# 考研高数归纳解析

KAOYAN GAOSHU GUINA JIEXI

主　编　王建海

$$\int\left(\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}+\sin x\right)dx$$

大连理工大学出版社

# 考研高数归纳解析

KAOYAN GAOSHU
GUINA JIEXI

主　　编　王建海
副主编　齐　昆　穆嗣娟
　　　　魏　雪　贾宇盟

大连理工大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

考研高数归纳解析 / 王建海主编. — 大连 : 大连理工大学出版社, 2017.6

ISBN 978-7-5685-0882-7

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 141155 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023

发行:0411-84708842 邮购:0411-84708943 传真:0411-84701466

E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://dutp.dlut.edu.cn

大连永盛印业有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm 印张:15.5 字数:354 千字

2017 年 6 月第 1 版 2017 年 6 月第 1 次印刷

责任编辑:王晓历 责任校对:王晓彤

封面设计:张 莹

ISBN 978-7-5685-0882-7 定 价:35.00 元

# 前　言

真题是教育部考试中心各届命题组教师集体智慧的结晶，题目经典，又有规律可循。为了帮助广大考生能够在较短的时间内，准确理解和熟练掌握考研数学考试的出题方式和解题规律，全面提高解题能力，进而更好地驾驭考试，本教材编写团队结合多年的考研辅导和研究精华，精心编写了本教材，真正起到帮助考生提高综合分析和综合解题的能力的作用。

历年来，针对考研高数这一门学科而言，其知识点没有太大变化，而且其考查的重、难点比较稳定，都是往年考试反复考查的内容。考生依据往年真题把握了这些重、难点，就等于成功了一半。练真题，反复揣摩是有效把握这些重、难点的最佳途径。

本教材共分两篇：第一篇为考研高数精选练习题，共九讲；第二篇为考研高数精选练习题解析，共九讲。

本教材由大连交通大学王建海任主编；大连交通大学齐昆、穆嗣娟，大连理工大学魏雪，大连交通大学贾宇盟任副主编；辽宁科技大学菅光霄，大连交通大学牟大伟、王传广、张明水、贺治铭、李振、王刚、邓靖川参与了编写。

限于水平，书中仍有疏漏和不妥之处，敬请专家和读者批评指正，以使教材日臻完善。

**编　者**

2017 年 6 月

所有意见和建议请发往：dutpbk@163.com

欢迎访问教材服务网站：http://www.dutpbook.com

联系电话：0411-84708462　84708445

# 目　录

# 第一篇　考研高数精选练习题

## 第一讲　函数极限以及连续性

一、选择题

1. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,且$a\neq0$,则当$n$充分大时有(　　).

A. $|a_n|>\frac{|a|}{2}$　　B. $|a_n|<\frac{|a|}{2}$　　C. $a_n>a-\frac{1}{n}$　　D. $a_n<a+\frac{1}{n}$

2. 以下不正确的是(　　).

A. 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$

B. 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

C. 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$

D. 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

3. 当$a$取下列哪个值时,函数$f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$恰有两个不同的零点(　　).

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

4. 设$f(x)=\ln^{10}x,g(x)=x,h(x)=e^{\frac{x}{10}}$,则当$x$充分大时有(　　).

A. $g(x)<h(x)<f(x)$　　B. $h(x)<g(x)<f(x)$

C. $f(x)<g(x)<h(x)$　　D. $g(x)<f(x)<h(x)$

5. 设$P(x)=a+bx+cx^2+dx^3$,当$x\to0$时,若$P(x)-\tan x$是比$x^3$高阶的无穷小,则下列计算错误的是(　　).

A. $a=0$　　B. $b=1$　　C. $c=0$　　D. $d=\frac{1}{6}$

6. 当$x\to0$时,$f(x)=x-\sin ax$与$g(x)=x^2\ln(1-bx)$是等价无穷小,则(　　).

A. $a=1,b=-\frac{1}{6}$　　B. $a=1,b=\frac{1}{6}$

C. $a=-1,b=-\frac{1}{6}$　　D. $a=-1,b=\frac{1}{6}$.

7. 已知极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$，其中 $k,c$ 为常数，且 $c\neq 0$，则(　　).

