

TONGJICAILIAO
REBIANXING YU REJIAGONG GONGYI

铜基材料 热变形与热加工工艺

张 毅 安俊超 贾延琳 等著

张 毅 著



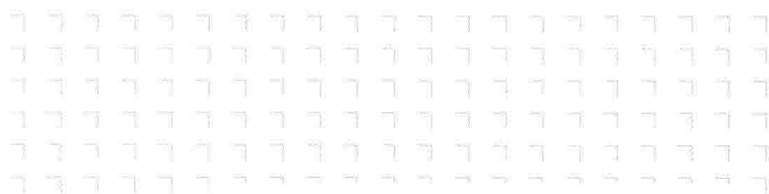
化学工业出版社

TONGJICAILIAO
REBIANXING YU REJIAGONG GONGYI

铜基材料

热变形与热加工工艺

张 毅 安俊超 贾延琳 等著



化学工业出版社

· 北 京 ·

高性能电子铜合金及铜基复合材料在电子信息、机械制造、航空航天、汽车、国防等领域得到广泛应用，成为一些领域的关键功能材料。铜基材料的热变形行为与其热加工工艺性能和少、无切削精密成形性能密切相关。本书简要介绍了金属材料热加工热-力物理模拟发展现状、热-力物理模拟试验机、材料和热加工领域的物理模拟技术、热加工热-力物理模拟理论基础、金属材料热加工的热-力物理模拟试验技术及数据处理等，重点介绍了作者近年研发的高性能铜合金、弥散铜、弥散铜基复合材料、电接触材料等新材料的设计、制备、组织性能与热变形行为。

本书可供高等院校、科研院所、企业等有关材料研发人员、设计人员参考，也可供高校材料科学与工程、冶金工程等专业高年级研究生、本科生学习。

图书在版编目 (CIP) 数据

铜基材料热变形与热加工工艺/张毅等著. —北京：化学工业出版社，2018.4
ISBN 978-7-122-31709-4

I. ①铜… II. ①张… III. ①铜基复合材料-热变形
②铜基复合材料-热加工 IV. ①TB333.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 046228 号

责任编辑：邢 涛	文字编辑：谢蓉蓉
责任校对：宋 玮	装帧设计：韩 飞

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011）
印 装：三河市航远印刷有限公司
710mm×1000mm 1/16 印张 19 字数 369 千字 2018 年 6 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686） 售后服务：010-64518899
网 址：<http://www.cip.com.cn>
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

前言

模拟是对真实事件或者过程的虚拟或物拟。现代的材料加工物理模拟，主要指采用热模拟试验机进行物理模拟。热模拟试验机出现在第二次世界大战之后，在现代材料研发机构和加工、制造等行业得到广泛应用。热模拟试验机是一种提供了高温环境的动态材料试验机，它可以动态地对材料受热和成形过程全生命周期地进行物理模拟。其模拟功能齐全，应用广泛，可以进行包括连铸冶炼工艺、轧制锻压工艺、焊接工艺、金属热处理工艺和机械热疲劳等方面内容在内的动态过程模拟试验，可以测定金属高温力学性能、应力应变曲线、金属热物性及 CCT 曲线等。材料加工的物理模拟是在实验室里使用真实的材料，经历实际制造工艺或最终服役工况来精确地再现其受热和受力作用的过程。在该模拟过程中使用一个小的真实材料样品，而该样品与全尺寸制品在制造工艺或最终服役工况中具有相同或相似的受热和受力条件。在现代热模拟试验机中模拟的结果将非常具有实用价值，因此，实验室中的模拟结果可以直接应用到全尺寸的生产实践中。

