



# 冗余空间机器人操作臂： 运动学、轨迹规划及控制



徐文福 梁 斌 著



科学出版社

# 冗余空间机器人操作臂： 运动学、轨迹规划及控制

徐文福 梁 斌 著

科 学 出 版 社

北 京

## 内 容 简 介

本书对冗余空间(此处的“空间”,与“平面”相对应)机器人操作臂运动学、轨迹规划与控制等进行系统、深入的论述,包括冗余机器人构型设计、正运动学建模、解析逆运动学求解方法、奇异分析及奇异回避、障碍回避、容错控制、力柔顺控制等。所介绍的方法,可以解决各种典型结构的冗余机械臂,包括球腕及非球腕机械臂的相关问题。书中涉及的理论及方法大多已发表在国际顶级期刊上,或在顶级国际学术会议上宣读过,并已实际用于我国航天项目和工业领域中,具有较强的创新性与实用价值。

本书可作为高等院校相关专业研究生和高年级本科生的教材,也可供从事机器人技术研究及应用的研发人员及工程技术人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

冗余空间机器人操作臂:运动学、轨迹规划及控制/徐文福,梁斌著. — 北京:科学出版社,2017.11

ISBN 978-7-03-054828-3

I. ①冗… II. ①徐… ②梁… III. ①空间机器人—操作臂  
IV. ①TP242.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第253325号

责任编辑:赵艳春 / 责任校对:郭瑞芝

责任印制:张 伟 / 封面设计:迷底书装

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京科印技术咨询服务公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2017年11月第一版 开本:720×1000 B5

2017年11月第一次印刷 印张:21 3/4

字数:423 000

定价:118.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)



## 序

作为“制造业皇冠顶端的明珠”，机器人技术是衡量一个国家科技创新和高端制造业水平的重要标志。机器人可以代替人类从事各种繁重、枯燥、重复性的作业任务，也可以成为人们的亲密伙伴，为日常生活提供各种服务。多自由度操作臂是实现这些功能的关键。一般而言，在 3D 空间进行操作最少需要 6 个自由度的运动能力以对操作工具进行定位和定姿，即 3 个自由度的平动和 3 个自由度的转动，这也是很多工业机器人采用 6 轴结构的原因。而在实际中，除了需要实现工具的定位和定姿外，还需要考虑障碍回避，运动学奇异回避，以及关节力矩优化等问题，这就需要机器人具有更多的自由度，即至少 7 个自由度。由于冗余机器人的独特优势，其在航天、军工、制造等领域都具有巨大的应用前景，如用于国际空间站的机器人宇航员、加拿大臂、灵巧机械臂等，均为冗余机器人；世界工业机器人巨头也都推出了具有冗余自由度的机器人。因此，该专著以冗余机器人作为对象，对其运动学、轨迹规划和控制等关键技术展开系统、深入的论述，具有重要的理论意义和实用价值。

该专著是作者结合多年来承担国家自然科学基金、863 计划等国家级项目过程中所取得的研究成果，经过深思熟虑，花费大量精力写成的一部高水平学术著作。针对冗余机器人逆运动学有无穷多组解的情况，提出了参数化的解析逆运动学方法，较好的解决了从任务空间到关节空间的求解问题；针对机器人执行末端轨迹跟踪过程中常遇到的运动学奇异问题，提出了基于运动空间分解的冗余机器人运动学奇异分析方法，以及降阶的奇异回避方法，大大提高了计算效率；针对作业环境中存在的多个移动障碍的情况，提出了基于伪距离和欧拉距离相结合的障碍回避方法；针对机器人与环境接触的情况，提出了基于阻抗原理以及力/位混合策略的柔顺控制方法；同时，考虑到关节故障的情况，提出了故障情况下的运动学重建及容错控制方法。专著中所涉及的大部分研究成果已发表在国际顶级期刊或国际顶级学术会议论文集中，部分成果已实际用于我国航天型号项目上，为飞行任务的圆满完成发挥了重要作用。

作者秉承理论创新与实际应用兼顾的原则，在内容的编排上由浅入深。该书结构清晰，内容丰富，理论联系实际，语言简洁明了，体现了极高的写作水平。该书的作者徐文福教授是我培养的博士生，于 2007 年 4 月获哈尔滨工业大学控制科学与工程博士学位，博士毕业后留校任教至今，入选了哈尔滨工业大学青年拔尖人才（教授），多年来一直从事机器人技术的研究并取得了丰硕的成果，主持了多项国家自然

