西安交通大学本科“十三五”规划教材

普通高等教育理学类“十三五”规划教材

概率论与数理统计

主　编　王　宁　副主编　王　峰　施　雨

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交通大学本科

普通高等教育 教材

概率论与数理统计

主　编　王宁　副主编　王峰　施雨

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书共分为10章，第1—4章介绍了概率论的基础知识，包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征以及大数定律与中心极限定理等.第5—9章介绍了数理统计的基本内容，主要包括：数理统计学的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析和方差分析等.第10章介绍了Matlab在概率统计中的应用.

本书可作为高等院校非数学专业概率论与数理统计课程的教材，也可供工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/王宁主编.—西安：西安交通大学出版社，2017.8

ISBN 978-7-5605-9785-0

Ⅰ.①概… Ⅱ.①王… Ⅲ.①概率论 ②数理统计 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第144395号

书　　名 概率论与数理统计
主　　编 王　宁
副 主 编 王　峰　施　雨
责任编辑 王　欣

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路10号　邮政编码710049)
网　　址 http://www.xjtupress.com
电　　话 (029)82668357　82667874(发行中心)
(029)82668315(总编办)
传　　真 (029)82668280
印　　刷 陕西日报社

开　　本 787mm×1092mm　1/16　**印张** 14　**字数** 340字
版次印次 2017年8月第1版　2017年8月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5605-9785-0
定　　价 29.80元

读者购书、书店添货如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82664954
读者信箱：jdlgy@yahoo.cn

前言

概率论与数理统计是研究随机现象内在规律的一门学科，随着科学技术的发展，它在工程技术、科学研究、经济管理、企业管理、人文社科等众多领域都有广泛应用.它的理论与方法向各个学科渗透，是近代科学技术发展的特征之一，并由此产生了许多新的交叉学科，如生物统计、医学统计、计量经济学、商业统计，等等.它又是许多新兴的重要学科的基础，如信息论、控制论、可靠性理论、人工智能、信息编码理论、数据挖掘和大数据研究等.为此，高等院校各专业对概率论与数理统计课程的要求也在不断提高，将其作为理工类专业的一门重要的必修基础课.通过本课程的学习，学生将初步掌握研究随机现象的基本思想与基本方法，具备一定的分析问题和解决问题的能力.

随着社会的发展及科学技术的进步，概率统计这门课程在学生后续课程的学习及工作生活中发挥着越来越重要的作用.但由于这门课程自身理论及其方法的特殊性，使许多学生学习起来困难重重.为了调动学生学习这门课程的兴趣，提高学习效率，本教材具有以下特色：

(1)将用具有启发性的例子引入概念与基础理论，注意阐明其概率和统计意义.强调对概念的深刻理解，注重对概念之间内在联系的阐述.

(2)强化对基本概型、基本规律及重要分布律的产生背景的介绍，逐步提高学生模型辨识能力以及准确使用分布律解决实际问题的能力.

(3)在例题及习题的选配方面，力图使学生了解概率统计在众多领域的应用.适当选择一些概率统计在数学建模方面的案例，使学生切实感受该门课程对后续学习及工作的帮助.

(4)介绍和本书内容相关的 Matlab 调用命令，帮助学生处理和本书内容相关的实际数据，提高学生学习概率统计的兴趣.

全书由10章组成：第1—4章是概率论的基础知识，内容包括：随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征以及大数定律与中心极限定理等；第5—9章是数理统计的基本内容，主要包括数理统计学的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析和方差分析等；第10章介绍了 Matlab 在概率统计中的应用.

本书的编写者均多次讲授概率统计课程，具有丰富的教学经验.在教学中，我们一直以国内外教材作为参考，积累了丰富的素材.全书由王宁主编，参与编写的还有施雨、王峰老师.其中，施雨编写了第1—3章，王峰编写了第5、6章，王宁编写了第4、7—10章，全书由王宁负责统稿.

本书是西安交通大学本科“十三五”规划教材.

