普通高等教育“十三五”规划教材

国家特色专业建设点建设项目

数学分析立体化教材／刘名生　冯伟贞 主编

数学分析学习辅导 III
——习题选解

刘名生　冯伟贞　韩彦昌　翁 文 编著

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材
国家特色专业建设点建设项目
数学分析立体化教材/刘名生 冯伟贞 主编

数学分析学习辅导III
——习题选解

刘名生 冯伟贞 韩彦昌 翁 文 编著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

数学分析立体化教材是作者在华南师范大学讲授数学分析及相关课程 20 多年的经验基础上写成的，有一些独到见解与体会．全套书在可读性、系统性和逻辑性上各具特色，并将分层教学的理念贯穿其中．首先在可读性方面，对于重要概念，只给一种定义形式，其他的等价定义放在思考题或习题中，对定理尽量用朴素的方法证明，对书中的例题表达尽量详细，让学生容易自学．其次在系统性方面，将关系较密切的内容放在一起，例如，将发散数列和子列的概念放在同一节等．另外，给出了有理函数分解为部分分式理论的详细证明．最后在逻辑性方面，尽量在给出定理的同时，也完成对定理的证明．

本书主要对《数学分析(一)》《数学分析(二)》《数学分析(三)》中的部分习题提供详细解答，目的是为初学者提供解题示范作用．并在书末提供了近几年华南师范大学数学分析考研真题，便于教师在教学中使用和学生在学习时练习使用．

本书可作为数学分析主教材相关章节配套，也可作为微积分教材的参考书．

图书在版编目(CIP)数据

数学分析学习辅导．III．习题选解/刘名生等编著．—北京：科学出版社，2018.5

普通高等教育“十三五”规划教材·国家特色专业建设点建设项目·数学分析立体化教材

ISBN 978-7-03-057240-0

I. ①数… II. ①刘… III. ①数学分析–高等学校–题解 IV. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 083291 号

责任编辑：王胡权 李 萍／责任校对：杜子昂 樊雅琼
责任印制：师艳茹／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

石家庄继文印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 5 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2018 年 5 月第一次印刷 印张：26
字数：519 000

定价：65.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

《数学分析立体化教材》序言

《数学分析立体化教材》通过提供多种教学资源给出数学分析课程的整体教学解决方案. 本立体化教材包括二维码新形态主教材三册:《数学分析 (一)》(第二版)、《数学分析 (二)》(第二版)、《数学分析 (三)》(第二版), 学习辅导书三册:《数学分析学习辅导 I —— 收敛与发散》、《数学分析学习辅导 II —— 微分与积分》、《数学分析学习辅导III—— 习题选解》; 另外, 本立体化教材还配有数学分析精品资源共享课一门.

三册主教材的编写考虑不同教学基础的学校和不同层次的学生在教学方面的不同需求, 在较充分顾及系统的完整性的基础上, 特别标记了选学内容. 教师对教材中的选学内容可以作灵活取舍, 以及适当调整相关内容的讲授或阅读次序. 我们希望这种编排能更好地帮助教师落实分类、分层教学, 同时使学生获得合理的阅读指引. 主教材的编写力求在可读性、系统性和逻辑性上能各具特色, 并将分层教学的理念贯穿全书. 主教材的建设, 在数字化资源配套方面做了一定的工作, 内容的呈现更加丰富、饱满, 呈现方式更加生动、直观. 我们对书中的许多概念、定理和方法配有小视频, 使在书中无法写出来的一些内容通过小视频提供给读者, 从而使得教材能更好地支持学生的自主学习.

在数学分析学习过程中, 学生往往因为欠缺学习自主意识或基础、能力, 难以驾驭一个较大数学知识体系的学习, 造成自我知识体系零碎、割裂, 这是数学分析教学中存在的主要问题及教学难点.《数学分析学习辅导 I —— 收敛与发散》、《数学分析学习辅导 II —— 微分与积分》两册辅导书的编写均立足类比, 希望教学双方在求同存异的思想的指引下, 打通知识点的关联, 在反复对比中深化对基本数学思想方法的理解及强化对问题解决技巧的掌握, 从而突破教学障碍. 我们力求在可读性和系统性上能够编出特色.《数学分析学习辅导 I —— 收敛与发散》主要解决数学分析中的收敛与发散及相关的一些问题, 包括点列的收敛与发散、函数极限的存在性、$\mathbb{R}^n$ 的完备性、反常积分的收敛与发散、数项级数的收敛与发散、函数项级数的收敛与一致收敛以及函数的展开与级数的求和.《数学分析学习辅导 II —— 微分与积分》主要研究数学分析中的微分与积分及相关的一些问题, 包括一元函数微分学、一元函数微分法的应用、一元函数积分学、多元函数及其微分学、多元函数微分法的应用、重积分、曲线积分和曲面积分以及各种积分之间的关系.

