"十二五"职业教育国家规划教材
经全国职业教育教材审定委员会审定

GAODENG SHUXUE

高等数学

（经管类）

主编◎李宏伟　荆庆林

东北师范大学出版社
NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS

高等数学(经管类)

主　审　朱鲜野　胡洪都

主　编　李宏伟　荆庆林

副主编　董　君　李晓红

　　　　王　典　王　红

东北师范大学出版社

长　春

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（经管类）/李宏伟，荆庆林主编．—长春：东北师范大学出版社，2014.7
ISBN 978-7-5602-9650-0

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①李…②荆…　Ⅲ．①高等数学—高等职业教育—教材　Ⅳ．①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 169859 号

□责任编辑：周虎男　□封面设计：创智时代
□责任校对：刘佳佳　□责任印制：刘兆辉

东北师范大学出版社出版发行
长春净月经济开发区金宝街 118 号（邮政编码：130117）
电话：0431—85687213　010—82893515
传真：0431—85691969　010—82896571
网址：http：//www.nenup.com
东北师范大学出版社激光照排中心制版
北京市彩虹印刷有限责任公司印装
北京市顺义区顺平路南彩段 5 号（邮编：101300）
2014 年 7 月第 1 版　2014 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
幅面尺寸：185 mm×260 mm　印张：12　字数：239 千

定价：29.00 元

前　言

在我国“十二五”规划纲要中特别提到要大力发展职业教育，高等职业院校肩负着这一重要使命. 由于职业教育的特殊性，从职业分类出发，要培养生产、建设、管理与社会服务等实用型人才，这就要求高等职业教育应具有职业的针对性和技能的广泛性. 面对新形势下的新要求，高职数学课程的教学内容与教学形式必须与之相适应.

本教材编写的宗旨是突破原有传统数学教学模式，将数学理论直接服务于生产实践，以解决实际问题为主要目标，倡导淡化理论推导，注重实际应用，提高学生素质，为专业课学习奠定扎实的基础. 本教材还有一个重要的特点是：教材中增加了数学实验的内容，数学实验将经典的数学知识和计算机有机地结合在一起，以使学生了解常用的数学软件—Matlab，使学生真正做到“学数学，用数学”，培养学生进行数值计算和数据处理的能力，从而激发学生学习数学的兴趣.

本教材理论脉络清晰，语言通俗简练，深度难度把握适中，例题与习题选配合理，便于教师讲授和学生自学，适用于所有的高职高专学习数学教学使用.

我们知道，一套便于使用的成熟的教材往往需要多年不断地磨练和广大读者的支持与帮助，我们热诚的欢迎广大读者在使用过程中对本教材存在的错误和不足之处提出批评和建议.

编　者

2014 年 7 月

目　录

第一章　微积分 …… 1
第一节　导数的概念及运算 …… 1
第二节　微分的概念及运算 …… 10
第三节　偏导数与全微分 …… 12
第四节　不定积分 …… 15
第五节　定积分 …… 19
第六节　数学实验 …… 27
习题一 …… 29
第二章　微分方程 …… 34
第一节　微分方程的基本概念 …… 34
第二节　一阶微分方程 …… 35
第三节　几种二阶微分方程 …… 38
第四节　数学实验 …… 40
习题二 …… 40
第三章　矩阵与线性方程组 …… 43
第一节　矩阵的概念及常用矩阵 …… 43
第二节　矩阵的运算及性质 …… 46
第三节　逆矩阵及矩阵的秩 …… 48
第四节　线性方程组 …… 53
第五节　数学实验 …… 57
习题三 …… 60
第四章　线性规划 …… 63
第一节　线性规划问题及其数学模型 …… 63
第二节　图解法 …… 67
第三节　单纯形法 …… 69
第四节　单纯形法的进一步讨论 …… 74
第五节　线性规划的对偶理论 …… 78