科学基金并发表了大量的高水平学术论文。另一位作者梁斌教授为清华大学自动化系长聘教授、导航与控制研究所所长、博士生导师，担任 863 空间智能机器人重大项目专家组组长，并长期担任重大项目的研制工作，他于 1996 年赴美国卡内基梅隆大学机器人研究所开展了访问研究。两位学者均在机器人领域具有十几年甚至二十几年的研究经验，联合撰写了该学术专著，实乃为学术界的幸事。相信该书一定会让相关领域的读者受益匪浅。

汤文义

教授、博导

哈尔滨工业大学原副校长

2017 年 6 月

# 前 言

与非冗余机器人相比,冗余机器人的自由度数超过执行任务所必需的自由度数,从而具有更高的灵巧性,可以完成更复杂的任务,特别是在障碍回避、奇异回避、力矩优化等方面具有独特的优势,因而在航天、军工、制造等领域都具有巨大的应用前景。用于国际空间站建设与维护的遥操作机械臂 Canadarm2(加拿大机械臂 2)、灵巧机械臂 Dextre、机器人宇航员 Robonaut2 等,均为冗余机器人;世界工业机器人巨头 KUKA、ABB 等也都推出了具有冗余自由度的机器人,以满足新的应用需求。这意味着冗余空间机器人(此处的“空间”,与“平面”相对应,而不是专指太空)在未来将发挥越来越重要的作用。然而,由于自由度数的增加,在运动学建模、轨迹规划及控制等方面,冗余机器人要比非冗余机器人复杂很多,相关的理论与方法亟待完善。

冗余机器人的逆运动学具有无穷多组解,即给定一组末端位姿,将有无数组关节角与之相对应,如何设计合理的构型、根据任务要求获得所需的关节角并保证实时性,是研究者首先需要解决的关键问题;运动学奇异会导致机器人运动能力的减弱,在奇异点附近,关节角速度、关节力矩会趋于无限大,这在实际中是不允许的,因此,既保证末端位姿精度,又回避奇异的影响,对于平稳、高精度控制而言至关重要;在操作过程中,由于工作环境的限制,将有不同形状、不同大小的障碍物存在,机器人需要避开障碍物,顺利地到达期望目标;当部分关节发生故障时,还要求冗余机器人继续完成任务,以提高任务的可靠性,这涉及容错控制的问题;当与环境接触时,为避免机器人与环境产生不期望的碰撞而损坏机器人及工件,需要采用柔顺控制方法。针对上述问题,作者多年来在国家自然科学基金和 863 计划项目等的支持下,开展了 10 多年的研究,取得了一系列的研究成果。

本书基于作者所领导的课题组多年的研究成果,对冗余空间机器人相关理论和方法进行系统、深入的论述,这些方法可以用来解决各种典型结构的冗余机械臂,包括球腕及非球腕的机械臂的相关问题。书中涉及的理论及方法大多发表在顶级国际期刊或学术会议论文集中,并已实际应用于我国的航天项目上,具有较强的创新性和实用价值,通过本书的学习,读者将会在理论、方法和实践上得到极大的提高,可以根据任务需求设计冗余机械臂的构型、开发轨迹规划及运动控制算法。

本书共分为 11 章,第 1 章是绪论,主要介绍冗余机器人的概念、国内外发展现状及研究的热点问题;第 2 章分析典型冗余机器人的构型特点,论述球腕冗余机器人的最优构型和非球腕冗余机器人的通用构型设计方法;第 3 章介绍冗余机器人的建模基础,包括变量定义、位置级及速度级运动学方程的推导;第 4 章阐述关节角

参数化解析逆运动学求解方法，通过给定其中一个关节角的取值，可获得其他所有关节角的解析表达式；第5章阐述基于臂型角参数化的解析逆运动学求解方法，将冗余性表示为臂型角参数，当给定任意的参数值时，可获得所有关节角的解析表达式；第6章介绍冗余机器人的轨迹规划方法，包括关节空间轨迹规划和笛卡尔空间轨迹规划方法，可解决实际作业任务中的常见问题；第7章论述基于 Jacobian 矩阵初等变换的运动学奇异分析方法，将高维的矩阵分解为几个子矩阵，通过分析其中一个子矩阵的奇异条件可得到所有的奇异条件；第8章阐述运动空间分解及降阶的奇异回避方法，将机器人运动空间分解为奇异空间和非奇异空间后，仅需对奇异空间进行低阶的奇异回避处理，计算效率高，实时性得到保证；第9章介绍基于伪距离和欧拉距离相结合的障碍回避方法，可实现单个及多个运动障碍的回避；第10章阐述执行精细作业过程中的柔顺控制方法，包括阻抗控制及力/位混合控制方法；第11章介绍容错性能分析及单关节故障下的容错控制方法。