很多教师对本书的编写给予了大力支持,提出了许多宝贵意见.此外,本书在编写过程中也得到了西安交通大学教务处及数学与统计学院领导和教务员的大力支持,在此一并表示衷心感谢.

限于编者的经验和水平,书中难免有不妥之处,恳请读者批评指正.

编　者

2017.3

目　录

第1章 随机事件与概率

本章介绍概率论中两个最重要、最基本的概念——随机事件与概率. 首先,引入随机事件的概念并讨论事件之间的各种关系与运算律. 其次,对随机事件赋予概率以作为其发生可能性的度量,并在概率公理化框架内引出概率的各种性质. 接着,介绍条件概率概念以及三个与之相关并在概率计算中起重要作用的公式——乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式. 最后,讨论事件之间的相互独立性及其判别方法与应用.

1.1 随机事件

1.1.1 随机现象与随机试验

在客观世界中,尽管人们在生产实践和科学研究中所观察到的现象形形色色,千变万化,但是大致可以分成两类,一类是在一定条件下必然出现的现象,如每天早晨太阳从东方升起;用手将一物体抛至空中,最终这物体必然落回到地面;在自然状态下,水从高处流向低处,等等,这类现象称为**必然现象**. 另一类是在一定条件下可能发生,也可能不发生,具有不确定性的事件. 例如,掷一枚硬币,其结果可能是有国徽的一面(以下称为正面)朝上,也可能是有数字的那一面(以下称为反面)朝上,在每次投掷之前,无法确定会出现何种结果. 又如,从一批产品中任意抽出一件来检验,其结果可能是合格品,也可能是不合格的产品,事先不能肯定. 在现实生活中,类似的例子还可以举出许多,如养鱼场的一万尾鱼苗能成活几许?明年的中秋节能观赏到月亮吗? 下一届世界杯赛的冠军得主为谁? ……等等,这类现象称为**随机现象**. 一般而言,随机现象具有以下特征:在一定的试验条件下,其试验结果不止一个;对于一次试验,可能出现这种结果,也可能出现那种结果,事先无法确定会出现何种结果.

尽管就一次试验而言,随机现象的发生与否表现出不确定性,似乎捉摸不定,然而人们经过长期的实践并深入研究之后,发现在大量重复试验或观察下,随机现象呈现出某种规律性,这就是以后要讲的**统计规律性**. 概率论与数理统计是研究和揭示随机现象的统计规律性的学科.

为了研究随机现象的统计规律,需要对随机现象进行重复观察. 我们将对随机现象的观察称为试验,这种试验不同于其他学科的试验,应该具备以下特征:

(1) 可以在相同条件下重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,但事先能明确全部可能的结果;

(3) 进行一次试验之前不能肯定哪一个结果会出现.

我们称具有上述特征的试验为**随机试验**,简称为**试验**. 常用 E 或 $E_1, E_2, \cdots$ 来表示. 例如:

E_1:抛掷一枚硬币,观察正面、反面的出现情况.

E_2:投掷一颗骰子,观察出现的点数.

E_3:记录某超市一天的顾客数.

E_4:观测某种品牌手机的寿命.

上述这些试验都是随机试验.

人们正是借助随机试验观察和研究随机现象,进而希望找出其内在规律性.

1.1.2　样本空间与随机事件

对于一个试验 E,虽然在试验之前不能肯定哪个结果会发生,但试验的一切可能结果是已知的.称随机试验 E 的所有可能的试验结果组成的集合为该试验的**样本空间**,称样本空间的元素(即 E 的每个可能结果)为**基本结果**或**样本点**.以后用 Ω 或 $\Omega_1,\Omega_2,\cdots$ 表示样本空间,用 ω 表示样本点.例如,试验 $E_1\sim E_4$ 的样本空间分别是:

$\Omega_1=\{\omega_0,\omega_1\}$,其中 ω_0 表示"正面朝上",ω_1 表示"反面朝上";

$\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$,其中数 i 表示"出现 i 点",$i=1,2,3,4,5,6$;

$\Omega_3=\{0,1,2,\cdots\}$,这里由于不知道最大的顾客数,因此用无穷大代替;

$\Omega_4=\{\omega,\omega\geqslant 0\}=[0,+\infty)$.