本书系统介绍了基于热模拟试验机的现代金属材料加工和物理特性表征的物理模拟的基本概念和意义、现代材料加工的物理模拟技术、材料加工物理模拟的常用试验方法，如高温拉伸试验、高温压缩试验、高温扭转试验和测定 CCT 曲线试验，进行了介绍和应用举例；对热加工理论基础、金属材料热加工的热模拟试验技术及数据处理进行了详细介绍，内容涉及热模拟试验参数的确定原则、真应力-真应变曲线、基于动态材料学模型本构方程构建的数据处理步骤、 Z 参数的确定、动态再结晶临界条件与热加工图的构建及应用等。本书特别对河南科技大学及有色金属共性技术河南省协同创新中心电子铜合金研究团队自 1995 年以来，就有关高性能铜合金和电接触材料等铜基材料的热变形行为的热模拟研究成果进行了总结与概括，涉及的材料包括多元微合金化高性能 IC 框架铜合金、微纳结构混杂氧化物弥散强化铜、弥散铜-W/Mo/WC/TiC 电接触复合材料，制备方法涉及大气熔铸、真空熔铸、传统粉末冶金、真空热压烧结、放电等离子烧结 (SPS) 等多种技术，研究成果已在相关产品中得到应用或作为技术储备。

本书由张毅、安俊超、贾延琳、周旭东、付明、田保红、刘勇、殷婷、高直、王智勇、高颖颖、孙慧丽撰写完成，其中第 1、2 章由河南科技大学周旭东教授撰写；第 3、4 章由河南科技大学张毅教授、北京机电研究所有限公司高直

工程师、河南科技大学孙慧丽撰写，第5章由北京工业大学贾延琳博士和河南科技大学张毅教授、河南工业技师学院高颖颖撰写；第6章由洛阳理工学院安俊超博士撰写；第7章由河南科技大学殷婷实验师、刘勇教授及中国空空导弹研究院付明研究员撰写；第8章由田保红教授、安俊超博士、洛阳轴承研究所有限公司王智勇高级工程师撰写。全书由张毅和田保红教授统稿。河南科技大学材料分析实验中心李炎教授、祝要民教授、刘玉亮博士、李武会博士，金属材料工程系王顺兴教授、贾淑果教授、任凤章教授，材料学实验中心张兴渊工程师，材料加工实验中心刘亚民高级工程师、郜建新高级工程师、赵培峰副教授、王要利实验师、刘重喜高级技师，河南省工程材料实验教学示范中心李红霞高级工程师、朱宏喜副教授、殷婷实验师等教师参与了部分研究工作。有关研究工作还得到有色金属共性技术河南省协同创新中心、河南省有色金属材料科学与加工技术重点实验室的谢敬佩教授、李全安教授、宋克兴教授、黄金亮教授、王文焱教授等教师的帮助与支持。河南科技大学材料科学与工程学院硕士研究生李瑞卿、许倩倩、李艳、孙慧丽、田卡、孙永伟、张晓伟、冯江、杨志强、杨雪瑞、程新乐、殷婷、赵瑞龙、朱顺新等和部分本科毕业生也参与完成了部分研究工作。在此向他们表示衷心的感谢。本书的撰写得到孙慧丽、李国辉、王冰洁等硕士的大力协助，感谢他们的辛勤劳动。

本书的有关项目研究得到国家自然科学基金（51101052、U1704143）、河南省科技开放合作项目（172106000058）、河南省高校科技创新人才支持计划（18HASTIT024）、河南省高校科技创新团队计划（2012IRTSTHN008）、河南省杰出青年基金项目（0521001200）、河南省高等学校青年骨干教师资助计划（2012GGJS-073）、河南省重点攻关项目（152102210074、162102410022）、河南省教育厅自然科学研究资助项目（2011QN48、14B430015、15A430006）和河南科技大学青年学术带头人启动基金（13490001）、洛阳市科技计划项目（020902）等项目的资助。

感谢有色金属共性技术河南省协同创新中心与河南省有色金属材料科学与加工技术重点实验室对有关研究的资助。感谢河南科技大学材料科学与工程学院、洛阳理工学院材料科学与工程学院、北京工业大学材料科学与工程学院和化学工业出版社对本书的撰写和出版给予的支持。