第六节 特殊的线性规划问题 …… 86
第七节 数学实验 …… 97
习题四 …… 98
第五章 决策方法 …… 105
第一节 决策方法的基本概念 …… 105
第二节 非确定型决策 …… 106
第三节 风险型决策 …… 110
习题五 …… 115
第六章 图与树 …… 117
第一节 图的基本概念 …… 117
第二节 路及图的连通性 …… 119
第三节 树的基本概念 …… 120
第四节 最短路问题 …… 121
习题六 …… 123
第七章 随机事件及其概率 …… 125
第一节 随机事件及运算 …… 125
第二节 随机事件的概率 …… 127
第三节 全概率公式与贝叶斯公式 …… 130
第四节 独立试验序列概型 …… 132
第五节 数学实验 …… 133
习题七 …… 134
第八章 随机变量的概率分布及数字特征 …… 136
第一节 离散型随机变量及其概率分布 …… 136
第二节 随机变量的分布函数 …… 139
第三节 连续型随机变量及其概率分布 …… 140
第四节 随机变量的数字特征 …… 145
第五节 数学实验 …… 151
习题八 …… 152
第九章 统计推断 …… 156
第一节 总体、样本及统计量 …… 156
第二节 参数的点估计 …… 159
第三节 参数的区间估计 …… 160
第四节 一元线性回归分析 …… 161

第五节　数学实验 …… 165
习题九 …… 169
第十章　数学实验简介 …… 171
附录一　拉氏变换简表 …… 175
附录二　概率论与数理统计附表 …… 176
附表 1　泊松分布表 …… 176
附表 2　正态分布表 …… 178
附表 3　χ^2 分布表 …… 179
附表 4　t 分布表 …… 180
附表 5　相关系数检验表 …… 182
参考文献 …… 184

第一章　微积分

导数、微分、不定积分、定积分是微积分学中的重要内容. 本章主要介绍其基本概念、计算方法及一些简单的应用.

第一节　导数的概念及运算

一、导数的概念

例 1　设平面曲线方程为 $y=f(x)$，求该曲线在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线斜率.

设点 $M(x_0,y_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 上的一个定点，另取该曲线上一动点 $N(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$，当动点 N 沿曲线轨迹向定点 M 移动时，割线 MN 顺时针绕点 M 旋转至其极限位置为 MT，则直线 MT 称为曲线 $y=f(x)$ 在点 M 的切线. 如图 1－1 所示割线 MN 的斜率为

$$\tan\beta=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

其中 β 为割线 MN 的倾斜角. 当动点 N 沿曲线无限靠近定点 M 时，即 $\Delta x\to 0$ 时，上式的极限存在并设为 k，即

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\text{，这时 } k=\tan\alpha\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)\text{，其中}$$

α 是切线 MT 的倾斜角.

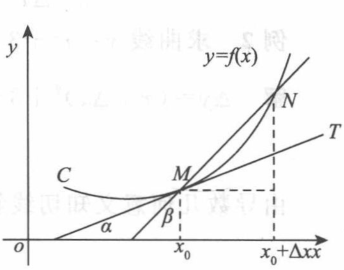

图 1－1

曲线 $y=f(x)$ 在点 M 的切线斜率反映了该曲线在点 M 升降的快慢程度. 因此，切线斜率 k 又称为曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的**变化率**.

1. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处有增量 $\Delta x\,(\Delta x\neq 0)$ 时，相应的函数有增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**导函数值**. 并称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导. 记作 $f'(x_0)$ 或 $y'\big|_{x=x_0}$ 或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$ 或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.

此时若该极限不存在时，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**不可导**.

若设 $x=x_0+\Delta x$，也有

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

2. 若设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内的每一点都可导，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导. 这时对于区间 (a,b) 内的每一个 x 值，都对应一个确定的导数值，因此构成了一个新的函数，这个函数叫做 $f(x)$ 的**导函数**，记作

y' 或 $f'(x)$ 或 $\dfrac{dy}{dx}$ 或 $\dfrac{df(x)}{dx}$. 即 $\quad f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

显然 $f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$.

通常在不发生混淆的情况下，我们将导函数值与导函数统称为**导数**.

导数 $f'(x_0)$ 的**几何意义**表示的是曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处切线的斜率. 即

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0).$$

切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$，法线方程为 $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数为无穷大，这时曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $x=x_0$，该切线垂直于 x 轴.

