卓越工程技术人才培养特色教材

PROBABILITY AND MATHEMATICAL STATISTICS

概率论与数理统计

郭永强　张艮霞
李志林　李京梁　主编

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS

卓越工程技术人才培养特色教材

概率论与数理统计

主　编　郭永强　张艮霞

李志林　李京梁

编委会　（按姓氏笔画为序）

王平心　左　相　李志林

李京梁　张艮霞　周小玮

徐祖润　郭永强　涂庆伟

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS

镇　江

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 郭永强等主编. — 镇江：江苏大学出版社，2017.6
ISBN 978-7-81130-970-6

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①郭… Ⅲ. ①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 214515 号

概率论与数理统计
Gailülun Yu Shuli Tongji

主　　编/郭永强　张艮霞
　　　　　李志林　李京梁
责任编辑/张小琴
出版发行/江苏大学出版社
地　　址/江苏省镇江市梦溪园巷 30 号(邮编：212003)
电　　话/0511-84446464(传真)
网　　址/http://press.ujs.edu.cn
排　　版/镇江华翔票证印务有限公司
印　　刷/镇江文苑制版印刷有限责任公司
开　　本/718 mm×1 000 mm　1/16
印　　张/15
字　　数/305 千字
版　　次/2016 年 8 月第 1 版　2017 年 6 月第 1 次印刷
书　　号/ISBN 978-7-81130-970-6
定　　价/35.00 元

如有印装质量问题请与本社营销部联系(电话:0511-84440882)

序

深化高等工程教育改革、提高工程技术人才培养质量，是增强自主创新能力、促进经济转型升级、全面提升地区竞争力的迫切要求。近年来，江苏高等工程教育飞速发展，全省46所普通本科院校中开设工学专业的学校有45所，工学专业在校生约占全省普通本科院校在校生总数的40%，为“十一五”末江苏成功跻身全国第一工业大省做出了积极贡献。

“十二五”时期是江苏加快经济转型升级、发展创新型经济、全面建设更高水平小康社会的关键阶段。教育部“卓越工程师教育培养计划”启动实施以来，江苏认真贯彻教育部文件精神，结合地方高等教育实际，着力优化高等工程教育体系，深化高等工程教学改革，努力培养造就一大批创新能力强、适应江苏社会经济发展需要的卓越工程技术后备人才。

教材建设是人才培养的基础工作和重要抓手。培养高素质的工程技术人才，需要遵循工程技术教育规律，建设一套理念先进、针对性强、富有特色的优秀教材。随着知识社会和信息时代的到来，知识综合、学科交叉趋势增强，教学的开放性与多样性更加突出，加之图书出版行业体制机制也发生了深刻变化，迫切需要教育行政部门、高等学校、行业企业、出版部门和社会各界通力合作，协同作战，在新一轮高等工程教育改革发展中抢占制高点。

2010年以来，江苏大学出版社积极开展市场分析和行业调研，先后多次组织全省相关高校专家、企业代表就应用型本科人才培养和教材建设工作进行深入研讨。经各方充分协商，拟定了“江苏省卓越工程技术人才培养特色教材”开发建设的实施意见，明确了教材开发总体思路，确立了编写原则：

一是注重定位准确，科学区分。教材应符合相应高等工程教育的办

学定位和人才培养目标，恰当地把握研究型工程人才、设计型工程人才及技能型工程人才的区分度，增强教材的针对性。

二是注重理念先进，贴近业界。吸收先进的学术研究与技术开发成果，适应经济转型升级需求，适应社会用人单位管理、技术革新的需要，具有较强的领先性。

三是注重三位一体，能力为重。紧扣人才培养的知识、能力、素质要求，着力培养学生的工程职业道德和人文科学素养、创新意识和工程实践能力、国际视野和沟通协作能力。

四是注重应用为本，强化实践。充分体现用人单位对教学内容、教学实践设计、工艺流程的要求以及对人才综合素质的要求，着力解决以往教材中应用性缺失、实践环节薄弱、与用人单位要求脱节等问题，将学生创新教育、创业实践与社会需求充分衔接起来。