本书在撰写的过程中，得到了国家自然科学基金面上项目“大型柔性结构在轨装配的多臂空间机器人协调控制研究”(61573116)、“空间机器人捕获大挠性非合作航天器的动力学与控制研究”(61175098)，军口863项目“轻质××机器人概念设计与关键技术的研究”(2015AA21××)、深圳市基础研究学科布局项目“宇航机构可重构动力学与控制研究”(JCYJ20150529141408781)以及“面向未知环境探测的仿生机器人关键技术研究”(JCYJ20160427183553203)等课题的资助。本书的完成是集体智慧的结晶，除了作者徐文福、梁斌，课题组研究生也做了大量工作。撰写过程中参考了课题组牟宗高、闫磊、胡忠华、余宇、张金涛、韩亮、周瑞兴、张斯然、王成疆等研究生的学位论文，在此一并感谢。另外，对本书所参考的所有文献的作者表示诚挚的谢意。

徐文福教授负责本书的统筹规划和修订，重点撰写了其中的第1、2、3、4、5、7、8章，梁斌教授重点撰写了第6、9、10、11章，闫磊博士参与撰写了第5、10章，牟宗高博士参与撰写了第9章，胡忠华博士帮助撰写了第11章。闫磊博士还为本书的排版和文字校阅做了大量工作；胡忠华、牟宗高、韩亮、刘天亮、潘尔振等博士也参与了文字校阅工作。

由于冗余空间机器人技术的发展不断完善，应用不断普及，对功能和性能的要求不断提高，很多新技术不断对相关的理论与方法产生影响，因此，冗余空间机器人的理论和方法仍在发展与完善之中，加之撰写时间有限，书中难免有些不足之处，敬请广大读者指正。

作者

2017年6月

# 目 录

序

前言

第 1 章	绪论	1
1.1	冗余机器人的概念及内涵	1
1.1.1	冗余机器人及冗余性	1
1.1.2	自运动	3
1.1.3	奇异性和逃逸性	4
1.2	冗余机械臂的必要性分析	5
1.3	冗余空间机器人国内外发展现状	8
1.3.1	国际空间站冗余机器人	8
1.3.2	自由飞行的冗余空间机器人	15
1.3.3	地面应用的冗余机械臂	23
1.4	冗余空间机器人研究中的热点问题	26
1.4.1	冗余空间机器人解析逆运动学	26
1.4.2	运动学奇异分析与奇异回避	27
1.4.3	冗余空间机器人障碍回避	28
1.4.4	冗余空间机器人被动柔顺控制	30
1.4.5	冗余空间机器人容错控制	32
1.5	小结	33
第 2 章	冗余空间机器人操作臂的构型设计	34
2.1	典型冗余机械臂构型分类	34
2.1.1	球腕冗余机械臂构型	34
2.1.2	非球腕冗余机械臂构型	35
2.2	球腕冗余机械臂最优构型设计	36
2.2.1	七自由度球腕冗余机械臂的设计依据	36
2.2.2	最优构型(无偏置 SRS)的确定	40
2.2.3	肘部偏置式 SRS 机械臂臂型设计	40
2.3	非球腕冗余机械臂通用构型设计	41
2.3.1	常见的七自由度非球腕冗余机械臂构型	41