求导数的步骤：

(1)求增量：$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$；

(2)算比值：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$；

(3)取极限：$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

例 2 求曲线 $y=x^2+3$ 在点 $(1,4)$ 处的切线斜率，并写出切线及法线方程.

解 $\Delta y=(x+\Delta x)^2+3-(x^2+3)=2x\Delta x+(\Delta x)^2$，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$，

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

由导数几何意义知切线斜率为 $k=y'\big|_{x=1}=2x\big|_{x=1}=2$，切线方程为

$$y-4=2(x-1)\text{，即 }2x-y+2=0.$$

法线方程为

$$y-4=-\frac{1}{2}(x-1)\text{，即 }2y+x-9=0.$$

二、导数的运算

1. 基本公式

导数的基本公式如下：

(1) $C'=0$；

(2) $(x^a)'=a\cdot x^{a-1}$；

(3) $(\sin x)'=\cos x$；

(4) $(\cos x)'=-\sin x$；

(5) $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$；

(6) $(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$；

(7) $(\sec x)'=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\cdot\tan x$;　(8) $(\csc x)'=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}=-\csc x\cdot\cot x$;

(9) $(a^x)'=a^x\ln a$;　(10) $(e^x)'=e^x$;

(11) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$;　(12) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$;

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;　(14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$;　(16) $(\text{arccot}\,x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

2. 运算法则

设函数 $u=u(x)$, $v=v(x)$, $w=w(x)$ 在点 x 处均可导,则有如下运算法则

(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$;　(2) $(uv)'=u'v+uv'$;

(3) $(cv)'=cv'$ (c 为常数);　(4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ $(v\neq 0)$.

推广到有限个函数有

$$(u+v-w)'=u'+v'-w',$$

$$(u\cdot v\cdot w)'=u'vw+uv'w+uvw'.$$

例 3 设 $y=2\cos x+\dfrac{x^3}{e^x}-\ln 3$,求 y'.

解 $y'=(2\cos x)'+\left(\dfrac{x^3}{e^x}\right)'-(\ln 3)'$

$$=2(\cos x)'+\frac{(x^3)'e^x-(x^3)(e^x)'}{(e^x)^2}-0$$

$$=-2\sin x+\frac{3x^2-x^3}{e^x}=-2\sin x+\frac{x^2(3-x)}{e^x}.$$

例 4 已知 $f(x)=\sqrt{x}\arctan x$,求 $f'(1)$.

解 $f'(x)=(\sqrt{x})'\arctan x+\sqrt{x}(\arctan x)'$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\arctan x+\frac{\sqrt{x}}{1+x^2},$$

$$f'(1)=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}.$$

3. 复合函数求导

设函数 $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ 且 $y=f(u)$ 的定义域由 $u=\varphi(x)$ 的值域确定,则称 $y=f[\varphi(x)]$ 是由 $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数,简称**复合函数**. $u=\varphi(x)$ 称为**中间变量**.

复合函数求导法则:设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导,函数 $y=f(u)$ 在对应点 $u=\varphi(x)$ 处可导,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x 处可导,且

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

上式也可写成 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$ 或 $(f[\varphi(x)])'=f'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$.

推广到有限个中间变量有：设 $y=f(u)$，$u=\varphi(v)$，$v=\psi(x)$ 均可导，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}\quad 或\quad y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x.$$

例 5　设 $y=(2x+5)^3$，求 y'_x.

解　将 $y=(2x+5)^3$ 分解为 $y=u^3$，$u=2x+5$

而 $y'_u=3u^2$，$u'_x=2$，所以 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=6u^2=6(2x+5)^2$.

熟练掌握复合函数的分解后，运算时不必写出中间变量，直接由外向里逐层求导即可，但注意每层变量是不相同的.

例 6　求函数 $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$ 的导数.

解　$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\left(\tan\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sin x}=\csc x$$

4. 隐函数求导

形如 $y=f(x)$ 所表示的函数称为**显函数**，而 $x^2+y^2=R^2$，$e^y=xy$ 同样表示了函数关系，这种由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数称为**隐函数**. 显然所有的显函数都可以表示为隐函数，而有些隐函数是不能表示为显函数的，因此求隐函数的导数尤为重要.