书中的主要内容是作者研究团队近年来研究工作的总结，本书在撰写过程中参考了部分相关文献，在书中都尽可能以参考文献形式列出，特向有关作者表示由衷的感谢。由于作者水平有限，恳请读者不吝批评指正。

作者

2018年2月于洛阳

目 录

第 1 章	绪论	1
1.1	材料加工物理模拟的基本概念和现代意义	1
1.2	现代材料加工的物理模拟技术	2
1.2.1	电阻加热热模拟试验机	3
1.2.2	高频感应加热热模拟试验机	12
1.2.3	MMS 系列热力模拟实验机的型号与性能	
	分类	17
	参考文献	18
第 2 章	材料加工物理模拟的基本试验方法	19
2.1	高温拉伸试验	19
2.2	高温压缩试验	24
2.2.1	圆柱体单向压缩试验	24
2.2.2	平面应变压缩试验	26
2.2.3	多道次压缩试验	28
2.3	高温热扭转试验	30
2.4	测定 CCT 曲线试验	31
2.4.1	试验原理	31
2.4.2	试验方法	32
	参考文献	37
第 3 章	热加工理论基础	38
3.1	热变形机理	38

3.1.1 晶内变形	38
3.1.2 晶间变形	39
3.2 热加工组织演变与性能变化	41
3.2.1 热加工过程中的组织演变	41
3.2.2 热加工对材料性能的影响	42
3.3 动态回复与再结晶	44
3.3.1 动态回复	44
3.3.2 动态再结晶	45
3.4 时效析出与动态再结晶的相互作用	51
参考文献	53

第 4 章 金属材料热变形的热模拟试验技术及数据处理

55

4.1 热模拟试验参数的确定原则	55
4.2 真应力-真应变曲线	57
4.3 动态材料学模型	59
4.4 热加工图的构建与应用	61
4.4.1 数据处理步骤	61
4.4.2 热加工图的分析	66
4.5 动态再结晶临界条件	67
4.5.1 真应力-真应变曲线的非线性拟合	67
4.5.2 临界应变的确定	70
4.6 本构方程的建立	72
参考文献	74

第 5 章 高性能铜合金热变形

76

5.1 Cu-Ni-Si 合金引线框架铜合金	76
5.1.1 材料制备、组织与性能	76
5.1.2 Cu-Ni-Si 合金真应力-真应变曲线	80
5.1.3 Cu-Ni-Si 合金本构方程	83
5.1.4 热加工图	85

5. 1. 5	组织演变	86
5. 2	Cu-Cr-Zr 引线框架铜合金	90
5. 2. 1	Cu-Cr-Zr 合金组织与性能	90
5. 2. 2	流变应力曲线	95
5. 2. 3	本构方程	99
5. 2. 4	热加工图	101
5. 2. 5	热变形组织演变	107
5. 3	Cu-(0. 2~1. 0)Zr-(RE)合金	111
5. 3. 1	材料的制备、组织与性能	111
5. 3. 2	真应力-真应变曲线	125
5. 3. 3	本构方程	140
5. 3. 4	热加工图	143
5. 3. 5	热变形组织演变	152
	参考文献	159

第 6 章 弥散铜基复合材料的热变形

163

6. 1	弥散铜-钼复合材料	163
6. 1. 1	材料制备、组织与性能	163
6. 1. 2	Mo/Cu-Al ₂ O ₃ 复合材料真应力-真应变曲线	166
6. 1. 3	Mo/Cu-Al ₂ O ₃ 复合材料热变形的本构方程	168
6. 1. 4	Mo/Cu-Al ₂ O ₃ 复合材料热变形的 DMM 加工图 及显微组织	174
6. 2	弥散铜-W 复合材料	180
6. 2. 1	材料制备、组织与性能	180
6. 2. 2	W/Cu-Al ₂ O ₃ 复合材料真应力-真应变曲线	183
6. 2. 3	W/Cu-Al ₂ O ₃ 复合材料热变形的本构方程	184
6. 2. 4	W/Cu-Al ₂ O ₃ 复合材料的热加工图	186
6. 3	弥散铜-WC 复合材料	190
6. 3. 1	材料制备、组织与性能	190
6. 3. 2	WC/Cu-Al ₂ O ₃ 复合材料真应力-真应变曲线	192
6. 3. 3	WC/Cu-Al ₂ O ₃ 复合材料热加工图	194