2.3.2	通用的非球腕冗余机械臂构型设计 .....	43
2.4	小结 .....	45
<b>第3章</b>	<b>冗余空间机械臂运动学建模基础 .....</b>	<b>46</b>
3.1	变量及坐标系定义 .....	46
3.1.1	刚体位置的描述 .....	46
3.1.2	刚体姿态的表示 .....	47
3.1.3	关节位置变量与末端位姿变量 .....	49
3.1.4	关节速度变量与末端速度变量 .....	50
3.2	机器人 D-H 坐标系建立规则 .....	51
3.2.1	D-H 坐标系定义 .....	51
3.2.2	D-H 坐标系建立的步骤 .....	52
3.3	位置级运动学方程 .....	53
3.3.1	位置级正运动学方程 .....	53
3.3.2	位置级逆运动学方程 .....	53
3.4	速度级运动学方程 .....	54
3.4.1	速度级正运动学方程 .....	54
3.4.2	速度级逆运动学方程 .....	55
3.5	冗余机器人速度级逆运动学求解方法 .....	56
3.5.1	常规梯度投影法及其局限性 .....	56
3.5.2	逆运动学实时算法 .....	56
3.6	小结 .....	61
<b>第4章</b>	<b>关节角参数化解析逆运动学求解 .....</b>	<b>62</b>
4.1	基于关节角的冗余参数描述 .....	62
4.2	连续三轴平行冗余机械臂的关节角参数化 .....	63
4.2.1	连续三轴平行机械臂关节角参数化方法 .....	63
4.2.2	三轴平行型机械臂关节角参数化算例分析 .....	69
4.3	两两垂直型冗余机械臂关节角参数化 .....	71
4.3.1	两两垂直型冗余机械臂关节角参数化方法 .....	71
4.3.2	两两垂直型机械臂逆运动学求解流程 .....	75
4.3.3	两两垂直型机械臂关节角参数化算例分析 .....	87
4.4	小结 .....	89
<b>第5章</b>	<b>臂型角参数化解析逆运动学求解 .....</b>	<b>90</b>
5.1	基于臂型角的冗余参数描述 .....	90
5.2	臂型角参数化求解方法 .....	92

5.2.1	肘部关节角的求解	93
5.2.2	初始姿态 ${}^0R_3^{\psi=0}$ 的求解	93
5.2.3	肩部关节角的求解	94
5.2.4	腕部关节角的求解	95
5.2.5	臂型角参数化求解过程	95
5.3	无奇异双臂型角参数化方法	96
5.3.1	双臂型角的定义	96
5.3.2	双臂型角参数化求解方法	97
5.4	典型7DOF冗余机械臂逆运动学求解	98
5.4.1	SRS三轴平行型机械臂逆运动学	98
5.4.2	SRS两两垂直型机械臂逆运动学	101
5.4.3	SSRMS肩-肘-腕偏置型机械臂逆运动学	104
5.5	小结	110
第6章	冗余机器人路径规划方法	111
6.1	机器人规划的基本概念	111
6.1.1	机器人规划的层次划分	111
6.1.2	机器人的路径规划	112
6.1.3	机器人的路径规划与控制的关系	113
6.2	关节空间路径规划	114
6.2.1	梯形速度插值	114
6.2.2	用抛物线拟合的线性插值	116
6.2.3	三次多项式插值	117
6.2.4	五次多项式插值	119
6.2.5	三次样条插值	120
6.3	笛卡儿空间路径规划	128
6.3.1	基于位置级求逆的笛卡儿空间路径规划	128
6.3.2	基于速度级求逆的笛卡儿空间路径规划	129
6.3.3	基于驱动函数的笛卡儿直线轨迹规划	130
6.4	小结	136
第7章	基于Jacobian矩阵初等变换的运动学奇异分析	137
7.1	改造后的微分运动学方程	137
7.1.1	运动螺旋的改造	137
7.1.2	运动方程的改造	139
7.1.3	不同参考系对Jacobian矩阵奇异条件的影响	140