隐函数求导法则：(1)将等式两端同时关于 x 求导，其中 y 是 x 的函数，由复合函数求导法则得到一个含有 y' 的方程；(2)从方程中解出 y'.

例 7　求由方程 $x^2+y^2=4$ 所确定的隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

解　将方程的两端同时对 x 求导，这里 y 是 x 的函数，y^2 是 x 的复合函数. 根据复合函数求导法则有

$$(x^2)'_x+(y^2)'_x=(4)'_x,$$

$$2x+2y\cdot\frac{dy}{dx}=0,$$

解得
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

显然此函数也可以通过表示为显函数去求导.

例 8　求幂指函数 $y=(\sin x)^x$ 的导数 y'.

解　两边同时取以 e 为底的对数有 $\ln y=x\ln\sin x$，两边对 x 求导得

$$\frac{1}{y}y'=\ln\sin x+\frac{x}{\sin x}(\sin x)'=\ln\sin x+x\cot x,$$

解得
$$y'=(\ln\sin x+x\cot x)y=(\ln\sin x+x\cot x)(\sin x)^x,$$

对于形如 $y=f(x)^{g(x)}$ 的函数称为**幂指函数**.

5. 高阶导数

如果函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍是 x 的可导函数，则称 $f'(x)$ 的导数为 $f(x)$ 的

二阶导数. 记作 y'' 或 $f''(x)$ 或 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 或 $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

由定义知 $y''=(y')'$ 或 $\frac{d^2 y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$，类似地，函数 $y=f(x)$ 的**三阶导数** $y'''=(y'')'=((y')')'$，……

函数 $y=f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数的导数叫做函数 $y=f(x)$ 的 ***n* 阶导数**，记作 $y^{(n)}$ 或 $f^{(n)}(x)$ 或 $\frac{d^{(n)} y}{dx^n}$ 或 $\frac{d^{(n)} f(x)}{dx^n}$，且 $f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'$.

我们把 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 称为函数的**一阶导数**，二阶及二阶以上的导数统称为**高阶导数**.

例 9 设 $y=7x^4$，求 $y^{(5)}$.

解 由于 $y'=7\cdot 4x^3, y''=7\cdot 4\cdot 3x^2, y'''=7\cdot 4\cdot 3\cdot 2x, y^{(4)}=7\cdot 4!$,

所以

$$y^{(5)}=0.$$

结论：$(x^n)^{(n)}=n!, (x^n)^{(n+1)}=(x^n)^{(n+2)}=\cdots\cdots=0; (e^x)^{(n)}=e^x$ 等.

三、极 值

设函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导，若在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，那么函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内**单调递增**；若在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，那么函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内**单调递减**.

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义，且对该区域的任意点 x（点 x_0 除外），如果有 $f(x)<f(x_0)$ 成立，则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个**极大值**，点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的一个**极大值点**；如果有 $f(x)>f(x_0)$ 成立，则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的一个极小值，点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的一个**极小值点**.

函数的极大值与极小值统称为**函数的极值**，极大值点与极小值点统称为**极值点**. 极值是一个局部概念. 因此有时在研究的区域内会有多个极值，有时极小值会大于极大值.

在图 1-2 中可以看出函数在取得极值的地方，曲线的切线或是水平的（如点 x_1、x_5）或是垂直的（如点 x_4），而曲线有水平切线的地方，函数不一定取得极值（如点 x_3）.

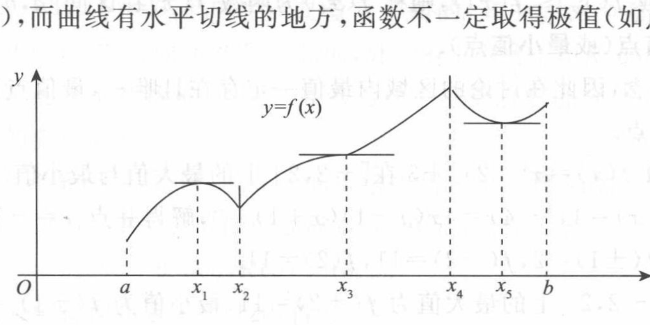

图 1-2

总之如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有极值 $f(x_0)$，则 $f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在.