五是注重紧扣主线，整体优化。把培养学生工程技术能力作为主线，系统考虑、整体构建教材体系和特色，包括合理设置课件、习题库、实践课题，以及在教学、实践环节中合理设置基础、拓展、复合应用之间的比例结构等。

该套教材组建了阵容强大的编写专家及审稿专家队伍，汇集了国家教学指导委员会委员、学科带头人、教学一线名师、人力资源专家、大型企业高级工程师等。编写和审稿队伍主要由长期从事教育教学改革实践工作的资深教师、对工程技术人才培养研究颇有建树的教育管理专家组成。在编写、审定教材时，他们紧扣指导思想和编写原则，深入探讨、科学创新、严谨细致、字斟句酌，倾注了大量的心血，为教材质量提供了重要保障。

该套教材在课程设置上基本涵盖了卓越工程技术人才培养所涉及的有关专业的公共基础课、专业基础课、专业课、专业特色课等；在编写出版上采取突出重点、以点带面、有序推进的策略，成熟一本出版一本。希望大家在教材的编写和使用过程中，积极提出意见和建议，集思广益，不断改进，以期经过不懈努力，形成一套参与度与认可度高、覆盖面广、特色鲜明、有强大生命力的优秀教材。

江苏省教育厅副厅长 丁晓昌

2012 年 8 月

前　言

概率论与数理统计是研究和揭示大量随机现象统计规律的数学学科，是高等学校理工科本科各专业的一门重要的基础理论课。随着现代科学技术的高速发展，概率论与数理统计在自然科学、社会科学、工程技术、工农业生产等领域中得到了越来越广泛的应用。因此，在我国高等学校的绝大多数专业的教学计划中，“概率论与数理统计”均列为必修课程或限定选修课程。作为一门应用数学学科，“概率论与数理统计”不仅具有数学学科的特点——高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性，而且具有更独特的思维方法。

随着我国教育事业的蓬勃发展，大学本科教育的培养目标出现了多样性，许多普通高校尤其是独立学院把大学生的培养目标定位于应用型本科人才上，然而，目前大部分应用型本科院校和独立学院所采用的“概率论与数理统计”教材与应用型本科人才的培养目标不相适应。为提供适合应用型本科院校或独立学院培养目标的“概率论与数理统计”教材，让初学者尽快熟悉“概率论与数理统计”独特的思维方法，更好地掌握概率论与数理统计的基本概念、基本理论、基本运算，以及处理随机数据的基本思想和方法，培养学生运用概率统计方法分析解决实际问题的能力和创造性思维能力，经江苏科技大学、常州大学、南京信息工程大学三校“概率论与数理统计”课程老师的合作，共同编写了本教材。

本教材内容共九章，由两大部分组成：第一部分（前五章）为概率论，

第二部分(后四章)为数理统计。在教材编写上,我们在保证逻辑严密、概念准确的前提下,力求使用通俗易懂的语言,突出概率统计方法的应用,淡化一些理论上的严格证明的要求。在内容阐述上,尽可能采用由直观到抽象,由具体到一般的叙述方式。在内容选取上,做了适当删减,使概率统计课程的重点更加突出。在例题选配上,注重内容的针对性和应用的广泛性。在习题选配上,注重与教材内容的相互衔接、概率统计知识的进一步巩固和实际问题的广泛应用,同时将习题分为A、B两类:A类题是基础题,主要与教材的内容和例题相对应;B类题是提高题,一般具有一定的难度,供学有余力及准备考研的学生选用。书后给出了习题的答案或提示。

本教材由郭永强、张良霞、李志林、李京梁、王平心、左相、周小玮、徐祖润、涂庆伟共同编写,由郭永强和李志林统稿。

本教材的出版得到了江苏大学出版社的大力支持和关心,在此表示衷心的感谢!