《数学分析学习辅导III—— 习题选解》对三册主教材中的大约一半的习题和复习题提供详细解答, 并在书末附录中提供了 2013~2017 年华南师范大学的数学分

析考研真题, 希望对使用本教材的教师和学生有所帮助.

数学分析精品资源共享课由课程简介、课程学习、图形与课件、测试题库、方法论、拓展阅读及学习论坛和教学录像等模块构成, 在课程简介中提供了数学分析课程的教学日历、教学大纲和学习方法指引等课程资料, 在课程学习中提供了数学分析 (一)、数学分析 (二) 和数学分析 (三) 等课程的完整课件, 在测试题库中提供了华南师范大学数学科学学院 2004~2014 级本科生的数学分析期末考试题, 在教学录像中提供了 5 位教师多次数学分析课的教学录像, 为教学双方提供了丰富的教学资源. 我们希望这门精品资源共享课能成为实施数学分析混合学习的理想平台.

本立体化教材的编写得到“数学与应用数学国家特色专业”建设项目、“数学与应用数学广东省高等学校重点专业”建设项目及“数学与应用数学国家专业综合改革建设项目”的资助, 第一版在华南师范大学数学科学学院的 2008~2016 级本科生及综合班中使用, 也被多所兄弟院校作为数学系学生的数学分析课程的教材.

借此机会衷心感谢华南师范大学数学科学学院领导和科学出版社领导对本立体化教材编写的大力支持. 对编辑们付出的辛勤劳动, 在此表示诚挚的谢意. 希望广大读者批评指正, 以使本立体化教材得到进一步完善, 为数学分析课程建设和一流人才培养作出更大的贡献.

刘名生　冯伟贞

2017 年 9 月于华南师范大学

前　言

数学分析是数学各专业学生任务最重的课程, 需要三个学期才能完成. 大多数学生和教师都希望有一套好的辅导教材. 我们根据多年的教学经验, 在吸取一些现有数学分析辅导教材优点的基础上, 编写了本套数学分析学习辅导教材.

我们从收敛与发散、微分与积分两个方向编写，力求在可读性和系统性上能够编出特色.《数学分析学习辅导 I——收敛与发散》主要解决数学分析中的收敛与发散及相关的一些问题, 包括点列的收敛与发散、函数极限的存在性、$\mathbb{R}^n$ 的完备性、反常积分的收敛与发散、数项级数的收敛与发散、函数项级数的收敛与一致收敛以及函数的展开与级数的求和.《数学分析学习辅导 II——微分与积分》主要研究数学分析中的微分与积分及相关的一些问题, 包括一元函数微分学、一元函数微分法的应用、一元函数积分学、多元函数及其微分学、多元函数微分法的应用、重积分、曲线积分和曲面积分以及各种积分之间的关系.

首先, 在可读性方面, 每一章都编有疑难解析, 读者通过阅读疑难解析, 对这一章的主要概念有清楚的认识. 然后通过典型例题讲述这一章的各种典型例题和解题方法, 而且在每个例题中均给出了详细的解法, 明确指出涉及的定义和定理, 还有“分析”或者“注”, 教会读者如何分析问题和解决问题. 在每章后面还有练习题, 供读者练习使用. 书后还附有练习题的答案或提示.

其次, 在系统性方面, 我们理出了“收敛与发散”“微分与积分”两条主线, 沿着这两条主线, 本着求同存异的思想, 展开对同一维度下的不同模型、不同维度下的同一模型的分析性质的讨论, 使概念、性质及方法的运用共性能够凸显, 并使其中的“差异”及“特点”受到关注. 我们将关系较密切的内容放在一起. 例如, 将数列的收敛与发散和点列的收敛与发散放在同一章；将一元函数极限的存在性和多元函数极限的存在性放在同一章；将反常积分的收敛与发散和含参变量反常积分的收敛与一致收敛放在同一章；将函数的展开与级数的求和放在同一章. 这样更容易了解这些内容之间的联系与差别. 我们希望读者能够通过学习本教材, 清楚理解数学分析中相关内容之间的联系. 例如, 在点列的收敛与发散这一章中, 讲述了数列的收敛与发散和 $\mathbb{R}^n$ 中点列的收敛性, 学生通过学习与比较, 熟悉 $\mathbb{R}^n$ 中点列的收敛性与数列的收敛性的关系. 在反常积分的收敛与发散这一章中, 讲述了反常积分的收敛与发散和含参变量反常积分的收敛与一致收敛的内容, 学生在学习含参变量反常积分的内容前, 要先复习反常积分的内容, 并且在学习中, 学生可以在不停地比较中掌握它们之间的区别与联系.