使 $f'(x)=0$ 的点 x 称为函数的**驻点**. 可导函数的极值点必是驻点，反之不一定.

判定方法一：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左右邻域连续，且在该某个邻域（点 x_0 除外）可导，

(1) 若 $x<x_0$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>x_0$ 时，$f'(x)<0$，则函数 $f(x)$ 在 x_0 处有极大值；

(2)若 $x<x_0$ 时,$f'(x)<0$;当 $x>x_0$ 时,$f'(x)>0$,则函数 $f(x)$ 在 x_0 处有极小值;

(3)若 x 取 x_0 左右两侧附近的值 $f'(x)$ 不变号,那么函数 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值.

判定方法二:如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处具有二阶导数,且 $f'(x_0)=0$,则

(1)当 $f''(x_0)<0$ 时,函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;

(2)当 $f''(x_0)>0$ 时,函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值;

(3)当 $f''(x_0)=0$ 时,函数 $f(x)$ 在 x_0 处是否取得极值不确定,回到判定方法一.

求函数 $f(x)$ 极值的步骤为:

(1)确定函数 $f(x)$ 的定义域,求出导数 $f'(x)$ 和 $f''(x)$;

(2)求出函数 $f(x)$ 的全部驻点及一阶导数不存在的点;

(3)用判定方法一或判定方法二确定以上各点是否为极值点并求极值.

例 10 求函数 $f(x)=\frac{1}{32}(7x^3-21x^2-63x+29)$ 的极值.

解 (1)定义域为 $(-\infty,+\infty)$,

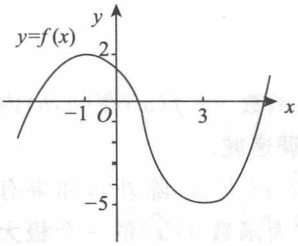

图 1-3

$$f'(x)=\frac{1}{32}(21x^2-42x-63)=\frac{21}{32}(x+1)(x-3),$$

$$f''(x)=\frac{1}{32}(42x-42)=\frac{21}{16}(x-1);$$

(2)令 $f'(x)=0$,得驻点 $x_1=-1,x_2=3$;

(3)因为 $f''(-1)=-\frac{21}{8}<0,f''(3)=\frac{21}{8}>0$,因此函数 $f(x)$ 在 $x_1=-1$ 处有极大值 $f(-1)=2$,在 $x_2=3$ 处有极小值 $f(3)=-5$.如图 1-3 所示.

四、函数的最值

函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义,点 x_0 是 $[a,b]$ 内的点,若对于该区间内任意的点 x 恒有 $f(x_0)\geqslant f(x)$(或 $f(x_0)\leqslant f(x)$),则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的**最大值**(或**最小值**),x_0 为**最大值点**(或**最小值点**).

最值是整体概念,因此在讨论的区域内最值一定存在且唯一,最值点可以是区间内的点也可以是区间的端点.

例 11 求函数 $f(x)=x^4-2x^2+3$ 在 $[-2,2]$ 上的最大值与最小值.

解 (1)令 $f'(x)=4x^3-4x=4x(x-1)(x+1)=0$,解得驻点 $x=-1,x=0,x=1$.

(2)$f(0)=3,f(\pm1)=2,f(-2)=11,f(2)=11$.

(3)比较得在 $[-2,2]$ 上的最大值为 $f(\pm2)=11$,最小值为 $f(\pm1)=2$.

特别地在开区间 (a,b) 内,若函数 $f(x)$ 有且仅有唯一的极大值点(或极小值点)x_0,那么它同时也是该区间内的最大值点(或最小值点);函数 $f(x)$ 在单调闭区间上的最值一定存在且在区间的端点取得.

五、几个常见的函数

1. 总成本函数

总成本函数是指生产者用于生产产品的所有费用. 一般可分为**固定成本**(用 C_0 来表示)和**可变成本**(用 C_1 表示). 设总成本为 C,产品的产量为 q,则**总成本函数**为

$$C(q)=C_0+C_1(q).$$

总成本函数随产量的增加而增加,因此是一个单调递增的函数.

