之间的关系”，在“ $x_1 + x_2 = -p, x_1 x_2 = q$ ”的启发下，利用求根公式求 $x_1 + x_2$ 和 $x_1 x_2$ ，进而得到根与系数的关系。让学生学习根与系数的关系，不仅能深化对一元二次方程的理解，提高用一元二次方程分析和解决问题的能力，而且也是培养学生发现和提出问题的能力的机会。根与系数的关系是求根公式的自然延伸，得出它的过程并不复杂，而其中蕴含的思想很重要。所以，对于根与系数的关系，教科书着重在其数学思想的启发和引导上，而对用根与系数的关系去解决问题，严格地控制了难度。

前已述及，用一元二次方程解决实际问题本章内容的一条主线。为了更好地体现这一思想，教科书除在一元二次方程的概念、表示和解法研究中注重从实际问题出发外，在 21.3 节还专门安排了三个“探究”，让学生建立一元二次方程模型解决实际问题，再一次经历如下过程：



最后，在本章小结中，教科书通过知识结构图，再次强调建立一元二次方程模型解决实际问题的基本过程，并在“回顾与思考”中梳理了“降次”的基本思路、过程以及具体方法。

四、课时安排

本章教学时间约需 13 课时，具体分配如下（仅供参考）：		
21.1	一元二次方程	1 课时
21.2	解一元二次方程	7 课时
21.3	实际问题与一元二次方程	3 课时
数学活动		
小结		
		2 课时

五、编写本章时考虑的问题

1. 注重联系实际，体现建模思想，发展应用意识

一元二次方程是初中数学中最重要的数学模型之一，它有丰富的实际背景。通过建立一元二次方程模型解决实际问题，可以使学生更深入地体会数学与现实世界的联系，发展学生的应用意识。因此，本章的编写，自始至终都注重联系实际，从实际问题中引出一元二次方程的有关知识，并最

终回到建立一元二次方程模型解决实际问题中去。

本章开篇,教科书利用人体雕像这一典型的黄金分割问题,通过建立数学模型得到一个一元二次方程,由此引发学习本章内容的需要。接着,通过制作无盖方盒问题和邀请参赛球队的个数问题,又得到两个一元二次方程,然后引导学生从“未知数的个数”和“最高次数”两个方面进行归纳,抽象出一元二次方程的概念及其数学符号表示(一元二次方程的一般形式)。在讨论一元二次方程的解法时,教科书又通过简单的实际问题,引导学生分析其中的已知量、未知量和等量关系,建立一元二次方程,得出方程的解,并检验所得的结果是否符合实际,最终将问题推广,得出具有一般意义的一元二次方程的解法。在掌握解法的基础上,专门安排了“实际问题与一元二次方程”,以“探究”的方式提出问题,使学生完整地经历“问题情境—建立模型—求解验证”的数学活动过程。这样编排,不仅可以使学生认识到学习一元二次方程是解决实际问题的需要,而且还可以使学生在学会一元二次方程解法的过程中,体验运用数学知识解决实际问题的基本过程,积累数学活动经验,从而培养模型思想,逐步形成应用意识。

2. 重视相关的知识联系,建立合理的逻辑过程,突出解方程的基本策略

对于方程及其解法,学生从小学就开始接触。进入初中后,学生又学习了一元一次方程、二元一次方程组以及可化为一元一次方程的分式方程。因此,学生对于解方程涉及的数学思想(化归)、理论依据(等式的性质、运算律)以及基本思路(通过恒等变形,把方程逐步化为 $x=a$ 的形式)等都已比较熟悉。对于一元二次方程的解法,基本思路仍然是“设法把方程化为 $x=a$ 的形式”,而一元二次方程与熟悉的方程比较,差异在“次数”。因此,将“二次”降为“一次”就能使“新方程”转化为“旧方程”,这样就明确了解一元二次方程的关键问题——如何降次。

教科书采用从特殊到一般、从具体到抽象的方法,从熟悉的方程 $x^2=p$ 出发,经过不断推广而得到一般的 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$);探究解法时,则利用“配方法”,把“新方程”化归为已解决的形式。具体过程如下:

首先,根据平方根的意义,通过直接开平方得到方程 $x^2=25$ 的解,再推广到求方程 $x^2=p$ 的解,引导学生对 $p>0$, $p=0$ 和 $p<0$ 三种情况进行讨论。

然后,通过分析变式 $(x+3)^2=5$ 的解决过程,归纳出“把一个一元二次方程‘降次’,转化为两个一元一次方程”的思路,再给出 $(x+3)^2=5$ 的等价形式 $x^2+6x+4=0$,并用框图表示将 $x^2+6x+4=0$ 转化为 $(x+3)^2=5$ 的过程,最后归纳出“配方法”。在此基础上,引导学生讨论通过配方将一元二次方程转化为 $(x+n)^2=p$ 的形式后的解,让他们再次经历分类讨论的过程。

接着,再通过“探究 任何一个一元二次方程都可以写成一般形式 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) (Ⅲ)。能否也用配方法得出(Ⅲ)的解呢?”让学生借助用配方法解一元二次方程的已有经验,自主推导出求根公式。

上述过程,让学生反复经历了“具体—抽象”“配方—分类讨论”的过程,不仅获得了求根公式,而且有利于突破两个难点:针对一般形式的一元二次方程的配方,分类讨论。

再接着,通过实际问题得到方程 $10x-4.9x^2=0$,学生很容易想到,这个方程不需要通过配方、开平方降次,只要通过因式分解,将方程化为 $x(10-4.9x)=0$,就能实现降次。然后再进行归纳,得出针对某些方程的简便解法——因式分解法。实际上,这是一个“从一般到特殊”的过程,针对某些特殊形式的一元二次方程的特殊解法。数学中,一般都要在研究一般情况后,再看看有什么特殊情况。考察“特例”是数学研究的基本套路。

最后进行根与系数关系的研究。从“发现和提出数学问题”的角度看,研究一元二次方程的解

法是“给定方程的系数，求未知数的值”。另一方面，我们也可以这样提出问题：已知一元二次方程的两个根，能否求出它的系数的值？事实上，方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 总可以化为 $x^2+px+q=0$ 的形式。如果 $x^2+px+q=0$ 的两个根为 x_1, x_2 ，则有 $(x-x_1)(x-x_2)=0$ ，展开并比较方程的系数，就容易得到 $p=-(x_1+x_2)$ ， $q=x_1x_2$ 。由此得到启发，利用求根公式求 x_1+x_2 和 x_1x_2 ，可得到根与系数的关系。教科书在一定程度上体现了上述逻辑思考过程。

3. 注重培养发现和提出问题、分析和解决问题的能力

因为学生已经具备研究一元二次方程的概念、解法的知识基础，只要他们能把这些知识调动起来，应用到研究中去，他们就能独立地发现解法，所以教科书注重通过栏目和“边空设问”等方式启发学生的思维，为他们提供独立探究的机会。例如：

(1) 引入一元二次方程概念的过程中，教科书在“边空”中多次安排提示性设问“方程中未知数的个数和最高次数各是多少？”再在“思考”栏目中提出归纳几个方程共同特点的学习任务；在给出一元二次方程概念、一般形式后，通过“为什么规定 $a \neq 0$ ？”引导学生辨析概念。最后通过例题，让学生用概念作判断。这样安排，体现了概念学习的一般过程，教科书在归纳具体方程的共同特点、辨析概念的关键词等关键环节设置问题，引导学生进行独立思考与发现。

(2) 在探索一元二次方程解法的过程中，教科书在讨论了“方程 $x^2=p$ 的解”以后，循序渐进地安排了如下栏目：

探究 对照上面解方程 (I) 的过程，你认为应怎样解方程 $(x+3)^2=5$ ？

探究 怎样解方程 $x^2+6x+4=0$ ？

在上述两个“探究”的基础上，讨论“如果一个一元二次方程通过配方转化成 $(x+n)^2=p$ 的形式，那么它的解有哪些情形？”

探究 任何一个一元二次方程都可以写成一般形式 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) (III)。能否也用配方法得出 (III) 的解呢？