在试验中,可能发生、也可能不发生的事情叫做**随机事件**,简称为**事件**.以后常用 A,B,C 等表示随机事件.

在试验 E_2 中,若用 A 表示"掷出奇点数",则 A 便是一个随机事件.因为在一次投掷中,当且仅当掷出的点数是 1,3,5 中的任何一个时,称事件 A 发生,所以将事件 A 表示为 $A=\{1,3,5\}$.同样地,若 B 表示"掷出偶点数",则 $B=\{2,4,6\}$是另一个随机事件.若 C 表示"掷出的点数为素数",则 $C=\{2,3,5\}$是又一个随机事件.

对于一个试验 E,它的样本空间 Ω 是由 E 的全部可能结果组成的集合,而它的一个随机事件 A 只是由 E 的一部分可能结果组成的集合,因而事件 A 是样本空间 Ω 的子集,记作 $A\subset\Omega$.因此样本空间的某些子集合称为**随机事件**.称事件 A 发生,当且仅当属于事件 A 的某个样本点在试验中出现.

对于一个试验 E,在每次试验中必然发生的事情,称为 E 的**必然事件**;在每次试验中都不发生的事情,称为 E 的**不可能事件**.例如,在 E_2 中,"掷出的点数不超过 6 点"是必然事件,若用样本点的集合来表示,则这一事件就是 E_2 的样本空间 $\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$.而"掷出的点数小于 1"为不可能事件,因为这一事件不含 E_2 的任何一个样本点,所以用空集记号 $\varnothing$表示不可能事件.

一般地,对于试验 E,包含它的所有样本点的样本空间 Ω 是必然事件;不含任何一个样本点的事件$\varnothing$是不可能事件.今后就用 Ω 表示必然事件,用$\varnothing$表示不可能事件.为了运算方便,把必然事件 Ω 和不可能事件$\varnothing$当作随机事件的两个特殊情况.

1.1.3　事件的关系与运算

既然事件是集合,因此有关事件间的关系、运算及运算规则就可以用集合论的知识来讨论.下面要讨论的事件均假定它们是在同一个试验下的事件.

1. 事件的包含与相等

设有两个事件 A,B,若 A 发生必然导 B 发生,则称 B 包含 A,或者 A 含于 B,记作 $B\supset A$,或者 $A\subset B$. 用集合论的术语来表述,即,$\omega\in A\Rightarrow\omega\in B$.

例如,在试验 E_2 中,记 $A=\{$掷出不超过 4 的偶点数$\}$,则 $A=\{2,4\}$. 记 $B=\{$掷出的点数不超过 5$\}$,则 $B=\{1,2,3,4,5\}$,显然,如果 A 发生,那么 B 必发生. 图 1.1 直观地描绘了事件 B 包含事件 A.

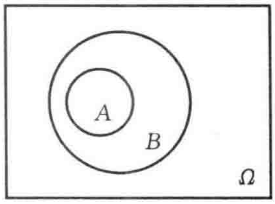

图 1.1　$A\subset B$

若 A 与 B 相互包含,即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 A 与 B **相等**,记作 $A=B$.

例如,在试验 E_2 中,记 $A=\{$掷出偶数点$\}$,$B=\{$掷出 2 的倍数点$\}$,这两个事件表面上看起来是不同的两种说法,其实表示了同一事件,因而 $A=B$.

2. 事件的和

设有两事件 A,B,事件 A,B 中至少有一个发生的事件为 A 与 B 的**和事件**或**并事件**,记为 $A\cup B$. 事件 $A\cup B$ 发生意味着或者仅 A 发生,或者仅 B 发生,或者两者都发生. 借用集合论的术语,$A\cup B=\{\omega\mid\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$.