生产单位产品所付出的成本称为**平均成本**,用 $\bar{C}$ 表示,即 $\bar{C}=\dfrac{C(q)}{q}$.

2. 总收入函数

总收入是指生产者的商品售出后的收入. 总收入取决于该商品的销量和价格. 设总收入为 R,商品的销量为 q,商品的价格为 p,**总收入函数**可表示为:

(1)价格不变时即 $p=p_0$,总收入函数 $R(q)=p_0q$,是关于销量 q 的线性函数;

(2)当价格变化时即 $p\neq p_0$,分为两种情况:由价格函数 $p=Q^{-1}(q)$,得总收入函数 $R(q)=pq=Q^{-1}(q)q$ 是关于销量 q 的非线性函数;由需求函数 $q=Q(p)$,得收入函数 $R(p)=pq=pQ(p)$是关于价格 p 的非线性函数.

销售单位产品所获得的收入称为**平均收入**,用 $\bar{R}(q)$表示 ,即 $\bar{R}(q)=\dfrac{R(q)}{q}$.

3. 总利润函数

总利润是生产者的总收入减去总成本后的净收入. 由于总成本和总收入都是产量 q 的函数,因而总利润也是产量 q 的函数,设总利润为 L,则**总利润函数**为

$$L(q)=R(q)-C(q).$$

生产单位产品所获得的利润称为**平均利润**,用 $\bar{L}$ 表示,即 $\bar{L}=\dfrac{L(q)}{q}$.

当 $R(q)=C(q)$ 时 $L(q)=0$,此时生产是盈亏平衡的,其中 q 称为**盈亏平衡点或保本点**;当 $R(q)>C(q)$ 时 $L(q)>0$,此时生产是盈利的,处于有利状态;当 $R(q)<C(q)$ 时 $L(q)<0$,此时生产是亏损的,处于不利状态. 在生产经营活动中经常需要进行盈亏转折分析即保本点分析,以制定最佳的生产方案.

例 12 某厂生产某产品,若以 18.5 元的价格出售产品是畅销的,该厂每天生产能力为 4000 件,每天固定成本 14000 元,单位可变成本 6.00 元,求保本点.

解 因为 $C(q)=14000+6.00q, R(q)=18.5q$

由 $C(q)=R(q)$ 解得保本点 $q=1120$(件).

因每天产品的保本产量低于每天的生产能力,可以投入生产,当生产量为 $1120\leqslant q\leqslant 4000$ 时,即可从中获利.

4. 边际函数

在经济学中,将经济函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 称为**边际函数**,$f'(x_0)$ 称为 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的**边际函数值**.

$\Delta y \approx f'(x_0)$说明边际函数值近似地等于函数的改变量，表示自变量 x 在原有水平 $x=x_0$ 基础之上，若产生一个单位的改变，y 相应近似地变化 $f'(x_0)$个单位.

总成本函数 $C(q)$的导数 $C'(q)$称为**边际成本**.**其经济意义**是当产量为 q 时，再生产一个单位的产品带来总成本增加的近似值(通常省略"近似"二字).显然当边际成本小于平均成本时，增加产品的生产量将会带来利润的增加.

总收入函数 $R(q)$的导数 $R'(q)$称为**边际收入**.**其经济意义**是当销量为 q 时，再多销售一个单位产品带来总收入的改变.

总利润函数 $L(q)$的导数 $L'(q)$称为**边际利润**.**其经济意义**是当产量(或销量)为 q 时，再多生产(或销售)一个单位产品带来总利润的改变.

同样类似地还有**边际需求**，**边际供给**等.

利用边际分析理论有如下重要结论：

(1)平均成本最小化原理

因为 $\overline{C}(q)=\dfrac{C(q)}{q}$， 则 $\overline{C}'(q)=\dfrac{qC'(q)-C(q)}{q^2}$.

令 $\overline{C}'(q)=0$，即 $qC'(q)-C(q)=0$，有 $\overline{C}(q)=\dfrac{C(q)}{q}=C'(q)$，

即当平均成本等于边际成本时，平均成本取得最小值.