7.2	不改变关节独立性的 Jacobian 矩阵初等变换	141
7.2.1	初等行变换	142
7.2.2	初等列变换	144
7.3	球腕机械臂奇异构型分析	146
7.3.1	球腕机械臂改造后的 Jacobian 矩阵	146
7.3.2	Jacobian 矩阵的初等变换	148
7.3.3	球腕机械臂实例分析	150
7.4	非球腕机械臂奇异构型分析	154
7.4.1	非球腕机械臂改造后的 Jacobian 矩阵	154
7.4.2	Jacobian 矩阵的初等变换	155
7.4.3	欧洲机械臂奇异条件分析实例	160
7.4.4	国际空间站遥操作机械臂的奇异条件分析	164
7.5	单关节锁定后退化的六自由度机械臂奇异分析	172
7.6	小结	173
<b>第 8 章</b>	<b>冗余机器人运动空间分解及奇异回避</b>	<b>174</b>
8.1	传统的奇异回避方法及其缺陷	174
8.1.1	Jacobian 矩阵的奇异值分解	174
8.1.2	基于阻尼最小方差法的奇异回避路径规划	175
8.1.3	基于梯度投影法的奇异回避路径规划	176
8.1.4	其他常规方法	177
8.2	运动空间分解	178
8.3	单关节锁定下退化的六自由度机械臂奇异规避	180
8.3.1	阻尼最小二乘法求解子问题	180
8.3.2	基于阻尼倒数的实用方法	180
8.4	降阶的冗余机械臂奇异规避方法	186
8.4.1	降阶法原理	186
8.4.2	降阶的可操作性优化方法	187
8.4.3	降阶的分块主子式优化方法	188
8.4.4	奇异条件参数优化算法	190
8.4.5	计算量比较	191
8.4.6	奇异回避方法仿真验证	193
8.5	进一步讨论	199
8.5.1	算法的普适性	199
8.5.2	参考系的选取	200
8.6	小结	201

第 9 章 冗余机器人障碍回避方法	202
9.1 典型障碍物几何建模	202
9.1.1 典型设备轮廓分析	202
9.1.2 典型障碍物的建模	204
9.1.3 障碍物属性的定义及任意坐标系下的描述	207
9.2 避障规划	209
9.2.1 避障规划原理	210
9.2.2 障碍回避方法	213
9.3 避障规划仿真	216
9.3.1 球形避碰轨迹规划仿真	217
9.3.2 圆柱形避碰轨迹规划仿真	223
9.3.3 正方体避碰轨迹规划仿真	228
9.4 小结	234
第 10 章 冗余机器人力柔顺控制方法	235
10.1 机器人柔顺控制方法分类	235
10.2 冗余空间机械臂及接触建模	236
10.2.1 空间机械臂和 ORU 的构型及参数	236
10.2.2 空间机器人多体动力学建模	237
10.2.3 工作环境建模	240
10.3 冗余空间机械臂的阻抗控制方法的研究	244
10.3.1 阻抗控制的基本原理	244
10.3.2 基于位置的阻抗控制	246
10.3.3 基于力的阻抗控制	247
10.3.4 仿真验证	248
10.3.5 基于力与基于位置的阻抗控制方法对比	252
10.4 冗余空间机械臂的力/位混合控制方法	253
10.4.1 力/位混合控制的基本原理	253
10.4.2 选择矩阵的改进	255
10.4.3 位置环控制	256
10.4.4 力环控制	257
10.4.5 仿真验证	258
10.4.6 阻抗控制与力/位混合控制对比	262
10.5 冗余空间机械臂力柔顺控制实验	263
10.5.1 实验设备	263

10.5.2	恒力位移实验	264
10.5.3	接触碰撞实验	266
10.6	小结	267
<b>第 11 章</b>	<b>冗余机器人容错控制方法</b>	<b>268</b>
11.1	容错控制技术概述	268
11.2	冗余机械臂容错性能分析	270
11.2.1	冗余机器人运动学优化	270
11.2.2	容错性能指标	271
11.3	冗余机械臂单关节故障下的运动学建模	273
11.3.1	单关节故障后重建 D-H 参数	274
11.3.2	基于重建 D-H 参数表的运动学分析	281
11.3.3	单关节故障情况下实例分析	296
11.4	冗余机械臂单关节故障下的动力学建模	298
11.4.1	单关节故障下机械臂的动力学参数	298
11.4.2	单关节故障下的拉格朗日动力学方程	307
11.5	冗余机械臂单关节故障下的轨迹规划和容错控制	309
11.5.1	自运动空间位置级轨迹规划	309
11.5.2	跟踪误差状态表达方程	313
11.5.3	基于 $H^\infty$ 鲁棒控制器设计	315
11.5.4	MATLAB 仿真实验结果分析	318
11.6	小结	327
<b>参考文献</b>		<b>329</b>