例如,在试验 E_2 中,记 $A=\{$掷出偶数点$\}=\{2,4,6\}$,$B=\{$掷出 3 的倍数点$\}=\{3,6\}$,则 A 与 B 的和事件 $A\cup B=\{2,3,4,6\}$. 图 1.2 给予和事件 $A\cup B$ 以直观表示.

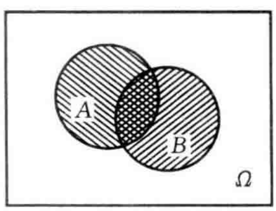

图 1.2　$A\cup B$

事件的和可以推广到多个事件的情形. 设有 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,定义它们的和事件为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生,记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$,亦即 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k=\{A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生$\}$. 类似地,可定义无限多个事件的和:设有无限多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,定义它们的和事件 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k=\{A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots\text{中至少有一个发生}\}.$$

3. 事件的积

设有两事件 A,B,事件 A,B 都发生的事件称为 A 与 B 的**积事件**或**交事件**,记为 $A\cap B$,简记为 AB. 用集合论的术语为 $AB=\{\omega|\omega\in A \text{ 且 } \omega\in B\}$.

例如,在试验 E_2 中,记 $A=\{$掷出偶数点$\}=\{2,4,6\}$,$B=\{$掷出素数点$\}=\{2,3,5\}$,则 $AB=\{2\}$.

积事件 AB 可以用图 1.3 来直观表示. 类似地,可以定义多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$(有限多个或可列无限多个)的积事件:

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = \{A_1,A_2,\cdots,A_n \text{ 都发生}\}$$

及

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \{A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots \text{ 都发生}\}.$$

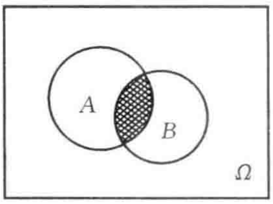

图 1.3 AB

4. 事件的互斥和对立

设有两事件 A,B,若 A,B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称 A,B 是**互斥**的,或称它们是**互不相容**的. 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意两个都互斥,则称这些事件是**两两互斥**的,或称它们是**互斥事件组**.

例如,在试验 E_2 中,令 $A=\{$掷出的点数至多为 4$\}$,$B=\{$掷出的点数大于 4$\}$,由于 $A=\{1,2,3,4\}$,而 $B=\{5,6\}$,在组成事件 A,B 的那些样本点中并无公共元素,故 $AB=\varnothing$,这表明事件 A,B 不会同时发生,所以 A,B 是互斥的. 图 1.4 直观地表示了两事件互斥的含义.

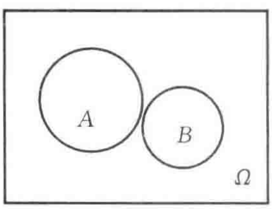

图 1.4 $AB=\varnothing$

互斥事件的一个特殊情况是对立事件.

设有事件 A,称 A 不发生的事件为 A 的**对立事件**,记为 $\overline{A}$,即,$\overline{A}=\{\omega|\omega\in\Omega,\omega\notin A\}$.

例如,在试验 E_2,令 $A=\{$掷出奇数点$\}$,$B=\{$掷出偶数点$\}$,因 $A=\{1,3,5\}$,而 $B=\{2,4,6\}$,故 $B=\overline{A}$. 另外,不难看出 $A=\overline{B}$,这说明对立事件是一个相对概念,若 B 是 A 的对立

事件，则 A 也是 B 的对立事件. 由上例还发现，一方面有 $AB=\varnothing$，另一方面有 $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}=\Omega$，即 B 包含的样本点加上 A 包含的样本点便补全了试验的所有可能结果，故 A 的对立事件 B 又叫做 A 的“补事件”.

显然，$\overline{\overline{A}}=A$. 一般地，事件 A,B 互为对立事件，当且仅当

$$AB=\varnothing, A\cup B=\Omega.$$

这便是对立事件的另一种定义方式. 对立事件 $\overline{A}$ 的几何表示是图 1.5 中的阴影部分.