(2)利润最大化原理

因为 $L(q)=R(q)-C(q)$，则 $L'(q)=R'(q)-C'(q)$，

令 $L'(q)=0$，有 $R'(q)=C'(q)$，

即当边际收入等于边际成本时，总利润取得最大值.

例 13　某产品的总成本为 $C(q)=\dfrac{1}{5}q^2+4q+20$(万元)，其中 q(吨)为月产量，需求函数为 $Q(p)=160-5p$，其中 p(万元/吨)为产品价格.

(1)月产量 q 为多少吨时，平均成本 $\overline{C}$ 达到最低？最低平均成本是多少万元？

(2)销售价格 p 为每吨多少万元时，获得的总利润最高？并确定最优的月销售数量.

解　(1)由已知 $\overline{C}(q)=\dfrac{C(q)}{q}=\dfrac{1}{5}q+4+\dfrac{20}{q}$，$(q>0)$

而 $C'(q)=\dfrac{2}{5}q+4$，由平均成本最小化原理有

$$\frac{1}{5}q+4+\frac{20}{q}=\frac{2}{5}q+4,$$

解得　$q=10$(吨)，$q=-10$(不合题意舍去).

当月产量为 10 吨时，平均成本达到最低，最低平均成本为$\overline{C}(10)=8$(万元).

(2) 由已知

$$R(p)=pQ(p)=160p-5p^2, R'(p)=160-10p,$$

$$C(p)=\frac{1}{5}(160-5p)^2+4(160-5p)+20, C'(p)=10p-340,$$

由利润最大化原理有　$160-10p=10p-340$，解得 $p=25$(万元/吨)，

将 $p=25$ 代入 $Q(p)=160-5p$ 有 $q=35$ 吨/月.

当产品的销售价格定为 25 万元/吨时，获得的利润最高，最优月销售数量为 35 吨.

5. 弹性理论

弹性的种类很多，包括需求的价格弹性、供给弹性、收入弹性、交叉弹性等.

设函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，$x_0\neq 0$，$y_0=f(x_0)\neq 0$，函数的相对改变量 $\frac{\Delta y}{y_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{f(x_0)}$ 与自变量的相对改变量 $\frac{\Delta x}{x_0}$ 之比 $\frac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}$ 称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 与 $x_0+\Delta x$ 之间的**弧弹性**. 当 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\frac{\Delta y}{y_0}}{\frac{\Delta x}{x_0}}$ 的极限称为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的**点弹性**，简称**弹性**，记作 $\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}$ 或 $\eta(x_0)$. 即

$$\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y_0}{\Delta x/x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x_0}{y_0}=f'(x_0)\frac{x_0}{f(x_0)}.$$

其意义是：当 x 在 x_0 处产生 1% 的改变时，$f(x)$ 近似地改变 $\eta(x_0)\%$.

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，且 $f(x)\neq 0$，则称 $\frac{Ey}{Ex}=f'(x)\frac{x}{f(x)}$ 为函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内的**弹性函数**.

设某商品的需求函数为 $q=Q(p)$，则**需求弹性**为 $\eta(p)=Q'(p)\frac{p}{Q(p)}$.

其经济意义是：某商品的价格在原有水平基础之上下降（或上升）1%，其需求量将增加（或减少）$|\eta(p)|\%$.

需求弹性一般为负值. 当 $|\eta(p)|>1$ 时称为**富有弹性**；当 $|\eta(p)|<1$ 时称为**需求缺乏弹性**；当 $|\eta(p)|=1$ 时称为**单位需求弹性**.

例 14 设某商品的需求函数为 $Q=e^{-\frac{p}{5}}$（其中，p 是商品价格，Q 是需求量），求

(1)需求弹性函数；(2)$p=3$，$p=5$，$p=6$ 时的需求弹性，并说明经济意义.