思考 除配方法或公式法以外，能否找到更简单的方法解方程①？

上述过程中，教科书通过“一般化”“推广”“特殊化”等，引导学生不断地发现问题、解决问题。

(3) 在“实际问题与一元二次方程”中，教科书以“探究”栏目的方式给出例题，在分析题意、解决问题的过程中，通过“边空提问”提示学生思考数学结论的现实意义，并通过“思考”栏目进一步提出拓展性、开放性问题。例如，解决了“探究1 有一个人患了流感，经过两轮传染后共有121个人患了流感，每轮传染中平均一个人传染了几个人？”以后，教科书提出了两个问题：

通过对这个问题的探究，你对类似的传播问题中的数量关系有新的认识吗？

如果按照这样的传染速度，经过三轮传染后共有多少个人患流感？

对这些问题的思考，可以加深学生对“传播问题”的认识，感受与“增长率”相关的数学模型中的数量关系，同时还能培养学生用数学模型解释现实问题的能力，这就是一个培养分析问题和解决问题能力的过程。

六、对本章教学的建议

1. 为学生构建研究一元二次方程解法的连贯过程

宏观而言，学生已具备解一元二次方程的基本思想——化归，即把方程转化为一次方程，最终化为 $x=a$ ；而且也具有将一元二次方程转化为一次方程所需要的平方根、配方、因式分解等知识

基础. 问题在于学生在面对解一元二次方程的任务时, 不知道该用这些知识及其思想方法, 也就是说他们“不是做不到, 而是想不到”. 因此, 教学的关键是要通过适当的问题提示, 把这些知识调动起来, 联系起来, 使它们在研究解法中发挥作用. 具体而言, 可以按如下线索安排:

实际背景引入(如章引言中的方程)→从已有经验中总结解方程的一般思想方法(化归为一元一次方程)→类比二元一次方程组的“消元”, 得到解一元二次方程的思路“降次”→从简单、具体、特殊的一元二次方程(如 $x^2=25$, $x^2=p$; $(x+3)^2=5$, $x^2+6x+4=0$, $(x+n)^2=p$ 等)探索“降次”的方法(直接开平方、配方法)→用配方法推导求根公式(公式法)→针对特殊的一元二次方程的特殊解法(因式分解法).

教学过程中, 要注意整体性, 让学生经历研究一元二次方程解法的完整过程, 避免不同解法之间的割裂. 其中, 方程 $x^2=p$ 的解具有奠基作用, 特别是对 p 的分类讨论, 蕴含了对判别式的分类讨论, 所以一定要认真处理好; 推广的方程 $(x+3)^2=5$ 与 $x^2+6x+4=0$ 是获得配方法的载体; 配方法是公式法的基础; 公式法是直接利用公式求根, 省略了配方过程; 因式分解法是解特殊形式的一元二次方程的简便方法.

为了让学生获得解一元二次方程的方法, 教学中应加强类比、从特殊到一般等思想方法的引导.

2. 注重模型思想、应用意识的培养

许多现实问题的数量关系都可以抽象为一元二次方程, 与前面所学的方程比较, 一元二次方程有更广泛的应用, 是初中学生体会和理解数学与外部世界联系的重要载体. 教科书充分考虑到一元二次方程的这一地位, 教学中要体现好这一编写意图, 注意让学生经历建立和求解一元二次方程模型的完整过程, 即从现实生活或具体情境中抽象出数学问题, 用数学符号建立一元二次方程表示数学问题中的数量关系, 求出结果并讨论结果的意义, 从而把模型思想、应用意识的培养落在实处.

在建立数学模型解决实际问题的过程中, 难点在于数量关系的分析和数学模型的选择, 本章也不例外. 教学中应注意引导学生仔细分析题意, 借助适当的直观工具, 如画图、列表等, 找出问题中的已知量、未知量, 找到关键词并由此确定等量关系, 进而建立一元二次方程. 要注意培养学生良好的解题习惯, 包括借助直观方法分析题意、检验所得方程及其根的实际意义, 找出合乎实际的结果等.