编　者

2016年8月

目 录

第 1 章　事件及其概率

在社会生活与生产实践中存在着大量的随机现象,虽然这些现象具有偶然性,但因其存在统计规律性,人们对它的研究迅速发展起来,概率论和数理统计就是一门以随机现象及其规律为研究对象的数学学科. 它于 17 世纪由帕斯卡(Pascal)和费马(Fermat)等人创建,目的是把社会博弈问题用数学术语公式化. 苏联数学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)在 1933 年正式出版的《概率论基础》中,给出了概率论公理化的完整结构.

§1.1　随机事件

1.1.1　事件的直观概念

1. 随机现象

自然界的现象大致可以分为两类:决定性现象和随机现象. 决定性现象的特点是:在一组条件下,其观察的现象完全被决定. 例如:"任取一个平面三角形(条件),其两边之和大于第三边(现象)""使两个带同性电的小球靠近(条件),两小球相吸引(现象)"都是完全被决定的现象. 其中,第一个是在平面几何中完全被肯定的现象,我们称之为**必然现象**;第二个是在物理学中完全被否定的现象,我们称之为**不可能现象**. 自然科学、社会科学中的绝大部分学科的任务都是来揭示这类决定性现象(必然现象或不可能现象)或研究产生决定性现象的条件的.

随机现象的特点是:在一组条件下,其观察的现象可能出现,也可能不出现. 例如:"掷一枚骰子(条件),出现的点数为 1(现象)"就是随机现象. 因为掷出骰子后,出现的点数可能是 1,也可能是 2,3,4,5,6 中的任一个.

由于自然现象一般都不是孤立存在的,总受到大量不知道或虽已知道但无法控制的偶然因素的影响,从而导致了随机现象的产生,同时也表明随机现象是自然界中广泛存在的一类现象. 概率论与数理统计就是研究随机现象和揭示随机现象内部存在的统计规律的一门数学学科. 因此,概率论与数理统计是一门应用十分广泛的学科.

2. 随机试验

要研究随机现象,就必须对自然现象进行观察,我们把对自然现象的观察称

为试验. 如果一个试验满足下列三个条件:

(1) 可重复性:在相同的条件下可以重复进行;

(2) 可观察性:每次试验出现且仅出现一个结果,且所有可能结果在试验之前是明确的;

(3) 随机性:每次试验可能出现这个结果,也可能出现那个结果,事前不能预言.

那么称该试验为**随机试验**. 由于本书今后所提及的试验都是指随机试验,因此简称随机试验为试验.

3. 随机事件

称试验中所发生的现象为事件. 若一个事件在每次试验中都一定发生,则称该事件为**必然事件**,用 S 表示;若在每次试验中一定不发生,则称该事件为**不可能事件**,用 $\varnothing$ 表示;对于在试验中可能发生也可能不发生的事件,称之为**随机事件**,用 $A,B,C,\cdots$ 表示.

称试验中单个结果所组成的事件为**基本事件**. 例如,掷一枚骰子,观察出现的点数,由"出现点数 1""出现点数 3""出现点数 5"这三个结果(或基本事件)所组成;若试验的结果是"出现点数 1",则"出现奇数"这一事件也发生. 由此可知,事件是由若干个试验结果(或基本事件)所组成的;一个事件发生,当且仅当该事件所含的一个结果(或基本事件)出现.

1.1.2 事件的集合描述

为便于研究事件,需要将事件的概念更明晰化.

1. 样本空间

称试验的每一可能结果为样本点,记为 ω 或带下标的 $\omega_1,\omega_2,\cdots$,样本点的全体称为样本空间,记为 S.

例 1.1.1 掷一枚骰子,观察出现的点数. 若记 ω_i="出现点数 $i,i=1,2,3,4,5,6$",则试验的样本空间为 $S=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$.

例 1.1.2 观察某交通道口上午 7 点至 9 点间通过的机动车辆数,若记 ω_i="通过 i 辆机动车",$i=0,1,2,\cdots$,则试验的样本空间为 $S=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots\}$.