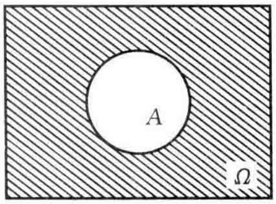

图 1.5　$\overline{A}$

5. 事件的差

设有两事件 A,B，事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为 A 与 B 的**差事件**，记为 $A-B$. 用集合论的术语表达为 $A-B=\{\omega\mid\omega\in A \text{ 且 } \omega\notin B\}$.

例如，在试验 E_2 中，$A=\{$掷出偶点数$\}$，$B=\{$掷出的点数为素数$\}$，即 $A=\{2,4,6\}$，$B=\{2,3,5\}$，于是 $A-B=\{4,6\}$.

由差事件的定义可知

$$A-B=A\overline{B}. \tag{1.1.1}$$

图 1.6、1.7 中的阴影部分即表示 $A-B$.

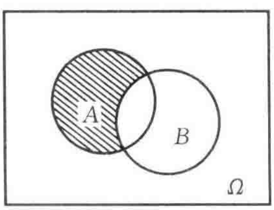

图 1.6　$A-B$

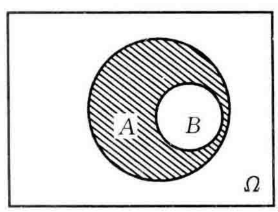

图 1.7　$A-B$

在进行事件的运算时，经常要用到下述定律：

设有事件 A,B,C，则有

交换律　$A\cup B=B\cup A, AB=BA$；

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (AB)C=A(BC)$；

分配律　$(A\cup B)C=AC\cup BC, (AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$；

对偶律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

对任意事件 A,B，若 $A\subset B$，则

$$A\cup B=B, AB=A.$$

因此,对任意事件 A 有

$$A\cup\Omega=\Omega, A\Omega=A, A\cup\varnothing=A, A\varnothing=\varnothing.$$

在进行事件运算时,运算的优先顺序是:补运算为先,积运算其次,和、差运算最后,若有括号,则括号内的运算优先.

例 1.1.1 设 A,B,C 为三个事件,试用 A,B,C 表示下列事件:

(1) $D_1=\{$三个事件中恰有一个出现$\}$;

(2) $D_2=\{$三个事件中至多有一个出现$\}$;

(3) $D_3=\{$至少有两个事件出现$\}$.

解 (1) $D_1=A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$;

(2) $D_2=A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C}$;

(3) $D_3=\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup ABC$.

1.2 概率

在实际的生活中我们常常需要了解某些随机事件发生的可能性大小,揭示出这些事件的内在的统计规律性,以使我们能更好地认识客观事物. 所谓随机事件的概率,概括地说就是描述随机事件出现(或发生)的可能性大小的数量指标. 随机事件在一次试验中可能发生,也可能不发生,这似乎没有什么规律,但是在相同的条件下,如果把一个试验重复地做许多次,我们会发现某些事件的发生表现出一定的规律性. 为了合理地刻画事件的概率,在本节中,我们先介绍一类简单的概率模型,然后引出概率的一般定义.

1.2.1 概率的古典定义

如果某随机试验只有有限个试验结果 $\{\omega_1\},\{\omega_2\},\cdots,\{\omega_n\}$,而且从该试验的条件及实施方法分析,我们又没有理由认为其中的某个结果比任一其他结果更容易发生,那我们只能认为每个试验结果在试验中具有同等可能的出现机会,也即 $1/n$ 的出现机会. 一般地,称具有以下两个特征的随机试验的数学模型为**古典概型**,若

(1) 只有有限个试验结果 $\{\omega_1\},\{\omega_2\},\cdots,\{\omega_n\}$;

(2) 每个试验结果在一次试验中发生的可能性相等.