解 (1)$Q'(p)=-\frac{1}{5}e^{-\frac{p}{5}}$，所求弹性函数为

$$\eta(p)=Q'(p)\frac{p}{Q(p)}=-\frac{1}{5}e^{-\frac{p}{5}}\frac{p}{e^{-\frac{p}{5}}}=-\frac{p}{5}.$$

$$(2)E(3)=-\frac{3}{5}=-0.6,E(5)=-\frac{5}{5}=-1,E(6)=-\frac{6}{5}=-1.2.$$

经济意义：当 $p=3$ 时，价格上涨 1% 时，需求量减少 0.6%，需求量变化的幅度小于价格变化的幅度，此时价格对需求的影响不大；当 $p=5$ 时，价格上涨 1%，需求量减少 1%，需求量变化的幅度与价格变化的幅度相同；当 $p=6$ 时，价格上涨 1%，需求量减少 1.2%，需求量变化的幅度大于价格变化的幅度，此时价格对需求的影响较大.

需求弹性的大小反映了价格变化对市场需求量的影响程度，利用弹性分析了解市场变化，制定行之有效的营销策略显得非常重要.

若某商品的需求函数为 $q=Q(p)$ 是可导函数，则收入函数 $R(p)=Q(p)\cdot p$ 对价格 p 的弹性为

$$\frac{ER}{Ep}=\frac{p}{R(p)}R'(p)=\frac{p}{Q(p)p}[Q(p)+Q'(p)\cdot p]=1+\frac{p}{Q(P)}Q'(p)=1-|\eta(p)|.$$

由此看出收入弹性 $\frac{ER}{Ep}$ 与需求弹性 $\eta(p)$ 之间有密切的关系. 当 $|\eta(p)|>1$ 时，$\frac{ER}{Ep}<0$，此时降价可使总收入增加；当 $|\eta(p)|<1$ 时，$\frac{ER}{Ep}>0$，此时降价可使总收入减少；当 $|\eta(p)|=1$ 时，提价与降价对总收入影响不大.

第二节　微分的概念及运算

在复杂的实际问题中有时需要计算函数改变量的近似值，函数的微分可以解决这一问题.

一、微分的概念

设正方形的面积为 $y=x^2$，而 $y'=2x$，当边长为 x_0 时，对应于边长改变量 $\Delta x>0$，则面积 y 相应的改变量为

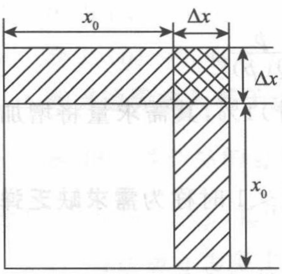

图 1－4

$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2$，如图 1－4 所示，当 $|\Delta x|$ 很小时，$(\Delta x)^2$ 相对于 $2x_0\Delta x$ 来说变小的速度更快，所以面积 y 的改变量 Δy 可以近似地用 $2x_0\Delta x$ 来替代，即 $\Delta y\approx 2x_0\Delta x$，两者相差 $(\Delta x)^2$. 因此我们把 $y=x^2$ 改变量的近似值 $2x_0\Delta x$ 称为函数在点 x_0 处的微分值，记作

$$dy|_{x=x_0}=2x_0\Delta x.$$

1. 若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处具有导数 $f'(x_0)$，那么 $f'(x_0)\cdot\Delta x$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**微分值**. 记作 $dy|_{x=x_0}$，即 $dy|_{x=x_0}=f'(x_0)\cdot\Delta x$，这时称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可微分，或简称函数可微.

对于函数 $y=x^2$，若 x 由 1 变化到 1.01 时，即 $x_0=1$，$\Delta x=0.01$，则 $\Delta y=1.01^2-1^2=0.0201$，而 $dy\Big|_{\substack{x_0=1\\ \Delta x=0.01}}=(x^2)'\cdot\Delta x\Big|_{\substack{x_0=1\\ \Delta x=0.01}}=2\times1\times0.01=0.02$，其误差为

$$|\Delta y-dy|=|0.0201-0.02|=0.0001,$$

这说明用 dy 替代 Δy 误差的大小取决于 Δx 的大小.

2. 函数 $y=f(x)$ 在任意点 x 的微分，称为函数的**微分**，记为 dy 或 $df(x)$. 即

$$dy=f'(x)\cdot\Delta x.$$

当 $y=x$ 时，由于 $dy=dx=(x)'\Delta x=\Delta x$，即**自变量的微分等于自变量的增量**. 于是函数 $y=f(x)$ 的微分又可记作

$$dy=y'dx \text{ 或 } df(x)=f'(x)dx.$$