例 1.1.3 在单位正方形($0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$)内均匀投点,观察落点的坐标. 若记落点坐标为 (x,y),则试验的样本空间为 $S=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

2. 事件的集合描述

前面已经指出,事件是由若干个试验结果所组成的,试验的结果称为样本点. 因此事件是由若干个样本点所组成的,即事件可看作样本空间的一个子集. 在这种描述下,基本事件就是样本空间的单点子集.

根据事件发生的意义可知,事件发生当且仅当试验出现样本点. 由此进一步可知,空集作为样本空间的子集所代表的事件为不可能事件,作为自身子集所代

表的事件为必然事件.

3. 事件的关系与运算

既然事件可视为样本空间的子集,作为集合,有集合的关系与运算,那么这些关系与运算反映在事件上,其意义是什么?例如,事件 A,B 作为样本空间的两个子集,它有并集 $A\cup B$. $A\cup B$ 作为样本空间的子集,代表一个事件,其事件发生的意义是什么呢?下面对此分别加以介绍,并平行地引入事件间的关系与事件的运算.

(1) 事件间的关系与事件的运算

设 A,B 为两个事件,即 A,B 为样本空间的两个子集. 在下面的表述中,我们有时说集合 A,B,有时说事件 A,B,具体代表什么,视上下文或情况而定.

① 事件的包含:如果集合 $A\subset B$,那么称**事件 B 包含事件 A**. 因 $A\subset B\Leftrightarrow$"若 $\omega\in A$,则 $\omega\in B$",故 $A\subset B$ 所表示的关系是:事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

② 事件的相等:如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,那么称**事件 A 与事件 B 相等**,记为 $A=B$. 它的意义是若 A 发生,则 B 必发生;反之,若 B 发生,则 A 也必发生.

③ 事件的和(并):集合 A 与 B 的并集 $A\cup B$ 所代表的事件称为**事件 A 与 B 的和(并)事件**. 因 $\omega\in A\cup B\Leftrightarrow$"$\omega\in A$ 或 $\omega\in B$",故事件 $A\cup B$ 发生的意义是:事件 A 发生或事件 B 发生,即事件 A,B 中至少有一个发生.

类似地,$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并集 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$(简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$)称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和. 事件 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 发生的意义是:$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生. 同理,事件 $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$ 发生的意义是:$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生.

④ 事件的积(交):集合 A 与 B 的交集 $A\cap B$ 所代表的事件称为**事件 A 与 B 的积(交)事件**. 因 $\omega\in A\cap B\Leftrightarrow$"$\omega\in A$ 且 $\omega\in B$",故事件 $A\cap B$ 发生的意义是:事件 A 发生且事件 B 发生,即事件 A,B 同时发生. $A\cap B$ 也记作 AB.

类似地,$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交集 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$(简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$)称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积,事件 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 发生的意义是:$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生. 同理,事件 $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty}A_i$ 发生的意义是:$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生.

⑤ 事件的互不相容(互斥):若 $A\cap B=\varnothing$,即事件 A 与 B 不同时发生,则称**事件 A 与 B 互不相容**.

⑥ 事件的差:集合 A 与 B 的差集 $A-B$ 所代表的事件称为**事件 A 与 B 的差事件**. 因 $\omega\in A-B\Leftrightarrow$"$\omega\in A$ 但 $\omega\notin B$",故事件 $A-B$ 发生的意义是:事件 A 发生但事件 B 不发生.

⑦ 对立事件(逆):集合 A 的补集 $\overline{A}=\Omega-A$ 所代表的事件称为**事件 A 的对立事件**. 因 $\omega\in\overline{A}\Leftrightarrow\omega\notin A$,故事件 $\overline{A}$ 发生的意义是:事件 A 不发生,即 $\overline{A}$ 代表的是与

A 性质相反的事件.

事件的关系与运算可以用图 1.1 的文氏图(Venn 图)来直观表示.