古典概型又叫做**等可能概型**. 由于它是概率论发展初期的主要研究对象,因而称之为"古典"概型. 概率的古典定义便是在古典概型中引入的.

定义 1.2.1 设古典概型试验 E 的所有结果为 $\{\omega_1\},\{\omega_2\},\cdots,\{\omega_n\}$. 若事件 A 恰包含其中的 m 个结果,则事件 A 的概率 $P(A)$ 定义为

$$P(A)=\frac{m}{n}. \tag{1.2.1}$$

由古典概型的两个特征:"有限性"及"等可能性",我们不难看出(1.2.1)式的合理性. 在一次试验中,每个结果的出现机会同为 $1/n$,现在事件 A 包含了 m 个结果,则在一次试验中,事件 A 发生的概率应为 $m\cdot\frac{1}{n}=\frac{m}{n}$. 注意到(1.2.1)式中的分子是 A 所包含的试验结果

的个数 m，而分母是所有试验结果的总数，故(1.2.1)式又可以写成

$$P(A)=\frac{A\text{ 所包含的试验结果的个数}}{\text{试验结果的总数}}.$$

由(1.2.1)式算得的事件 A 的概率称为**古典概率**.

例 1.2.1　袋中有 8 个大小形状相同的球，其中 5 个为黑色球，3 个为白色球. 现从袋中随机地取出两个球，求取出的两球是白色球的概率.

解　从 8 个球中取出 2 个，不同的取法有 C_8^2 种，所谓"随机"或"任意"地取，是指这 C_8^2 种取法有等可能性. 若以 A 表示事件={取出的两球是白色球}，那么使事件 A 发生的取法，或者说有利于事件 A 的取法为 C_3^2 种，从而

$$P(A)=\frac{C_3^2}{C_8^2}=\frac{3}{28}.$$

例 1.2.2　设袋中有 a 件正品 b 件次品，从袋中按有放回和无放回两种方式逐一随机抽取 n 次，求恰好抽出 k 件正品(记此事件为 A)的概率 p_k.

解　(有放回)由于每次抽完后放回，所以每次抽取都是在 $a+b$ 件产品中任意抽取，并且这 $a+b$ 件产品都是等可能地被抽到，因此有放回抽取 n 次时，试验结果的总数为 $(a+b)^n$. 为了求出事件 A 所包含结果的个数，先假定前 k 次都抽到正品，则后 $n-k$ 次就只能抽取次品了. 而 k 件正品的抽取应有 a^k 种等可能的情况，$n-k$ 件次品的抽取应有 b^{n-k} 种等可能的情况，由于要抽取 n 次，从而符合事件 A 要求的试验结果数应该为 a^kb^{n-k}. 由于 n 次抽取中究竟哪 k 次抽取到正品(另外 $n-k$ 次应该抽出次品)是没有限制的，因此事件 A 所包含结果的数应是 $C_n^ka^kb^{n-k}$，于是

$$p_k=P(A)=\frac{C_n^ka^kb^{n-k}}{(a+b)^n}. \tag{1.2.2}$$

(不放回)由于抽取不放回，此时虽然每次抽取仍是一个古典概型，但下次抽取时产品数已经比上次少了一个. 既然每次抽取不放回，因此逐一抽取 n 次也可以看成是从 $a+b$ 件产品中一次抽走了 n 件产品，因此试验结果的总数为 C_{a+b}^n. 而 k 件正品取自 a 件正品的可能的取法有 C_a^k 种，同理 $n-k$ 件次品取自 b 件次品的可能的取法有 C_b^{n-k} 种，从而符合事件 A 的可能结果数为 $C_a^kC_b^{n-k}$ 种，故

$$p_k=P(A)=\frac{C_a^kC_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}. \tag{1.2.3}$$

此时还应有 $k\leqslant a, n-k\leqslant b$. 由(1.2.3)式确定的这一类概率模型称为**超几何概型**.