最后, 考虑到一些学生和教师的需要, 我们加编了《数学分析学习辅导III—— 习题选解》, 主要对三册主教材中的大约一半的习题和复习题提供详细解答, 并在书末附录中提供了 2013~2017 年华南师范大学的数学分析考研真题, 希望对使用本教材的教师和学生有所帮助.

本套辅导教材编写分工如下:《数学分析学习辅导 I —— 收敛与发散》由刘名生、冯伟贞和罗世平编写,《数学分析学习辅导 II —— 微分与积分》由刘名生、韩彦昌、徐志庭和冯伟贞编写, 《数学分析学习辅导III—— 习题选解》由刘名生、冯伟贞、韩彦昌和翁文编写. 初稿完成后, 编写组全体成员多次仔细讨论、评阅和修改. 全书由刘名生和冯伟贞负责编写的组织工作.

本套辅导教材在编写过程中得到华南师范大学数学科学学院许多同事的支持, 并得到“数学与应用数学国家特色专业”建设项目、“数学与应用数学广东省高等学校重点专业”建设项目及“数学与应用数学国家专业综合改革建设项目”的资助. 我们在华南师范大学数学科学学院 2011~2016 级师范班、2011 级、2012 级和 2014 级勷勤创新班以及 2016 级非师范班的数学分析课程中试用了本套辅导教材, 2011~2016 级师范班、2011 级、2012 级和 2014 级勷勤创新班以及 2016 级非师范班的学生为本套辅导教材的完善提供了许多宝贵意见, 在此一并致谢. 我们还要对科学出版社编辑们付出的辛勤劳动表示诚挚的感谢.

由于编者水平及时间有限，疏漏和不足之处在所难免, 敬请读者批评指正.

编　者

2017 年 9 月于华南师范大学

目　　录

第 1 章　实数与数列极限

习　题　1.1

1. 设 $r \in \mathbb{Q}, t \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, 且 $r \neq 0$, 试证明: $t \pm r, t \cdot r, \dfrac{t}{r}$ 都是无理数.

证明　注意到有理数集合 $\mathbb{Q}$ 关于加、减、乘、除 (除数不能为零) 运算都是封闭的. 用反证法, 假定 $t+r$ 是有理数, 由于 $r \in \mathbb{Q}$, 所以 $t=(t+r)-r \in \mathbb{Q}$, 这与 $t \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 相矛盾, 因此 $t+r$ 是无理数.

同理可证, $t-r, t \cdot r, \dfrac{t}{r}$ 都是无理数. □

3. 证明: 对于任何实数 x 和 a, 有

(2) $\dfrac{|a+x|}{1+|a+x|} \leqslant \dfrac{|a|}{1+|x|}+\dfrac{|x|}{1+|x|}$.

证明　根据三角不等式得, $|a+x| \leqslant |a|+|x|$, 所以

$$\begin{aligned}
\frac{|a+x|}{1+|a+x|} &= 1-\frac{1}{1+|a+x|} \\
&\leqslant 1-\frac{1}{1+|a|+|x|}=\frac{|a|+|x|}{1+|a|+|x|} \\
&\leqslant \frac{|a|+|x|}{1+|x|},
\end{aligned}$$

因此 $\dfrac{|a+x|}{1+|a+x|} \leqslant \dfrac{|a|}{1+|x|}+\dfrac{|x|}{1+|x|}$. □

注　类似可以证明如下不等式:

$$\begin{aligned}
\frac{|a+x|}{1+|a+x|} &\leqslant \frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|x|}{1+|x|}, \\
\frac{|a+x|}{1+|a+x|} &\leqslant \frac{|a|}{1+|x|}+\frac{|x|}{1+|a|}.
\end{aligned}$$

5. 设 n 是正整数, $a>0, b>0$, 试证明:

$$\left|\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\right| \leqslant \sqrt[n]{|a-b|}.$$

证明　分三种情况证明, 当 $a=b$ 时, 所证不等式显然成立.

当 $a>b$ 时, 所证不等式等价于 $\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b} \leqslant \sqrt[n]{a-b}$, 这又等价于

$$\left(\sqrt[n]{a-b}+\sqrt[n]{b}\right)^{n} \geqslant a.$$

事实上, 由二项式公式得

$$
\begin{aligned}
(\sqrt[n]{a-b}+\sqrt[n]{b})^n &= (\sqrt[n]{a-b})^n + \mathrm{C}_n^1(\sqrt[n]{a-b})^{n-1}\sqrt[n]{b}+\cdots \\
&\quad +\mathrm{C}_n^{n-1}\sqrt[n]{a-b}(\sqrt[n]{b})^{n-1}+(\sqrt[n]{b})^n \\
&\geqslant (a-b)+b=a.
\end{aligned}
$$

所以所证不等式成立.