6.4 弥散铜-TiC 复合材料	196
6.4.1 材料制备、组织与性能	196
6.4.2 TiC/Cu-Al ₂ O ₃ 复合材料的真应力-真应变 曲线	198
参考文献	205

第 7 章 电接触材料的热变形

207

7.1 SPS 烧结 Cu-Mo-WC 电接触材料	207
7.1.1 材料制备、组织与性能	207
7.1.2 真应力-真应变曲线	213
7.1.3 本构方程	215
7.1.4 组织演变	217
7.2 SPS 烧结 Cu-W-TiC 电接触材料	220
7.2.1 材料制备、组织与性能	220
7.2.2 真应力-真应变曲线	225
7.2.3 本构方程	225
7.2.4 组织演变	228
7.3 真空热压烧结 W-Cu 电接触材料	230
7.3.1 材料制备、组织与性能	230
7.3.2 真应力-真应变曲线	236
7.3.3 本构方程	240
7.3.4 热加工图	244
7.3.5 组织演变	249
7.4 SPS 烧结 Cu-Mo-WC 电接触材料	254
7.4.1 材料制备、组织与性能	254
7.4.2 真应力-真应变曲线	260
7.4.3 本构方程	262
7.4.4 热加工图	265
7.4.5 组织演变	269
参考文献	273

8.1 Al_2O_3 -弥散铜制备、组织与性能	275
8.1.1 Al_2O_3 -弥散铜制备	275
8.1.2 Al_2O_3 -弥散铜性能	276
8.1.3 Al_2O_3 -弥散铜显微组织	278
8.2 Al_2O_3 -弥散铜的真应力-真应变曲线	280
8.3 本构方程	284
8.4 热加工图	285
参考文献	291

第 1 章

绪 论

1.1 材料加工物理模拟的基本概念和现代意义

所谓模拟是对真实事件或者过程的虚拟或物拟。模拟要表现出选定的物理系统或抽象系统的关键特性。模拟的关键问题主要包括有效信息的获取、关键特性和表现的选定、近似简化和假设的应用以及模拟的重现度和有效性。

模拟是工业、科学和教育中的一种研究或教学方法。它可在测验条件下再现实际事件和过程。模拟方法种类颇多，从用纸笔和木板再现情境，直到用复杂的计算机辅助的相互作用体系。实验中使用模拟方法，使研究者能不用稀有材料或昂贵仪器而进行奇异的“仿真实验室”的实验或演示。在汽车制造业中，计划的汽车设计在计算机模拟中来进行模拟风洞试验，可以把原来用于制造和试验原型的时间节约几百小时。压缩或放大时间或空间是模拟技术节省成本的另一个特点。任何地方发生的事件，其真实时间可能为几小时直至极长的时间，但在几分钟内即可模拟出来。例如，医学研究人员常常要隔离器官，并且要用人工方法维持其生命，进行培育，注入化学药物，以等待结果。然而，当一个被选择的器官的正常机能可被精确地模拟下来时，研究人员在几分钟之内即可观察到范围广泛的许多事件对器官机能发生的影响。同样，天文学家使用计算机模拟银河系运动，可以演示数百万年才能完成的事件，例如两个星系的碰撞，以检验理论描述的正确性。作为教学方法，模拟可使学生以逼真的方式处理重大事情，而在他们作出错误选择时也不致产生恶果。这种方法在医学训练中十分有用。例如，艾伯塔大学医学院使用计算机来模拟处于危机情况的，如无适当护理即会死亡的病人，要求医生迅速作出专业诊断，确定治疗方法，以保全病人的生命。