不难验证，由(1.2.1)式所定义的古典概率具有以下性质：

(1) $P(A)\geqslant 0$；

(2) $P(\Omega)=1$；

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 两两互斥，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_k).$$

在实际应用中，如果试验的结果有无限多个，各个基本结果发生的可能性相同，那就不能按照古典概型来计算概率了. 然而，在有些场合可用几何的方法来解决概率的计算问题. 下面是一个典型的例子.

例 1.2.3　在区间(0,1)中随机地取两个数，求事件 A={两个数之和小于 7/5}的概率.

解　这个概率可以用几何的方法确定. 在区间$(0,1)$中随机地取两个数分别记为x,y，则(x,y)等可能取值形成如下的正方形$\Omega=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}$，其面积为$S_\Omega=1$. 而事件$A=\{$两个数之和小于$7/5\}$可表示为$A=\left\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1,x+y<\dfrac{7}{5}\right\}$，其表示的区域为图1.8中阴影部分.

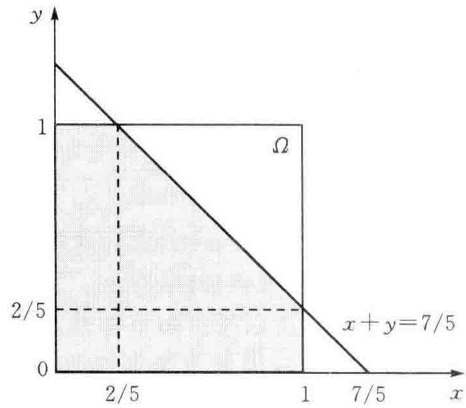

图 1.8

所以由几何分布得

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{41}{50}.$$

用上述方法计算的概率称为**几何概率**. 虽然在计算几何概率时取消了试验的所有可能结果的总数为有限的这一限制条件，但它们仍要求某种意义上的“等可能性”. 当所遇到的问题不具备等可能性时，我们既不能用计算古典概率的方法也不能用计算几何概率的方法来确定某事件的概率. 为了解决这类问题，人们从另一种角度来刻画事件的概率. 这就引出了下面的定义.

1.2.2　概率的统计定义

设有随机试验E，在相同的条件下，重复进行了n次试验. 在这n次试验中，事件A发生的次数n_A称为A发生的**频数**，比值n_A/n称为A发生的**频率**，记为$f_n(A)$，即$f_n(A)=n_A/n$.

事件的发生频率有以下简单性质：

(1) $f_n(A)\geqslant 0$；

(2) $f_n(\Omega)=1$；

(3) 若$A_1,A_2,\cdots,A_k$两两互斥，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

由于事件A发生的频率$f_n(A)$刻画了A发生的频繁程度，因而$f_n(A)$愈大，事件A发生愈频繁，这就意味着A在一次试验中发生的可能性也愈大. 这似乎在提示我们可用频率来表示事件A在一次试验中发生的可能性的大小. 是否可以这样做呢？让我们先来考察下

面的例子.

例 1.2.4　掷一枚均匀对称的硬币，以 A 表示事件{出现正面朝上}，记录事件 A 发生的频数及频率，得数据如表 1.1 所示.

表 1.1

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

从表 1.1 可以看出，当试验次数较少时，出现正面朝上的频率波动比较大，但是当试验次数增多时，正面朝上的发生频率明显地在数 0.5 附近波动. 历史上也曾有人做过类似的试验，所得数据见表 1.2.

表 1.2

实验者	n	n_A	$f_n(A)$
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲　丰	4 040	2 048	0.506 9
K. 皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K. 皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

从表 1.2 可以看出，不管什么人掷一枚匀称硬币，当试验次数逐渐增多时，频率 $f_n(A)$ 总是在 $0.5=1/2$ 附近波动，并呈现出稳定于 0.5 的倾向. 频率的这种"稳定性"就是通常所说的统计规律性，它揭示了隐藏在随机现象中的必然规律性，我们用频率的稳定值来刻画事件 A 发生的可能性大小是合适的.