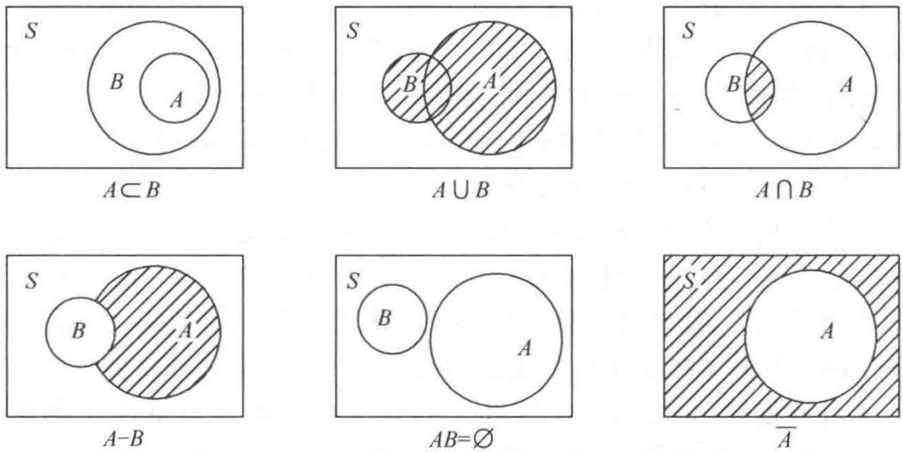

图 1.1

(2) 事件的运算性质

设 $A,B,C,A_k(k=1,2,\cdots)$ 为事件,它们的运算具有如下性质:

① 交换律:$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

② 结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

③ 分配律:$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

④ 德摩根(De Morgan)律(对偶律):$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$. 更一般地,有 $\overline{\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k}=\bigcap\limits_{k=1}^{n}\overline{A_k},\overline{\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k}=\bigcup\limits_{k=1}^{n}\overline{A_k}$.

以上性质都不难证明,并且借助于文氏图也更容易理解.

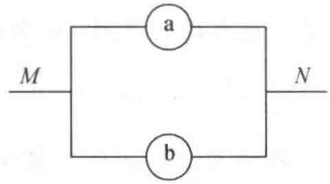

图 1.2

例 1.1.4 设电路 MN 中装有 a 和 b 两个继电器(如图 1.2),以 A,B 分别表示继电器 a,b 接通,试利用电路 MN 的“通”与“断”两种状态,验证事件的对偶律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

解 设事件 $C=$“MN 为通路”,则 $\overline{C}=$“MN 为断路”. 显然,$C=A\cup B,\overline{C}=\overline{A}\cap\overline{B}$,因此 $\overline{C}=\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

例 1.1.5 设 A,B,C 为三个事件,试用它们表示下列事件:

(1) A 发生,B 与 C 不发生; (2) A,B,C 同时不发生;

(3) A,B,C 中至少有一个发生; (4) A,B,C 中恰有一个发生;

(5) A,B,C 中不多于一个发生.

解 (1)“A 发生,B 与 C 不发生”可表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $A-B-C$;

(2) “A,B,C 同时不发生”可表示为 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

(3) “A,B,C 中至少有一个发生”可表示为 $A\cup B\cup C$ 或 $A\cup B\overline{A}\cup C\overline{A}\,\overline{B}$，也可表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$；

(4) “A,B,C 中恰有一个发生”可表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$；

(5) “A,B,C 中不多于一个发生”可表示为 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$.

§1.2　事件的概率

1.2.1　概率的概念

1. 频率

我们知道，所谓随机事件就是在一次试验中可能发生也可能不发生的事件，但发生的可能性一般有大小之分. 怎样度量一个事件发生的可能性大小呢？为此先引入频率的概念.

设在相同的条件下进行 n 次试验，若事件 A 在 n 次试验中发生了 n_A 次，则称

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

为事件 A 发生的频率.

容易验证，频率具有如下性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f_n(S)=1$；

(3) 若 $AB=\varnothing$，则 $f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$.