# 第 1 章 绪 论

根据国际机器人联合会(International Federation of Robotics, IFR)的定义,机器人(robot)是一种半自主或全自主工作的机器,它能完成有益于人类的工作。其中,应用于生产过程的称为工业机器人,应用于家庭或直接服务于人的称为服务机器人,应用于特殊环境的称为专用机器人(或特种机器人)。换句话说,任何自动完成作业任务的机器装置都可称为机器人,它包括一切模拟人类或动物的行为或思想的机械,其任务是协助或替代人类开展工作。冗余机器人操作臂即是模仿人手的一类自动化装置,其运动能力相对于执行任务所需的运动能力而言是冗余的,因而可以确保其在完成作业任务的基础上,实现其他优化目标。然而,在运动学建模、轨迹规划及控制等方面,冗余机器人要比非冗余机器人复杂很多。本章首先介绍冗余机器人的概念和内涵,分析其必要性,然后总结国内外的研究现状,并讨论研究中的热点问题。

## 1.1 冗余机器人的概念及内涵

### 1.1.1 冗余机器人及冗余性

机器人可看作由一系列杆件通过运动副(即关节)连接而成的运动链,从机构学的角度,可分为串联、并联及混联三类。目前发展最成熟、应用最广泛的为串联机器人,其各个连杆通过关节依次相连(串行连接),一端固定在基座上,另一端则安装着工具(即末端执行器(end-effector)也可称为手爪),用于操作物体,完成各项作业。用于机器人的运动副通常为低副(连杆之间发生相对运动时的接触为面接触),包括转动副、移动副、螺旋副、圆柱副、球面副和平面副中的一种或多种。其中,转动副、移动副和螺旋副为单自由度(Degree of Freedom, DOF)运动副,圆柱副有两个自由度,而球面副和平面副均有三个自由度。机器人所有运动副的自由度数之和即为机器人的自由度数。实际中,大部分机器人由旋转关节和移动关节构成,每个关节由电机、减速器、传感器等组成,通过关节运动来实现机械臂末端工具到达期望的位置和姿态(简称位姿)。描述关节运动大小的变量称为关节变量,每个关节变量组合成的向量称为机器人的臂型。由所有臂型组成的集合称为关节空间,也可称为位型空间或臂型空间;而末端工具所有可能的位姿组成的集合,称为任务空间或操作空间。关节空间的维数(即机器人的自由度数)代表了机器人的运动能力,而

任务空间的维数(即为完成任务需要控制的自由变量个数)代表了机器人为完成任务所需要的运动能力。当机器人(机械臂)关节空间的维数大于任务空间的维数时,相应的机器人(机械臂)即为冗余机器人(机械臂)<sup>[1]</sup>。

**定义 1.1** 假设机器人操作臂(简称机械臂)关节空间的维数(即机器人的自由度数为  $n$ , 操作空间的维数为  $m$ , 当  $n > m$  时, 该机械臂即为冗余自由度机械臂(或冗余机械臂)。

对于冗余机械臂, 当给定其末端的位姿时, 关节空间有无数个位形与之相对应, 这些位形构成了关节空间内的  $n - m$  维的流形, 关节变量在这个流形内的自由变动不会影响末端的位置和姿态, 这种运动称为“自运动”<sup>[2]</sup>, 该性质称为冗余特性。依据这个特性, 冗余机器人能够实现给定任务(主任务)之外的其他任务(次任务)目标, 如增加灵活性<sup>[3]</sup>、优化关节力矩<sup>[4]</sup>、躲避障碍<sup>[5]</sup>等。

从上面的论述可知, 机械臂是否冗余, 取决于主任务所需要的运动能力与机械臂实际具有的运动能力的关系, 若后者大于前者, 则是冗余的。简单来讲, 若机械臂的自由度数大于主任务需要确定的末端位姿个数, 则该机械臂为冗余机械臂。以图 1.1 所示三种情况的平面机械臂为例。