世界上的事物，虽然千姿百态，但究其本质，都有相同的哲理，当我们摸清了事物迥异的个性后，就需要开始去寻找它们内在的共性，这才是一个明哲、智慧的做法，也是认识事物的最好途径。只有这样才能掌握大自然的运动规律，从而站在哲学的高度，通晓自然科学和社会科学领域的真谛。列宁曾经指出：“历史有惊人的相似。”莱布尼茨也说过：“自然界都是相似的。”然后又说：“为什么

相似，是神定的先定和谐。”针对这句话，列宁正确地指出：“具有深刻的辩证法，虽然有僧侣主义的解释。”但是我们不妨站在唯物主义者的立场，把神的概念，理解为“大自然的规律”。

相似就是客观事物存在的同与变异的辩证统一。在客观事物发展过程中，始终存在着同和变异。只有同，才能有所继承；只有变异，事物才能往前发展。相似绝非等于相同。

有人说，搞相似性就是只研究共性，不研究个性。这是对相似性的不了解。

下面我们给出模拟的正式概念：

定义 1：根据相似性原理，对实际事件或者过程进行再现，称为模拟。

定义 2：在主观或者客观需求驱动下，根据相似性原理，预测或者再现事件或者过程，称为模拟。

定义 3：有目的地根据规律，研究非现时（跨时空）事件或者过程，称为模拟。

材料加工的物理模拟就是根据相似性原理，利用廉价的或易于观测的实物材料进行材料加工过程的再现过程。

早期的材料加工物理模拟有：用常温铅模拟钢的热成形方法、用赛璐珞模拟钢热成形方法、胶泥法、光弹法、光塑法、密栅云纹法等。

现代的材料加工物理模拟主要指采用热模拟试验机进行物理模拟。热模拟试验机出现在第二次世界大战之后，经历了由自由竞争到垄断的发展，目前只剩下为数不多的几家企业在生产，分别是美国 DSI 公司的电阻加热 Gleeble 物理模拟试验机和日本富士电波株式会社的高频感应加热 Themorestor-W 和高频感应及电阻加热 Themocmator-Z，还有近年来我国东北大学研制的电阻加热 MMS 热模拟试验机。

热模拟试验机就是提供了高温环境的动态材料试验机，它可以动态地对材料受热和成形过程全生命周期地进行物理模拟。其模拟功能齐全，应用广泛，可以进行包括连铸冶炼工艺、轧制锻压工艺、焊接工艺、金属热处理工艺和机械热疲劳等方面内容在内的动态过程模拟试验，可以测定金属高温力学性能、应力应变曲线、金属热物性及 CCT 曲线等。

材料加工的物理模拟是在实验室里使用真实的材料经历实际制造工艺或最终服役工况来精确地再现其受热和受力作用的过程。在该模拟过程中使用一个小的真实材料样品，而该样品与全尺寸制品在制造工艺或最终服役工况中具有相同或相似的受热和受力条件。在现代热模拟试验机中模拟的结果将非常具有实用价值，因此，其实验室中的模拟结果可以直接应用到全尺寸的生产实践中。

1.2 现代材料加工的物理模拟技术

为什么要进行现代材料加工的物理模拟呢？主要有以下几个目的：

- (1) 开发新材料或者新合金；
- (2) 降低产品研发的成本；
- (3) 缩短新产品或者新技术的研发周期；
- (4) 深入了解当代工业中材料加工工艺及进一步优化材料加工工艺；
- (5) 提高产品的产量和质量；
- (6) 表征材料的性能。

现代材料加工物理模拟技术主要分为电阻加热、高频感应加热、高频感应及电阻加热的双电源加热方式等三种，前者指的是 Gleeble 系列热模拟试验机，后两种指的是 Themorestor-W 热模拟试验机或者 Themocmastor-Z 热模拟试验机。