3. 注意控制教学要求

学习本章的主要目的是让学生掌握一元二次方程模型并能灵活用于解决问题. 其中, 学习根与系数关系的目的在于使学生更深入地体会根与系数的确定性关系, 更全面地认识一元二次方程. 传统上, 针对判别式、根与系数的关系等往往要进行大量的形式化训练, 这对锻炼学生的思维有一定好处, 但复杂的代数变形对提高学生的数学能力(特别是数学建模能力)没有多大帮助. 因此, 要注意把握好这些教学要求, 控制好形式化训练的难度, 特别是不要搞用根与系数的关系解决其他问题的训练.

为了提高学生的发现和提出问题的能力, 可以把“根与系数的关系”设置为一个研究性学习课题. 例如, 引导学生思考“系数 a, b, c 确定, 那么方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 确定, 它的两个根也唯一确定. 反之, 如果已知一元二次方程的两个根, 系数是否也唯一确定?”然后展开研究. 进一步地还可以让学生思考几个独立条件确定一个一元二次方程、方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的两个根与二次三项式 ax^2+bx+c ($a \neq 0$) 的因式分解等问题.

第二十一章 一元二次方程

[1] 这里先把比例式转化, 是为了避免出现分式方程.

[2] 这幅图是辽宁抚顺雷锋纪念馆前的雷锋雕像. 它配合引言中的人体雕像上下高度比问题, 本章由这个问题引出一元二次方程.

在设计人体雕像时, 使雕像的上部(腰以上)与下部(腰以下)的高度比, 等于下部与全部(全身)的高度比, 可以增加视觉美感. 按此比例, 如果雕像的高为 2 m, 那么它的下部应设计为多高?

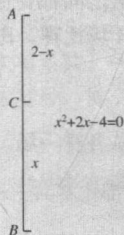
如图, 雕像的上部高度 AC 与下部高度 BC 应有如下关系:

$$AC : BC = BC : 2, \text{ 即 } BC^2 = 2AC. [1]$$

设雕像下部高 x m, 可得方程 $x^2 = 2(2-x)$, 整理得

$$x^2 + 2x - 4 = 0.$$

这个方程与我们学过的一元一次方程不同, 其中未知数 x 的最高次数是 2. 如何解这类方程? 如何用这类方程解决一些实际问题? 这就是本章要学习的主要内容.



1. 方程是应用广泛的数学模型, 在初中数学课程中占有重要地位. 本套教科书中, 方程内容出现的顺序是: 一元一次方程(七年级上), 二元一次方程组(七年级下), 分式方程(八年级上), 一元二次方程(九年级上).

2. 整式方程按其中未知数(元)的个数和未知数的最高次数分类. 一元二次方程与前面所学整式方程相比, 变化在于未知数的最高次数由一次升为二次, 从而使一元二次方程的解法更多

样、更复杂. 一般地, 解代数方程(组)的基本思路是化归为一元一次方程, 所以把方程由二次降为一次是解一元二次方程的基本策略.

3. 本章注重在分析、解决实际问题的过程中讲解数学知识. 开篇的引入问题是人体雕像设计问题, 转化为几何问题, 就是要确定线段的外比分点, 也称为黄金分割问题. 本章在 21.2 节后安排了选学内容“阅读与思考 黄金分割数”, 对这一问题作了拓展性介绍.

[1] 为了制作无盖方盒, 铁皮各角切去的正方形应大小相同.

[2] 这是对观察方向上的引导.

[3] 这种比赛形式也叫做单循环比赛, 其特点是任何两队之间都要比赛一场, 而且只比赛一场.

21.1 一元二次方程

方程

$$x^2 + 2x - 4 = 0$$

①

中有一个未知数 x , x 的最高次数是 2. 像这样的方程有广泛的应用, 请看下面的问题.

问题 1 如图 21.1-1, 有一块矩形铁皮, 长 100 cm, 宽 50 cm, 在它的四角各切去一个同样的正方形, 然后将四周突出部分折起, 就能制作一个无盖方盒. 如果要制作的无盖方盒的底面积为 $3\,600\text{ cm}^2$, 那么铁皮各角应切去多大的正方形?^[1]

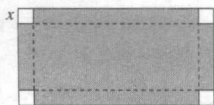


图 21.1-1

设切去的正方形的边长为 x cm, 则盒底的长为 $(100-2x)$ cm, 宽为 $(50-2x)$ cm. 根据方盒的底面积为 $3\,600\text{ cm}^2$, 得

$$(100-2x)(50-2x) = 3\,600.$$

整理, 得

$$4x^2 - 300x + 1\,400 = 0.$$

化简, 得

$$x^2 - 75x + 350 = 0. \quad \text{②}$$

由方程②可以得出所切正方形的具体尺寸.