A. $k=2,c=-\dfrac{1}{2}$　　B. $k=2,c=\dfrac{1}{2}$

C. $k=3,c=-\dfrac{1}{3}$　　D. $k=3,c=\dfrac{1}{3}$

8. 已知当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 $cx^k$ 是等价无穷小，则(　　).

A. $k=1,c=4$　　B. $k=1,c=-4$　　C. $k=3,c=4$　　D. $k=3,c=-4$

9. 极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=$(　　).

A. 1　　B. e　　C. $e^{a-b}$　　D. $e^{b-a}$

10. 若$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}-a\right)e^x\right]=1$，则 $a$ 等于(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

11. 设函数 $f(x)=\arctan x$，若 $f(x)=xf'(\xi)$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi^2}{x^2}=$(　　).

A. 1　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

12. 当 $x\to 1$ 时，函数$\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限(　　).

A. 等于 2　　B. 等于 0

C. 为$\infty$　　D. 不存在但不为$\infty$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$，其中 $a^2+c^2\neq 0$，则必有(　　).

A. $b=4d$　　B. $b=-4d$　　C. $a=4c$　　D. $a=-4c$

14. 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$在下列哪个区间内有界(　　).

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

15. 把 $x\to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2\,dt,\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt,\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,dt$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是(　　).

A. $\alpha,\beta,\gamma$　　B. $\alpha,\gamma,\beta$　　C. $\beta,\alpha,\gamma$　　D. $\beta,\gamma,\alpha$

16. 当 $x\to 0^+$ 时，与$\sqrt{x}$等价的无穷小量是(　　).

A. $1-e^{\sqrt{x}}$　　B. $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　　C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　D. $1-\cos\sqrt{x}$

17. 当 $x\to 0^+$ 时，若 $\ln^\alpha(1+2x)$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 $x$ 高阶的无穷小，则 $\alpha$ (　　).

A. $(2,+\infty)$　　B. $(1,2)$　　C. $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　　D. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

18. 当 $x\to 0$ 时，用“$o(x)$”表示比 $x$ 高阶的无穷小，则下列式子中错误的是(　　).

A. $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$　　B. $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$

C. $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$　　D. $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$

19. 设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，其中 $|\alpha(x)|<\frac{\pi}{2}$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是(　　).

A. 比 $x$ 高阶的无穷小　　B. 比 $x$ 低阶的无穷小

C. 与 $x$ 同阶但不等价的无穷小　　D. 与 $x$ 等价的无穷小

20. 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\,dt$，$g(x)=x^3+x^4$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的(　　).

A. 等价无穷小　　B. 同阶但非等价的无穷小

C. 高阶无穷小　　D. 低阶无穷小

21. 设 $\alpha_1=x(\cos\sqrt{x}-1)$，$\alpha_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})$，$\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1$，当 $x\to 0^+$ 时，以上三个无穷小量按从低到高阶排序是(　　).

A. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　B. $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$　　C. $\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3$　　D. $\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$

22. 函数 $f(x)=\frac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点的个数为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 无穷多个

23. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续，则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}$ 的(　　).

A. 跳跃间断点.　　B. 可去间断点.　　C. 无穷间断点.　　D. 振荡间断点.

24. 函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内(　　).

A. 连续　　B. 有可去间断点

C. 有跳跃间断点　　D. 有无穷间断点

25. 设函数 $f(x)=\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则(　　).

A. $x=0$，$x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

B. $x=0$，$x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

C. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

D. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

26. 函数 $f(x)=\frac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

27. 函数 $f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

28. 设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$(　　).

A. 在 $x=0$ 处左极限不存在　　B. 有跳跃间断点 $x=0$

C. 在 $x=0$ 处右极限不存在　　D. 有可去间断点 $x=0$

29. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，$g(x)=\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则(　　).

A. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点

B. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点

C. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点

D. $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 $a$ 的值有关

30. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\cos\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>0\\ 0, & x\leqslant0\end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0)$，若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则(　　).

A. $\alpha-\beta>1$

B. $0<\alpha-\beta\leqslant1$

C. $\alpha-\beta>2$

D. $0<\alpha-\beta\leqslant2$

31. 设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有(　　).

A. $a_n<b_n$ 对任意 $n$ 成立

B. $b_n<c_n$ 对任意 $n$ 成立

C. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在

D. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

32. 设 $a_n>0(n=1,2,3,\cdots)$，$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$，则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的(　　).