1.2.1 电阻加热热模拟试验机

美国的 Gleeble 热模拟试验机是一流的、卓有成效的热模拟试验机之一，它的发展最早是在 1946 年，从 Rensselaer 工学院做的 HAZ 试验机开始的，后来经过九年时间的修改和再设计终于完成了抗干扰的原始热模拟样机 Gleeble500，之后推出模拟电子计算机控制的 Gleeble510、Gleeble1500 和 Gleeble2000 型号的试验机，到了 20 世纪 90 年代又推出了数字电子计算机控制的 Gleeble3500、Gleeble3800、Gleeble1500D 和 Gleeble3180 等型号的热模拟试验机。电阻加热热模拟试验机的特点是加热速度快。

我国的东北大学 MMS 热模拟试验机也采用电阻加热方式。

(1) Gleeble 热模拟试验机的系统组成 Gleeble 热模拟试验机的系统如图 1-1 所示。该系统由温度控制系统和机械控制系统组成，两个系统目前都是采用数字电子计算机控制、解耦控制或独立控制，控制算法采用经典的 PID 控制。系统的组成主要有：主机（机架、液压机械伺服系统、加热变压器和水冷闭环控制系统、应力应变数据测量和数据采集系统、温度数据测量和数据采集系统、真空箱/真空槽和试样夹具等）、控制计算机单元、编程计算机单元、液压站、水冷机组、真空机组和空压机组等，参见图 1-1。

(2) Gleeble 热模拟试验机的加热原理 Gleeble 的加热系统主要是由加热变压器、温度测量与控制系统和冷却系统组成。加热变压器的初级线圈可以接 200V/380V/450V 电压，次级线圈抽头分为高、中、低三档，输出电压范围 3~10V。根据焦耳-楞次定律，电流通过试样后在试样上产生的热量为：

$$Q = I^2 R t \quad (1-1)$$

式中， Q 为电流在试样上产生的热量，J； I 为通过试样的电流，A； R 为试样电阻值， Ω ； t 为通电时间，s。

由于次级回路不是纯电阻，则加热电流为：

$$I = \frac{U}{Z} \quad (1-2)$$

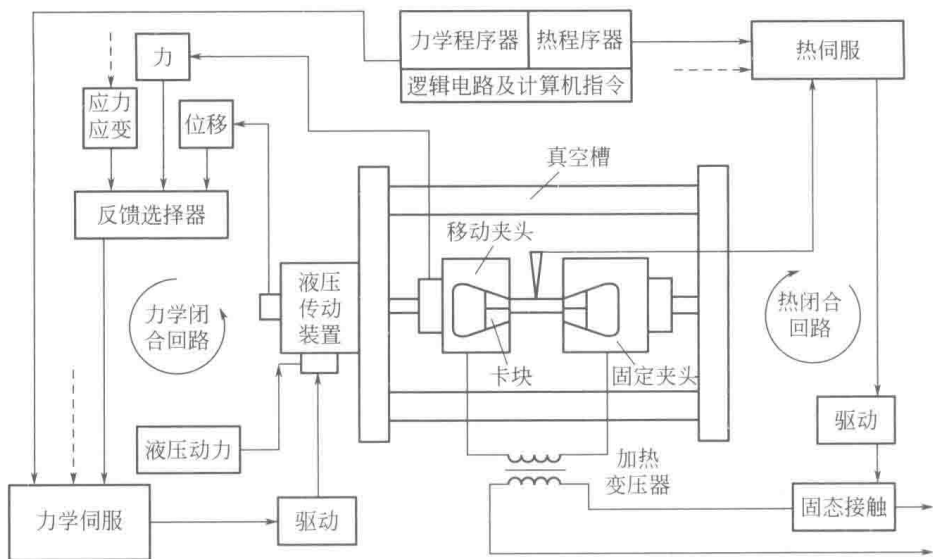


图 1-1 Gleeble 热模拟试验机的系统组成示意图[1]

式中， U 为次级电压； Z 为次级回路阻抗（ $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ ， X 为回路感抗）。