同理可证, 当 $a<b$ 时, 所证不等式也成立. □

7. 设 n 是正整数, $0<a<1$, 试证明: $0<a^n<\dfrac{a}{n(1-a)}$.

证明　令 $h=\dfrac{1}{a}-1$, 则 $h>0$, 于是根据 Bernoulli 不等式得

$$
0<a^n=\frac{1}{(1+h)^n}\leqslant\frac{1}{1+nh}<\frac{1}{nh},
$$

所以

$$
0<a^n<\frac{a}{n(1-a)}. \qquad \square
$$

习　题　1.2

1. 用数列极限的“ε-N”定义验证下列极限:

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n-2}=\dfrac{2}{3}$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

证明　(2) $\forall\varepsilon>0$, 要使不等式

$$
\left|\frac{2n+1}{3n-2}-\frac{2}{3}\right|=\frac{7}{3(3n-2)}<\varepsilon
$$

成立, 只要 $n>\dfrac{7}{9\varepsilon}+\dfrac{2}{3}$, 于是取 $N=\left[\dfrac{7}{9\varepsilon}+\dfrac{2}{3}\right]+1\in\mathbb{N}_+=\{1,2,\cdots\}$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$
\left|\frac{2n+1}{3n-2}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon,
$$

因此根据“ε-N”定义得, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n-2}=\dfrac{2}{3}$.

(4) $\forall\varepsilon>0$, 由于

$$
\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-0\right|=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{n}},
$$

所以要使不等式

$$\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-0\right|<\varepsilon$$

成立, 只要 $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}<\varepsilon$, 即 $n>\dfrac{1}{4\varepsilon^2}$, 于是取 $N=\left[\dfrac{1}{4\varepsilon^2}\right]+1\in\mathbb{N}_+=\{1,2,\cdots\}$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-0\right|<\varepsilon,$$

因此根据"ε-N"定义得, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0$.

(6) $\forall\varepsilon>0$, 由于

$$\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|=\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n}\leqslant\frac{1}{n},$$

所以要使 $\left|\dfrac{n!}{n^n}-0\right|<\varepsilon$, 只要 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$, 即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$. 因此可取 $N=\dfrac{1}{\varepsilon}$, 使当 $n>N$ 时, 有 $\left|\dfrac{n!}{n^n}-0\right|<\varepsilon$, 故根据"$\varepsilon$-$N$"定义得, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$. □

3. 用"ε-N"语言表达"数列 $\{a_n\}$ 不收敛于 a"这一陈述.

解 "数列 $\{a_n\}$ 不收敛于 a"的"ε-N"语言表达是: $\exists\,\varepsilon_0>0$, $\forall N\in\mathbb{N}_+$, $\exists\,n_0>N$, 使得 $|a_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0$. □

4. 设 $a_{2n}=\dfrac{2n+1}{2n}$, $a_{2n-1}=\dfrac{\sqrt{(2n-1)^2+1}}{2n-1}$, 其中 $n\in\mathbb{N}_+$, 试证明:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=1.$$

证明 由于 $|a_{2k}-1|=\dfrac{1}{2k}$, 以及

$$\begin{aligned}|a_{2k-1}-1|&=\left|\frac{\sqrt{(2k-1)^2+1}}{2k-1}-1\right|=\frac{\sqrt{(2k-1)^2+1}-(2k-1)}{2k-1}\\&=\frac{1}{(2k-1)[\sqrt{(2k-1)^2+1}+(2k-1)]}\\&<\frac{1}{2k-1},\end{aligned}$$

所以

$$|a_n-1|\leqslant\frac{1}{n},$$

因此, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=\dfrac{1}{\varepsilon}>0$, 使当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-1|<\varepsilon$, 故根据"ε-N"定义得, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$. □

习　题　1.3

1. 证明定理 1.3.6(3), 即证明: 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 都是收敛数列, 且 $b_n \neq 0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, 则 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ 也是收敛数列, 且有

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

证明　设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 则 $b \neq 0$, 我们要证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

事实上, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 所以根据"$\varepsilon$-$N$"定义得, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}_+$, 使当 $n > N_1$ 时, 有