方程②中未知数的个数和最高次数各是多少?^[2]

问题 2 要组织一次排球邀请赛, 参赛的每两个队之间都要比赛一场.^[3] 根据场地和时间等条件, 赛程计划安排 7 天, 每天安排 4 场比赛, 比赛组织者应邀请多少个队参赛?

全部比赛的场数为 $4 \times 7 = 28$.

设应邀请 x 个队参赛, 每个队要与其他 $(x-1)$ 个队各赛一场, 因为甲队对乙队的比赛和乙队对甲队的比赛是同一场比赛, 所以全部比赛共 $\frac{1}{2}x(x-1)$ 场.

列方程

$$\frac{1}{2}x(x-1) = 28.$$

1. 本节在引言的基础上, 安排两个实际问题, 得出一元二次方程的具体例子, 再引导学生观察三个具体方程, 发现它们在形式上的共同点, 给出一元二次方程的概念及其表示. 这个过程体现了概念学习的一般进程: 分析典型丰富的具体例证, 抽取不同事例的共同特征、舍弃非本质特征, 概括得到概念, 给出符号表示, 并对关键词进行辨析, 再通过例子巩固概念. 这里, 通过现实问题认识概念, 是为了增强学生对一元二

次方程与现实生活的联系的认识.

2. 一元 n 次方程的一般形式是: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ ($a_0 \neq 0$), 这里是以未知数个数和次数为标准定义的. 一元二次方程是一种简单的多项式方程, 其一般形式为 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). 教科书根据概念的这一要求, 在具体例子的归纳方向上作出引导, 以利于学生思考, 并给出辨析性问题: “为什么规定 $a \neq 0$?” 教学时应让学生充分经历这一过程.

整理,得

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x = 28.$$

化简,得

$$x^2 - x = 56.$$

③

由方程③可以得出参赛队数.

方程③中未知数的个数和最高次数各是多少?



思考

方程①②③有什么共同点?^[1]

可以发现,这些方程的两边都是整式,方程中只含有一个未知数,未知数的最高次数是2.同样地,方程 $4x^2=9$, $x^2+3x=0$, $3y^2-5y=7-y$ 等也是这样的方程.像这样,等号两边都是整式,只含有一个未知数(一元),并且未知数的最高次数是2(二次)的方程,叫做一元二次方程(quadratic equation in one unknown).

一元二次方程的一般形式是

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0).$$

其中 ax^2 是二次项, a 是二次项系数; bx 是一次项, b 是一次项系数; c 是常数项.

使方程左右两边相等的未知数的值就是这个一元二次方程的解,一元二次方程的解也叫做一元二次方程的根(root).

例 将方程 $3x(x-1)=5(x+2)$ 化成一元二次方程的一般形式,并写出其中的二次项系数、一次项系数和常数项.

解:去括号,得

$$3x^2-3x=5x+10.$$

移项,合并同类项,得一元二次方程的一般形式

$$3x^2-8x-10=0.$$

其中二次项系数为3,一次项系数为-8,常数项为-10.

为什么规定 $a\neq 0$?^[2]

[1] 思考三个方程的共同点,是为给出一元二次方程的概念作准备.前面在观察方程的特点上已经作了引导.

[2] 用字母 a, b, c 表示具体的常数,这些字母可以取不同的值,但 $a\neq 0$,否则方程就不是二次的了.

3. 列方程的问题贯穿本节始终.这样安排,既可以使学生认识引入一元二次方程概念的现实必要性,也可以分散列方程这一教学难点,循序渐进地培养从实际问题中抽象方程模型的能力.本节的重点是理解一元二次方程概念及其有关概念,其中涉及一元二次方程根的概念,但教学中不要过早把学生的注意力引向解方程.