定义 1.2.2　设有随机试验 E，当试验的重复次数 n 充分大时，若事件 A 的发生频率 $f_n(A)$ 稳定地在某数 p 附近摆动，则称 p 为事件 A 的概率，把这样定义的概率称为**统计概率**（**经验概率**），记为

$$P(A)=p. \tag{1.2.4}$$

首先,概率的统计定义不要求随机试验必须具备“有限性”及“等可能性”,因而它的适用范围更广.其次,它提供了估算概率的方法,即在试验的重复次数很大时,可以用事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 近似代替事件 A 的概率 $P(A)$.最后,它提供了一种检验理论或假说正确与否的准则.具体来说,如果我们依据某种理论或假说定出某事件 A 的概率为 p,但不知其是否与实际相符,为此,可做大量重复试验并算出 A 发生的频率 $f_n(A)$.若 $f_n(A)$ 与 p 相差很大,则认为该理论或假说可能不正确;若 $f_n(A)$ 与 p 很接近,则认为试验的结果支持了该理论或假说.我们将在第 7 章(假设检验)中专门来讨论这一类问题.

在概率的统计定义中,事件 A 的概率被解释为在大量重复试验中事件 A 发生的频率的稳定值,因而由频率的三条基本性质可推测,作为频率稳定值的概率亦有相应的三条基本性质

(1) $P(A)\geqslant 0$;

(2) $P(\Omega)=1$;

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 两两互斥,则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_k).$$

尽管概率的统计定义有上述种种优点,然而,它的不足之处也是显而易见的:首先,依据定义 1.2.2 要确定某事件的概率,就必须进行大量重复试验,这在实际中往往难以办到;其次,即便有条件进行大量重复试验,你也无法按本定义确切地指出何数为频率的稳定值.就例 1.2.4 来说,如果不是基于对匀称硬币的直观认识,我们如何能认定频率是稳定在 0.5 而不是 0.502 或别的什么数呢?

概率的古典定义和统计定义存在着这样或那样的不足,这些不足不仅妨碍了概率论自身的发展,也使人们对概率论的科学性产生了怀疑.1933 年,苏联数学家柯尔莫哥洛夫首先提出了概率的公理化定义,从此,概率论有了坚实的理论基础并得到迅速发展.限于本课程的大纲要求,在此,我们只能简单介绍概率公理化定义的一部分内容.

*1.2.3　概率的公理化定义

设 E 是随机试验,Ω 是它的样本空间,考虑由 Ω 的子集(包括 Ω 本身和空集 $\varnothing$)所构成的某种集类 $\mathscr{F}$,这里的 $\mathscr{F}$ 不必包括 Ω 的所有子集,但它必须满足一定的条件.$\mathscr{F}$ 中的每一元素称为“事件”,因而集类 $\mathscr{F}$ 称为“事件域”.对于 F 中的每个事件 A 赋予一个实数,记为 $P(A)$,称为事件 A 的概率,若集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列三条公理:

公理 1(非负性)　对于每个 $A\in\mathscr{F}$,$P(A)\geqslant 0$;

公理 2(规范性)　$P(\Omega)=1$;

公理 3(可列可加性)　设 $A_i\in\mathscr{F}$,$i=1,2,\cdots$,且 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots)$,有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots. \tag{1.2.5}$$

以掷骰子试验为例,其样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$,其中元素 i 代表“掷出 i 点”,它表示掷骰子试验的 6 个基本结果.取 $\mathscr{F}=\{\{1\},\cdots,\{6\},\{1,2\},\cdots,\{5,6\},\{1,2,3\},\cdots,\{4,5,6\},\cdots,\{1,2,3,4,5,6\},\varnothing\}$,$\mathscr{F}$ 中包括了 Ω 的所有子集,故 $\mathscr{F}$ 一共有 $C_6^0+C_6^1+\cdots+C_6^6=2^6=64$ 个事件,我们可根据骰子的具体情况给出概率 $P(\cdot)$.

如果骰子是匀称的正六面体,那么定义 $P(\cdot)$ 为