数学教师教育丛书

汤先键 编著

高中数学辨错悟真

GAOZHONG SHUXUE BIANCUO WUZHEN

中国科学技术出版社
CHINA SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

数学教师教育丛书

高中数学辨错悟真

汤先键　编著

中国科学技术出版社

·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

高中数学辨错悟真/汤先键编著. —北京:中国科学技术出版社,2016. 12
(数学教师教育丛书)
ISBN 978-7-5046-7416-6

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①汤… Ⅲ. ①中学数学课—教学研究—高中
Ⅳ. ①G633. 602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 013810 号

策划编辑 王晓义
责任编辑 王晓义
责任校对 凌红霞
责任印制 徐 飞
封面设计 孙雪骊

出版发行 中国科学技术出版社
地　　址 北京市海淀区中关村南大街 16 号
邮　　编 100081
发行电话 010-62173865
传　　真 010-62179148
投稿电话 010-63581202
网　　址 http://www.cspbooks.com.cn

开　　本 720mm×1000mm 1/16
字　　数 210 千字
印　　张 14. 25
印　　数 1—2000 册
版　　次 2017 年 3 月第 1 版
印　　次 2017 年 3 月第 1 次印刷
印　　刷 北京盛通印刷股份有限公司

书　　号 ISBN 978-7-5046-7416-6/G·725
定　　价 39. 00 元

序

正是因为数学及数学教育的美丽动人才造就了一大批执着于数学教与学方面研究与思考的探索者。汤先键先生就是其中的一位，虽然年届七旬有余，仍然刻苦钻研数学教育中的奥妙。《高中数学辨错悟真》就是作者近几年来探索的结果之一，是先前出版的《高中数学教学问题辨析》的拓展作品。

《高中数学辨错悟真》是汤先生自定的科研课题，是基于现实的高中数学教育教学研究而选择的一项富有挑战性的课题，意境深远。一是在日常的数学教育教学工作中，由于数学教育工作者繁忙的工作，可能疏于对一些数学教学知识的深钻细研，会在某些概念上、方法上、思想上产生一些理解上的差错，需要一位智者提醒我们数学教育工作者留心注意以免犯错误；二是由于每位数学教育工作者个人的经历、认知、思维等方面的差异，在数学概念、数学原理、数学教学等方面存在着一定的理解偏差，而有时浑然不知，的确需要一位学者给我们指出这样那样的一些失误，以免影响数学教育质量；三是由于数学体系、数学问题、数学概念的抽象与艰深，数学教学、数学资源、教学环境的错综复杂与形态多样，会使我们产生一些认知上的误区或盲区，需要认真梳理，展开学术探究与争鸣，以拓展数学教育工作者的学术视野与教学情怀，以免数学教与学的视野受限。正是基于此，汤先生进行了认真的梳理与辨析工作，以一位严谨的数学教育工作者的态度对数学教与学方面的问题进行了探究，为我们奉献了一部值得精读的学术作品。

作为一位学习者，深为汤先生的质疑与批判精神所感动，影响最为深刻的体会有三点。一是误解与正解。《高中数学辨错悟真》共有十篇，从一个失误的教学案例开始到一个久留的“痼疾”结束，深刻地剖析了在数学教育教学中存在的一些误解以及如何得到正解的问题，以具体的案例为切入点，层层深入，挖掘透彻，以理服人，指出误解，给出正解。二是他者与自我。数学教育体系必定是他者与自我共在的一个整体，站在不同的角度透视会有不同的感受与理解，如第五篇频频出错的抽象函数问题，集 20 多年的资料，梳理了他者在此问题上出错的症结与原因，基于自我的认知，进行了认真的辨析，归纳总结出了六个注意的事项，发人深省。三是桥梁与引领。数学教育在行进的过程中会遇到许多艰难险阻，需要一批执着的学者为我们架起探索的桥梁，汤先生就是这样一位学者，集自己 50 多年的数学教学经验，就数学教学研究中出现的学术问题进行了批判反思，引领后来者养成一种严谨