A. 充分必要条件

B. 充分非必要条件

C. 必要非充分条件

D. 非充分也非必要

33. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，令 $u_n=f(n)=1,2,\cdots,n$，则下列结论正确的是(　　).

A. 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛

B. 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散

C. 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛

D. 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散

34. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是(　　).

A. 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

B. 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

C. 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛

D. 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛

**二、填空题**

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=$________.

2. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$________.

3. 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x)=2(x-1)$，$x\in[0,2]$，则 $f(7)=$________.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=$________.

5. 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin2x}-1}{e^{3x}-1}=2$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=$________.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{1-\cos x^2}=$________.

7. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}=$________.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}=$________.

9. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$________.

10. 已知函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos[xf(x)]}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)f(x)}=1$，则 $f(0)=$________.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$________.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$________.

13. 设 $f(x)=\begin{cases}x^\lambda\cos\dfrac{1}{x}, & 若\ x\neq 0\\ 0, & 若\ x=0\end{cases}$，其导函数在 $x=0$ 处连续，则 $\lambda$ 的取值范围是________.

14. 已知曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 $x$ 轴相切，则 $b^2$ 可以通过 $a$ 表示为 $b^2=$________.

15. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$________，$b=$________.

16. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$________.

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$________.

18. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & |x|\leqslant c\\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $c=$________.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-\mathrm{e}^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)=$________.

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$________.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$________.

22. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$________.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$________.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$________.

25. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$，则 $f'(x)=$________.

26. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

27. 当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 $k=$________.

28. 若 $x\to 0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$________.

29. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=$________.

30. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=9$，则常数 $a=$________.

31. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则 $f[f(x)]=$________.

32. 已知当 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则常数 $a=$________.

33. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$________.

34. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x=$________.

35. $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$________.

36. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，则 $a=$________.

37. 函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是 $x=$________.

**三、计算题**

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)$.

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

3. 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$，求 $c$ 的值.

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

5. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

6. 设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x}$，$x>0$，$y>0$，求：

(1) $g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$；(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)$.

7. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}$.

8. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

9. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.

10. 计算$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$.

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

12. 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq0$，求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x(x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$.

13. 求极限$\lim\limits_{x\to0}(\cos2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

14. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

15. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

16. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4x}$.

17. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$，记 $a=\lim\limits_{x\to0}f(x)$，

(1)求 $a$ 的值；(2)若 $x\to0$ 时，$f(x)-a$ 与 $x^k$ 是同阶无穷小，求常数 $k$ 的值.

18. 已知函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^\alpha}$，设 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$，试求 $\alpha$ 的取值范围.

19. 试确定 $A,B,C$ 的值，使得 $e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$，其中 $o(x^3)$是当 $x\to0$时比 $x^3$ 高阶的无穷小.

20. 设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$，若 $f(x)$与 $g(x)$在 $x\to0$ 是等价无穷小，求 $a,b,k$ 的值.

21. 当 $x\to0$ 时，$1-\cos x\cos2x\cos3x$ 与 $ax^n$ 为等价无穷小，求 $n$ 与 $a$ 的值.

22. 求极限$\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记为 $f(x)$，求函数 $f(x)$的间断点并指出其类型.

23. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0\\ 6, & x=0\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x>0\end{cases}$，问 $a$ 为何值时，$f(x)$在 $x=0$ 处连续；$a$ 为何值时，$x=0$ 是 $f(x)$的可去间断点？

24. $f(x)=\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)}$，$x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$. 试补充定义 $f(1)$使 $f(x)$在$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$上

连续.

25. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

26. (1) 比较$\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t$与$\int_0^1 t^n|\ln t|\mathrm{d}t(n=1,2,\cdots)$的大小,说明理由;

(2) 记$u_n=\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t(n=1,2,\cdots)$,求极限$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

27. 证明:(1)对任意的正整数$n$,都有$\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$成立.

(2)设$a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n(n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{a_n\}$收敛.

28. 设$x_1=10,x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1,2,\cdots)$,试证数列$\{x_n\}$极限存在,并求此极限.

29. 设函数$f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$,

(1)求$f(x)$的最小值.

(2)设数列$\{x_n\}$满足$\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,并求此极限.

30. (1)证明方程$x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$($n$是$>1$的整数)在区间$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$内有且仅有一个根.