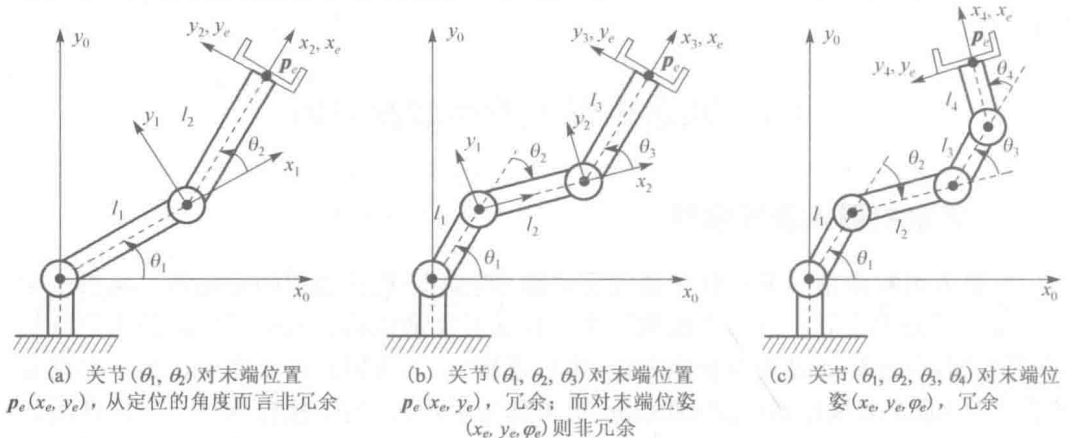


图 1.1 平面冗余及非冗余机械臂

图 1.1(a) 中机械臂具有 2 个自由度, 当需要通过该机械臂两个关节  $(\theta_1, \theta_2)$  的运动来确定末端工具在平面中的位置  $p_e(x_e, y_e)$  时, 则该任务下末端位姿的独立变量个数为 2, 与机械臂的自由度数相同, 此机械臂为平面非冗余机械臂。

图 1.1(b) 中机械臂具有 3 个自由度, 当需要通过该机械臂三个关节  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  的运动来确定末端工具在平面中的位置  $p_e(x_e, y_e)$  时, 则机械臂的自由度数大于任务要求的末端独立变量个数 2, 此机械臂为平面冗余机械臂; 但如果还需要确定末端绕平面垂直轴旋转的姿态  $\varphi_e$ , 则末端独立变量个数为 3, 与机械臂自由度数相同, 为非冗余机械臂。

图 1.1(c) 中机械臂具有 4 个自由度, 当需要通过该机械臂 4 个关节 ( $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ ) 的运动来确定末端工具在平面中的位置和姿态 ( $x_e, y_e, \varphi_e$ ) 时, 则机械臂的自由度数大于任务要求的末端独立变量个数 3, 此机械臂为平面冗余机械臂。

对于 3D 空间的操作, 情况类似。一般而言, 在 3D 空间中, 需要 6 个独立变量才能完整地定义机械臂的末端位姿(位置和姿态各需要 3 个), 相应地, 要实现末端的定位、定姿, 机器人至少需要 6 个自由度的运动能力, 即 3 个自由度的平动和 3 个自由度的转动, 这也是很多工业机器人采用 6 轴结构的原因。而在实际中, 除了需要实现工具的定位和定姿, 还需要考虑障碍回避、运动学奇异回避, 以及关节力矩优化等问题, 这就需要机器人具有更多的自由度, 即至少 7 个自由度。在不特别说明的情况下, 本书所阐述的冗余空间机器人操作臂, 指的是在 3D 空间执行任务的 7 自由度以上(含 7 自由度)的机器人操作臂。

### 1.1.2 自运动

自运动是冗余机械臂的一个典型特征, 指构成机械臂的多个关节联合运动而不改变其末端状态的这一类特殊运动, 也指机械臂在保持末端状态不变的情况下, 可以调整关节构型。