于是试样上产生的热量可以写为：

$$Q = \frac{U^2}{Z^2} \times Rt \tag{1-3}$$

为了获得较快的加热速度或较高的加热温度（单位时间内产生更多的热量），必须提高次级输出电压。

试样尺寸确定后，所需功率取决于所要求的最大加热速度或加热温度；反之，当功率一定时，为了实现所需的高温温度，也可以通过调整试样尺寸或者加热速度来实现。对于输出功率的要求，可以利用数学公式来估算。

设试样的长度为 L ，横截面积为 A ，密度为 ρ ，电阻系数为 s ，比热容为 C ，以 dT/dt 的速率加热试样，忽略热量的损失，则每单位体积要求的功率为：

$$W = \rho C \frac{dT}{dt} \tag{1-4}$$

整个试样所需功率为：

$$P = LA\rho C \frac{dT}{dt} \tag{1-5}$$

试样的电阻为 $R = sL/A$ ，因此，在试样中电流的消耗功率为：

$$P' = I^2 R = I^2 s \frac{L}{A} \tag{1-6}$$

为了满足加热速度的需要，其功率应该相等：

$$P' = P \tag{1-7}$$

即：

$$I^2 s \frac{L}{A} = LA\rho C \frac{dT}{dt} \tag{1-8}$$

于是，试样中的电流密度为：

$$\frac{I}{A} = \sqrt{\frac{\rho C}{s} \times \frac{dT}{dt}} \tag{1-9}$$

试样单位长度的电压降为：

$$\frac{U}{L} = \frac{IR}{L} = \frac{RA}{L} \sqrt{\frac{\rho C}{s} \times \frac{dT}{dt}} = s \sqrt{\frac{\rho C}{s} \times \frac{dT}{dt}} = \sqrt{\rho Cs \times \frac{dT}{dt}} \tag{1-10}$$

根据不同材料的试样计算的结果如表 1-1 所示。

表 1-1 不同材料在加热速度为 1000℃/s 时所需的估算功率

材料	工作温度 /℃	密度 ρ /(g/cm³)	电阻率 σ /(Ω/m)	比热容 C /[J/(kg·K)]	电流密度 /(A/mm²)	电压降 /(V/mm)	单位体积 功率 /(W/mm³)
C-Mn 钢	100	7.9	15.9×10 ⁻⁸	480	150	0.025	3.95
	800		109.4×10 ⁻⁸	950	83	0.091	7.60
6061 铝	20	2.7	3.8×10 ⁻⁸	960	260	0.010	2.6
AISI-347	22	8.0	73×10 ⁻⁸	500	74	0.054	4.0

由于试样的两端有水冷机座冷却，被加热试样的温度分布示意图如图 1-2 所示，为了分析，在试样的长度上 *x* 位置选取单元长度 *dx*，如图 1-3 所示。

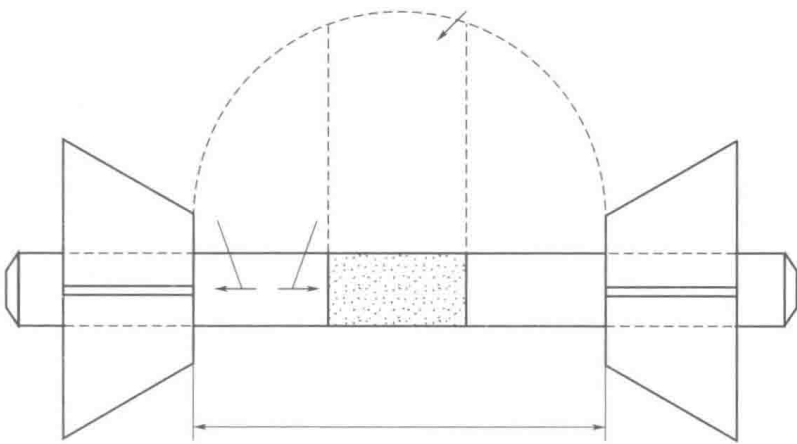


图 1-2 试样沿轴向温度分布示意图

设一试样夹持在夹具之间，夹具温度为 *T*₀，夹具之间的距离为 *L*。当热量在试样中传导时，在 *dt* 时间内，离开某一夹具的距离为 *x* 处，通过试样截面积的传导热量为：