(2)记(1)中的实根为$x_n$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,并求此极限.

31. 设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi,x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,3,\cdots)$

证明:(1)$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,并求极限;(2)计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

# 第二讲　导数及其应用

## 一、选择题

1. 设函数 $g(x)$ 可微，$h(x)=e^{1+g(x)}$，$h'(1)=1$，$g'(1)=2$，则 $g(1)$ 等于(　　).

A. $\ln 3-1$　　B. $-\ln 3-1$　　C. $-\ln 2-1$　　D. $\ln 2-1$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$，则(　　).

A. $f(0)=0$ 且 $f'(0^-)$ 存在　　B. $f(0)=1$ 且 $f'(0^-)$ 存在

C. $f(0)=0$ 且 $f'(0^+)$ 存在　　D. $f(0)=1$ 且 $f'(0^+)$ 存在

3. 设 $f(0)=0$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导 $\Leftrightarrow$(　　).

A. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cos h)}{h^2}$ 存在　　B. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}$ 存在

C. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}$ 存在　　D. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}$ 存在

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2g(x), & x\leqslant 0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

A. 极限不存在　　B. 极限存在，但不连续

C. 连续，但不可导　　D. 可导

5. 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得(　　).

A. $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加　　B. $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少

C. 对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$　　D. 对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$

6. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内(　　).

A. 处处可导　　B. 恰有一个不可导点

C. 恰有两个不可导点　　D. 至少有三个不可导点

7. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内有定义，若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，恒有 $|f(x)|\leqslant x^2$，则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的(　　).

A. 间断点　　B. 连续而不可导的点

C. 可导的点，且 $f'(0)=0$　　D. 可导的点，且 $f'(0)\neq 0$

8. 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，$\Delta x$ 为自变量 $x$ 在 $x_0$ 处的增量，$\Delta y$ 与 $dy$ 分别为 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则(　　).

A. $0<dy<\Delta y$　　B. $0<\Delta y<dy$

C. $\Delta y<dy<0$　　D. $dy<\Delta y<0$

9. 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 不可导点的个数是(　　).

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

10. 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的(　　).

A. 充分必要条件　　B. 充分条件但非必要条件

C. 必要条件但非充分条件　　D. 既非充分条件又非必要条件

11. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是(　　).

A. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$　　B. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

C. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在　　D. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 0 \\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n}, n=1,2,\cdots \end{cases}$，则(　　).

A. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点　　B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

C. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导　　D. $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

13. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(x)>0$，$f'(0)=0$，则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件为(　　).

A. $f(0)>1, f''(0)>0$　　B. $f(0)>1, f''(0)<0$

C. $f(0)<1, f''(0)>0$　　D. $f(0)<1, f''(0)<0$

14. 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 $n$ 为正整数，则 $f'(0)=$(　　).

A. $(-1)^{n-1}(n-1)!$　　B. $(-1)^n(n-1)!$

C. $(-1)^{n-1}n!$　　D. $(-1)^n n!$

15. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$(　　).

A. $-2f'(0)$　　B. $-f'(0)$　　C. $f'(0)$　　D. 0

16. 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 $n$ 为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

17. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\dfrac{2}{n}\right)-1\right]=$(　　).

A. 2　　B. 1　　C. $-1$　　D. $-2$

18. 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)\mathrm{d}t$，则 $f'(x)$ 的零点个数(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

19. 函数 $f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

20. 曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x(a\neq 0)$ 相切，则 $a=$(　　).

A. 4e　　B. 3e　　C. 2e　　D. e

21. 设 $f(x)=x^2(x-1)(x-2)$，则 $f'(x)$ 的零点个数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

22. 以下四个命题中，正确的是(　　).

A. 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

B. 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

C. 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

D. 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

23. 若 $f''(x)$ 不变号，且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率圆为 $x^2+y^2=2$，则 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 内(　　).

A. 有极值点，无零点　　B. 无极值点，有零点

C. 有极值点，有零点　　D. 无极值点，无零点

24. 已知函数 $y=f(x)$ 对一切 $x$ 满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$，$f'(x_0)=0\ (x_0\neq 0)$，则(　　).

A. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

B. $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

D. $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(x_0, f(x_0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

25. 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则当 $n$ 为大于 2 的正整数时，$f(x)$ 的 $n$ 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是(　　).