显然，频率大的事件其发生的可能性要高于频率小的事件，即频率在一定程度上反映了事件在一次试验中发生的可能性大小. 需要指出的是：频率依赖于试验及试验的次数，具有随机波动性，但这种波动并不是杂乱无章的. 人们发现，随着试验及试验次数 n 的增加，频率的波动性在减小，且当 n 无限增加时，频率将稳定在某一定数邻近取值. 我们把这种性质称为频率的稳定性. 下表给出了一些著名统计学家抛硬币试验的结果. 从表中可以看出，随着试验次数的增加，正面向上的频率稳定在 0.5 邻近取值.

表 1.1

试验者	抛掷次数 n	正面向上的次数 n_A	正面向上的频率 $\frac{n_A}{n}$
德摩根	2048	1039	0.5073
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

2. 概率的概念

频率的稳定性说明，一个事件发生的可能性大小是事件本身所固有的，并可以用一个数来度量.由此，我们引入下面的描述性定义：

定义 1.1 对于事件 A，若用一个数 $P(A)$ 来度量它发生的可能性大小，则称该数 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

1.2.2 确定概率的频率方法

受频率稳定性的启示，可以用下面的方法来确定概率：

如果在大量的重复试验中，事件 A 的频率稳定在某一定数 p 的附近取值，那么称 P 为事件 A 的概率，即 $P(A)=p$.

按上述方法确定的概率称为**频率概率**（或统称**概率**）. 根据频率的性质容易知道，频率概率具有下列性质：

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) $P(S)=1$；

(3) 若 $AB=\varnothing$，则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

由频率的稳定性还可知，不可能事件的概率为 0.

确定概率的频率方法提供了近似计算概率的一种方法，即当试验次数 n 较大时，事件 A 的频率和概率近似相等：$f_n(A)\approx P(A)$.

1.2.3 确定概率的古典方法

确定概率的频率方法存在两个方面的缺陷，一是"频率稳定在某一定数 p 的附近取值"含义不清，我们只能从主观上来判断"附近"，暂且无法做客观的表述；二是频率方法建立在大量的重复试验基础上，在实际应用中很难实现. 然而，有些特殊的试验，可以根据试验的特点来直接计算事件的概率. 下面先介绍最早被人们研究，也是最常见、最基本的试验：古典概型.

1. 古典概型

如果一个试验满足下列两个条件：

(1) 有限性：试验的可能结果只有有限个，即样本点或基本事件只有有限个；

(2) 等可能性：每一结果出现的可能性大小相同.

那么称该试验为古典概型.

古典概型中的有限性在实际问题中是容易验证的，其等可能性往往根据问题的对称性、试验中抽取方式的任意性来确定. 例如，在例 1.1.1 中，可能的结果有 6 个，根据骰子的对称性，每一结果出现的可能性大小相同，所以该试验是古典概型.

2. 古典概率

考虑例 1.1.1，由于试验有 6 个可能结果，每一结果出现的可能性大小相同，

因此，"出现点数 1"的可能性大小为$\frac{1}{6}$，"出现点数 1 或 2"的可能性大小为$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. 由此，我们给出古典概型中事件概率的确定方法：

设 $S=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$ 为古典概型所对应的样本空间，它含有 n 个样本点. $A\subset S$ 为一个事件，若 A 含有 m 个样本点，则 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

按上述方法确定的概率称为古典概率，古典概率由拉普拉斯(Laplace)在 1812 年给出. 容易验证，古典概率具有下列性质：

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) $P(S)=1$；

(3) 若 $AB=\varnothing$，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

3. 古典概率计算的例子

例 1.2.1　甲、乙两人以某游戏进行比赛，每局谁赢等可能且无平局，规定甲先于乙赢两局之前赢一局为甲优胜，否则乙优胜. 求甲优胜的概率.