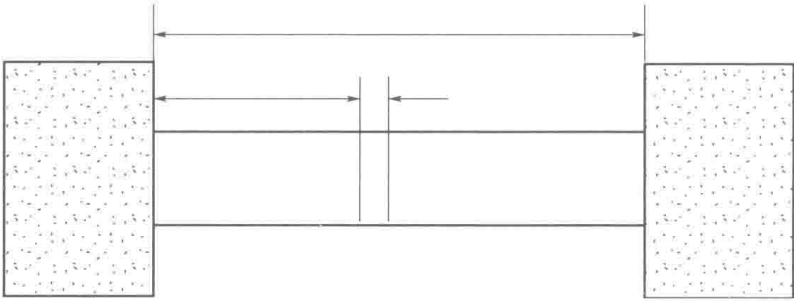


图 1-3 被加热试样温度分布示意图

$$Q = -kA \frac{\partial T}{\partial x} dt \tag{1-11}$$

式中， k 为试样材料的热传导系数； A 为试样的横截面积。

在同一时间内，离开夹具距离为 $(x + dx)$ 处，通过试样截面积的传导热量为：

$$Q + dQ = kA \left[\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] dt \tag{1-12}$$

设单位体积电加热功率为 W ，略去辐射和对流热损失，则在长度 dx 内获得的净热量为：

$$dQ + WA dx dt = kA \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dt \tag{1-13}$$

$$\rho C dTA dt + WA dx dt = kA \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dt \tag{1-14}$$

于是温度的变化率为：

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{\rho C} \left(W + k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \tag{1-15}$$

在稳定状态时：

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, W = -k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{1-16}$$

积分之后得：

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{W}{k} x + a \tag{1-17}$$

当 $x = L/2$ 时：

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \tag{1-18}$$

得：

$$a = \frac{WL}{2k} \tag{1-19}$$

再次积分得：

$$T = -\frac{W}{2k}x^2 + \frac{WL}{2k}x + a' \quad (1-20)$$

在 $x=0$ 处， $T=T_0$ ，故 $a'=T_0$ 。

因此：

$$T = -\frac{W}{2k}x^2 + \frac{WL}{2k}x + T_0 \quad (1-21)$$

或：

$$T - T_0 = -\frac{W}{2k}x^2 + \frac{WL}{2k}x \quad (1-22)$$

当 $x=L/2$ 时，若 $T=T_{\max}$ ，则：

$$T_{\max} - T = \frac{WL^2}{8k} \quad (1-23)$$

令：

$$T = T_{\max} - dT \quad (1-24)$$

则：

$$T_{\max} - dT - T_0 = 4 \frac{T_{\max} - T_0}{L^2} \times (L - x)x \quad (1-25)$$

解得：

$$x = \frac{L}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{dT}{T_{\max} - T_0}} \right) \quad (1-26)$$

于是得出温度处在 $T_{\max}$ 和 $T_{\max} - dT$ 范围内的试样长度，即等温区长度为：

$$dx = L \sqrt{\frac{dT}{T_{\max} - T_0}} \quad (1-27)$$

利用这个公式计算的结果见表 1-2 所示，在 5% 温差范围内，等温区占比为 25%。而不同的环境气氛条件也会影响试样中温度的分布，参见图 1-4。

表 1-2 试样等温区长度和占比计算结果

试样长度 L/mm	最高温度 $T_{\max}/^{\circ}\text{C}$	冷端温度 $T_0/^{\circ}\text{C}$	等温区温差 dT $(0.05T_{\max})/^{\circ}\text{C}$	等温区长度 dx/mm	等温区占比/%
20	100	20	5	5	25
20	200	40	10	5	25
20	300	60	15	5	25
20	400	80	20	5	25
20	500	100	25	5	25
20	600	120	30	5	25
20	700	140	35	5	25