A. $n!\ [f(x)]^{n+1}$　　B. $n[f(x)]^{n+1}$　　C. $[f(x)]^{2n}$　　D. $n!\ [f(x)]^{2n}$

26. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且对任意 $x_1, x_2$，当 $x_1>x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则(　　).

A. 对任意 $x$，$f'(x)>0$　　B. 对任意 $x$，$f'(-x)\leqslant 0$

C. 函数 $f(-x)$ 单调增加　　D. 函数 $-f(-x)$ 单调增加

27. 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则 $f'(0)$，$f'(1)$，$f(1)-f(0)$，$f(0)-f(1)$ 的大小顺序是(　　).

A. $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　B. $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

C. $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　D. $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

28. 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 上(　　).

A. 当 $f'(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$　　B. 当 $f'(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$

C. 当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$　　D. 当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$

29. 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f'(a)>0$，$f'(b)<0$，则下列结论中错误的是(　　).

A. 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>f(a)$

B. 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>f(b)$

C. 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$

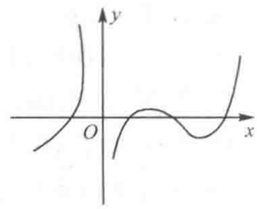
D. 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=0$

30. 设 $f(x)$，$g(x)$是恒大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则当 $a<x<b$时，有(　　).

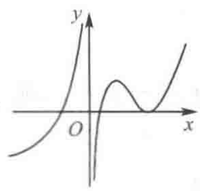
A. $f(x)g(b)>f(b)g(x)$　　　　B. $f(x)g(a)>f(a)g(x)$

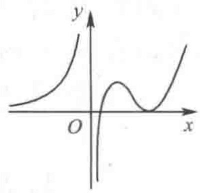
C. $f(x)g(x)>f(b)g(b)$　　　　D. $f(x)g(x)>f(a)g(a)$

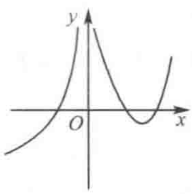
31. 设函数 $f(x)$在定义域内可导，$y=f(x)$的图形如右图所示，则 $y=f'(x)$的图形为(　　).

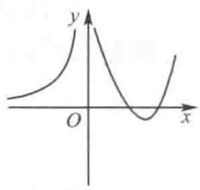


题 31 图

A. 

B. 

C. 

D. 

32. 设 $f(x)=x\sin x+\cos x$，下列命题中正确的是(　　).

A. $f(0)$是极大值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$是极小值　　　　B. $f(0)$是极小值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$是极大值

C. $f(0)$是极大值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$也是极大值　　　　D. $f(0)$是极小值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$也是极小值

33. 设 $f(x)$具有二阶连续导数，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{|x|}=1$，则(　　).

A. $f(0)$是 $y=f(x)$的极大值

B. $f(0)$是 $y=f(x)$的极小值

C. $(0,f(0))$是曲线 $y=f(x)$的拐点

D. $f(0)$不是 $f(x)$的极值，$(0,f(0))$也不是曲线 $y=f(x)$的拐点

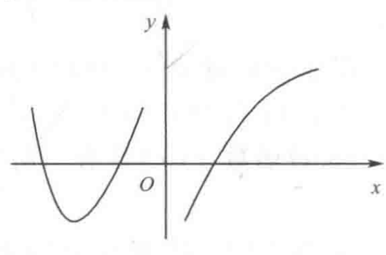
34. 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$有(　　).

A. 一个极小值点和两个极大值点

B. 两个极小值点和一个极大值点

C. 两个极小值点和两个极大值点

D. 三个极小值点和一个极大值点



题 34 图

35. 设 $f(x)=|x(1-x)|$，则(　　).

A. $x=0$ 是 $f(x)$的极值点，但$(0,0)$不是曲线 $y=f(x)$的拐点.

B. $x=0$ 不是 $f(x)$的极值点，但$(0,0)$是曲线 $y=f(x)$的拐点.

C. $x=0$ 是 $f(x)$的极值点，且$(0,0)$是曲线 $y=f(x)$的拐点.

D. $x=0$ 不是 $f(x)$的极值点，$(0,0)$也不是曲线 $y=f(x)$的拐点.

36. 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点为(　　).