解　设 $A=$"甲取得优胜". 显然，要确定谁优胜，最多只要比两局. 下面以两局的比赛情况来建立样本空间. 为简单起见，用 0 表示乙赢，用 1 表示甲赢，用 01 代表第一局乙赢、第二局甲赢，以此类推，试验的样本空间为 $S=\{00,01,10,11\}$，它含有 4 个样本点. 根据假设可知每一样本点出现的可能性大小相同，即试验为古典概型. 而 $A=\{01,10,11\}$，A 含有 3 个样本点，因此

$$P(A)=\frac{3}{4}=0.75.$$

若以确定优胜就终止比赛来建立样本空间，则 $S=\{00,01,1\}$，此时 $A=\{01,1\}$ 含有 2 个样本点. 若据此推断 $P(A)=\frac{2}{3}$，则出现了错误. 原因是该样本空间不是古典概型，样本点"01"和"1"出现的可能性大小不同. 该例告诉我们，只有古典概型才能用古典概率来计算概率.

例 1.2.1 源于分奖品问题. 假定甲、乙两人最初约定以三局两胜的方式来决定谁优胜，并且优胜者可以获得全部奖品，但比赛只进行了一局且甲赢，就因某种原因而无法再进行下去了，此时奖品应如何分配？该问题曾引起科学家帕斯卡(Pascal)的关注，并就此问题与法国数学家费马(Fermat)通信讨论. 帕斯卡在 1654 年 8 月 24 日提出，奖品应按假定再比下去谁赢的可能性大小来分，并给出了解法.

计算古典概率就是要计算两个数：样本点总数及事件 A 所含的样本点数. 例 1.2.1 是用一一列出样本点的方法来计算这两个数的，该方法在样本点总数较大时显然不可行，此时可用排列、组合及加法原理、乘法原理来计数. 一般地，与顺序

有关的问题,用排列的方法来计数;与顺序无关的问题用组合的方法来计数.

例 1.2.2 盒中装有 4 件正品,5 件次品,从中无放回地任取 3 次,每次取一件,试求下列事件的概率:

(1) 第三次取得正品;

(2) 仅第三次取得正品;

(3) 三次中恰有一次取得正品.

解 (1) 盒中共有 9 件产品,将从中无放回地取出的 3 件产品顺次排列(如图 1.3 a),共有 A_9^3 种排列法,即有 A_9^3 种取法,因此试验的样本空间含有 A_9^3 个样本点,且由抽取的任意性知该试验是一种古典概型.设 A=“第三次取得正品”,A 的特点是:排在第三个位置的是正品(有 A_4^1 种排列法),排在前两个位置的是余下 8 件产品中的任意 2 件(有 A_8^2 种排列法),所以 A 含有 $A_4^1 \cdot A_8^2$ 个样本点,故

$$P(A)=\frac{A_4^1 \cdot A_8^2}{A_9^3}=\frac{4}{9}\approx 0.4444.$$

图 1.3

(2) 记 B=“仅第三次取得正品”,B 的特点是:排在第三个位置的是正品,排在前两个位置的是次品(如图 1.3 b),所以 B 含有 $A_4^1 \cdot A_5^2$ 个样本点,故

$$P(A)=\frac{A_4^1 \cdot A_5^2}{A_9^3}=\frac{10}{63}\approx 0.1587.$$

(3) 本例(1)与(2)所提出的问题都与顺序有关,所以我们选择了排列的计数法,而问题(3)只关心取出的 3 件产品中的次品数,它与顺序无关.下面用组合的计数法来求(3)的概率.此时,试验的样本空间含有 C_9^3 个样本点,记 C=“三次中恰有一次取得正品”,则 C 含有 $C_4^1 \cdot C_5^2$ 个样本点,故

$$P(C)=\frac{C_4^1 \cdot C_5^2}{C_9^3}=\frac{10}{21}\approx 0.4762.$$

对于例 1.2.2 及其解法,进行以下解释说明:

① 设 A_k=“第 k 次取到正品”,$k=1,2,3$,则类似于问题(1)可求得 $P(A_k)=\frac{4}{9}$,其概率与 k 无关,这并非巧合.事实上,如果将例中的 4 件正品、5 件次品、取 3 次分别换为 a 件正品、b 件次品、取 k 次,而 A_k 同上,$k=1,2,\cdots,a+b$,那么可得 $P(A_k)=\frac{a}{a+b}$,它与 k 无关.这一事实说明,日常生活中的“抽签游戏”“抓阄游戏”