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

当 $n > N_2$ 时, 有

$$|b_n - b| < \varepsilon.$$

又由于 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$, 所以根据保号性定理得, $\exists N_3 \in \mathbb{N}_+$, 使当 $n > N_3$ 时, 有

$$|b_n| > \frac{|b|}{2}.$$

因此, 取 $N = \max\{N_1, N_2, N_3\} \in \mathbb{N}_+$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{a_n b - a b_n}{b_n b}\right| \\ &= \frac{|(a_n - a)b + a(b - b_n)|}{|b_n||b|} \\ &\leqslant \frac{|a_n - a||b| + |a||b_n - b|}{\dfrac{|b|}{2} \cdot |b|} \\ &< \frac{2(|a| + |b|)}{b^2}\varepsilon,\end{aligned}$$

故根据"ε-N"定义得, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.　□

2. 证明: 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 且 $a < b$, 那么存在 $N \in \mathbb{N}_+$, 使当 $n > N$ 时, 有 $a_n < b$.

证明　由于 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 和 $a < b$, 所以根据"ε-N"定义得, 对 $\varepsilon_0 = b - a > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}_+$, 使当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - a| < \varepsilon_0 \Rightarrow a_n < a + \varepsilon_0 = b.$$

□

3. 求下列极限:

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n}-2n+1)$; (7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{a^n+1}\,(a\neq -1)$;

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b+b^2+\cdots+b^n}{a+a^2+\cdots+a^n}\,(a>b>0)$; (9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}}$.

解 (5) 利用根式有理化和四则运算可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n}-2n+1)&=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+n-(2n-1)^2}{\sqrt{4n^2+n}+2n-1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{5n-1}{\sqrt{4n^2+n}+2n-1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{4+\dfrac{1}{n}}+2-\dfrac{1}{n}}=\frac{5}{4}.\end{aligned}$$

(7) 分三种情况计算, 当 $a=1$ 时, 显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{a^n+1}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$;
当 $|a|<1$ 时, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{a^n+1}=\frac{0}{0+1}=0;$$

当 $|a|>1$ 时, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{-n}=0$, 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{a^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a^{-n}}=\frac{1}{1+0}=1.$$

(8) 分四种情况计算, 当 $a=1>b>0$ 时, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}b^n=0$, 所以根据 Cauchy 命题得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b+b^2+\cdots+b^n}{a+a^2+\cdots+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b+b^2+\cdots+b^n}{n}=0;$$

当 $1>a>b>0$ 时, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=\lim\limits_{n\to\infty}b^n=0$, 所以,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b+b^2+\cdots+b^n}{a+a^2+\cdots+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{b(1-b^n)}{1-b}}{\dfrac{a(1-a^n)}{1-a}}=\frac{b(1-a)}{a(1-b)};$$

当 $a>b=1>0$ 时, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{a^n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a^{-n}=0$, 所以,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{b+b^2+\cdots+b^n}{a+a^2+\cdots+a^n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\dfrac{a(1-a^n)}{1-a}}\\&=\frac{1-a}{a}\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n}{a^n}}{a^{-n}-1}=\frac{0}{0-1}=0;\end{aligned}$$

当 $a > b > 0, a > 1, b \neq 1$ 时, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{b}{a}\right)^n = 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-n} = 0$, 所以,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b+b^2+\cdots+b^n}{a+a^2+\cdots+a^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{b(1-b^n)}{1-b}}{\dfrac{a(1-a^n)}{1-a}}$$

$$= \frac{b(1-a)}{a(1-b)}\lim_{n\to\infty}\frac{a^{-n}-\left(\dfrac{b}{a}\right)^n}{a^{-n}-1} = 0.$$

(9) 利用根式有理化和四则运算可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1-n)(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-1})}{(n+2-n+1)(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1} = \frac{1}{3}.$$ □

8. 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$, 试证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n} = 0$.

证明　由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$, 以及当 $n > 1$ 时,

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} - \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = a-(1-0)\cdot a = 0.$$ □

习　题　1.4

2. 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是子列 $\{a_{2n}\}$ 与 $\{a_{2n-1}\}$ 都收敛, 且极限相同.

证明　**必要性**　若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则根据推论 1.4.1 得, 子列 $\{a_{2n}\}$ 与 $\{a_{2n-1}\}$ 都收敛, 且极限相同.

充分性　若子列 $\{a_{2k}\}$ 与 $\{a_{2k-1}\}$ 都收敛, 且极限相同, 往证: $\{a_n\}$ 收敛.

事实上, 设 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = a = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1}$, 则根据“$\varepsilon$-$N$”定义得, $\forall\varepsilon > 0, \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}_+$, 使当 $k > N_1$ 时, 有

$$|a_{2k}-a| < \varepsilon,$$