自运动的特点可用图 1.2 所示的 3 自由度平面冗余机械臂为例来进行说明。

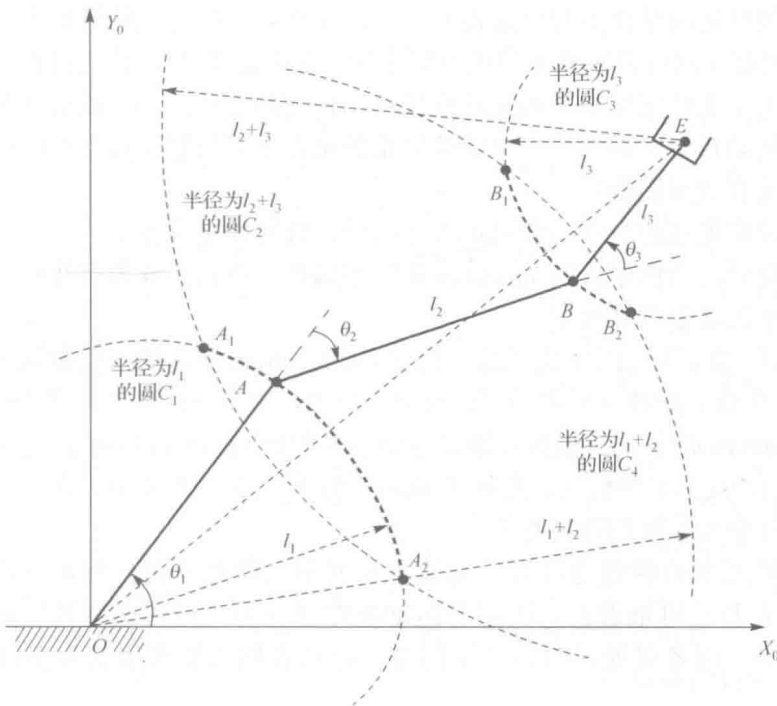


图 1.2 3 自由度平面冗余机械臂的自运动示意图



该机械臂基座坐标系原点为  $O$ 、连杆 1 端点为  $A$ 、连杆 2 端点为  $B$ 、机械臂末端点为  $E$ ，各连杆的长度分别为  $l_1 \sim l_3$ 。由图 1.2 可知，为了保证各关节运动时机械臂末端  $E$  点的位置不变，则必然满足如下关系。

(1) 杆件 1 的端点  $A$  的轨迹是以点  $O$  为圆心、 $l_1$  为半径的圆周  $C_1$ ，且  $AE$  的长度小于  $l_2+l_3$ ，即  $|AE| \leq l_2+l_3$ ，即  $A$  也在以  $E$  为圆心、 $l_2+l_3$  为半径的圆  $C_2$  上或内。

(2) 杆件 2 的端点  $B$  的轨迹是以点  $E$  为圆心、 $l_3$  为半径的圆周  $C_3$ ，且  $OB$  的长度小于  $l_1+l_2$ ，即  $|OB| \leq l_1+l_2$ ，即  $B$  也在以  $O$  为圆心、 $l_1+l_2$  为半径的圆  $C_4$  上或内。

因此，保持机械臂末端  $E$  点位置不变的点  $A$ 、点  $B$  的位置满足以下要求。

(1) 连杆 1 末端点  $A$  位于圆心为  $O$ 、半径为  $l_1$  的圆弧  $\widehat{A_1A_2}$  上，其中，点  $A_1$ 、 $A_2$  为圆  $C_1$  与  $C_2$  的两个交点。

(2) 连杆 2 末端点  $B$  位于圆心为  $E$ 、半径为  $l_3$  的圆弧  $\widehat{B_1B_2}$  上，点  $B_1$ 、 $B_2$  为圆  $C_3$  与  $C_4$  的两个交点。

(3) 点  $A$ 、 $B$  连线的长度位  $l_2$ ，即  $|AB|=l_2$ 。

当机械臂各关节的运动满足上述三个条件时，机械臂末端点  $E$  在平面的位置将保持不变，这即为该平面冗余机械臂的自运动。

### 1.1.3 奇异性和逃逸性

奇异性包括运动学奇异和算法奇异。运动学奇异指的是机械臂损失了一个或多个自由度，因而无法对机械臂末端进行完全的定位和定姿<sup>[6,7]</sup>，损失自由度的原因可能是机械臂处于工作空间边界而无法继续往工作空间之外运动，或者是多个关节轴共线，使其运动自由度退化等。算法奇异指的是在运动控制中进行求解时由于数值问题，出现无有效解的情况。

结合后续将论述的空间冗余机器人运动学，奇异性定义如下。

运动学奇异：当机器人的 Jacobian 矩阵不满秩，或该矩阵各行线性相关时，冗余机械臂处于运动学奇异臂型。

算法奇异：实际控制中，由于数值问题（如 Jacobian 矩阵的一些数远远大于某些数）导致求解失败，此种奇异称为算法奇异。例如，将冗余任务考虑进去时，冗余性参数  $\psi$  的 Jacobian 矩阵  $J_\psi$  与机械臂微分运动学方程的 Jacobian 矩阵  $J_E$  组成了增广矩阵  $J_A=[J_E; J_\psi]$ ，对于某些情况，虽然  $J_E$  满秩，但增广矩阵  $J_A$  奇异，此时的奇异为算法奇异，与冗余性参数的选择有关。

逃逸性指冗余机械臂通过自运动从奇异臂型运动到非奇异臂型的特性。但并不是所有奇异都是可逃逸的，因而将运动学奇异分为“可逃逸奇异”和“不可逃逸奇异”两种，前者可通过自运动来回避，而后者则需要采用其他手段来进行奇异处理。