的治学作风，深入地挖掘数学的本真，掌握数学教育的本质。细读每篇，无论辨析后的深探、回归通性通法，还是对巧构再辨析、改正《高中数学教学问题辨析》一错等都渗透着汤先生深厚的学术功底，引领着我们为了数学教育事业，必须深钻细研，吃深吃透，方能把数学的精髓讲深讲透，才能使数学课堂充满生命的活力。

数学教育是充满挑战的事业，不仅需要高超的数学教学技艺，更需要扎实宽厚的数学功底。阅读《高中数学辨错悟真》不仅会警醒我们在数学概念上、原理上、方法上要认识理解到位，而且启示我们在教学研究上要深入钻研，多查资料，多方剖析，形成良好的数学观、教学观，充分认识数学教师的责任与使命，扎扎实实上好每一节课，切实为数学教育事业做出自己力所能及的贡献。汤先生撰写的《高中数学辨错悟真》有许多睿智的见解，须认真阅读，细心品味，方可理解其深刻思想，愿与数学教育工作者一起在学习这部著作的基础上共同探索数学教育的真谛。

张定强

2016 年 4 月于西北师范大学

前　言

笔者于2011年秋完成《高中数学教学问题辨析》40余万字手写(纸质)初稿时,老伴的病情开始恶化,只得将后续工作全部交由一二作者。至此,年满70周岁开始的“辨错悟真知”自定研究项目不得不中断,一心一意服侍老伴,同时完成《数学教学研究》审稿及家务劳作。2012年3月底,老伴终因病重医治无效离世。这之后,为排解忧伤心境,有20个月未在家居住,即便回到家,也因要集中完成不在家时累积下来的工作,“辨错悟真”研究仍难恢复,只是粗略翻阅所订期刊,发现个别表层问题后投稿或补充于《高中数学教学问题辨析》,深层问题难以发现。直到2015年5月底,才沉下心来,开始对数篇重点文章学习、探究,发现其中存在较《高中数学教学问题辨析》所收错例更为严重的问题。例如,一个被有关专家点评为“光辉”课例内竟存在六大错误,硬把“一般周期函数”概念变成了“定义在R上的具有最小正周期的‘双向周期函数’”概念;又如一篇“对‘导数’演绎创新题的探究”文章,从对问题的陈述到所得若干结论,通篇都是错的;再如深入阅读《高中数学问题辨析》“凸函数法证不等式辨”提及过的三篇文章,又发现了更多值得“再辨”的问题。这等等发现,令笔者不得不再次进行专题研究,但当时只打算写几篇文稿投给期刊,并未想到要成书。

2015年11月,原万里中学(现兰州57中)1976届部分毕业生邀我参加40周年毕业纪念筹备活动时,谈及上述问题。现甘肃宝迪投资有限责任公司董事长周立新听后深表震惊,当即建议我“将发现的这些问题整理成书”“要让更多的在职数学老师看到这些问题,改进教学”,并表示承担出书经费。立新董事长是我时任2班班主任时的一名品学兼优的学生,数学成绩也很优秀,但因当时未恢复高考,无缘大学学习。毕业后集体到临泽县插队劳动,改革开放伊始即投入房地产行业,凭着其聪敏才智,事业获得成功,成为省内知名企业家。事业有成后,积极回报社会,现已融资数十亿元筹建甘肃省老年公寓等系列项目,并打算在教育方面做些实事,正是在立新董事长的盛情支持下,笔者才赶写了这本书,作为我和立新共同为我国基础教育事业的一点奉献。

本书对十个错误案例在辨析的基础上进行了拓展性研究,可作为在职一线中学教师“提高数学专业功底”的自修或培训参考书,也可作为师范院校数学专业学生的教学参考书目。由于笔者的水平有限,错误在所难免,敬请广大读者在阅读过程中给以进一步辨析,及时指出错误之处。

目　　录

第1篇　一个整体失误的教学案例

——课例：函数的周期性[1]

《本色中闪耀着课堂的光辉》[2]点评《课例：函数的周期性》为："教材处理机智""情境创设合理""角色定位准确""探究气氛热烈""学科特点鲜明"的一堂"本色中闪耀着课堂的光辉"的优秀课例. 笔者仔细研读，却发现这是一堂出现六大失误、结论与概念不符的失败教学案例. 为便于读者探究，现将课例全文（省略括号内的教学说明）抄录于后.

1　课例：函数的周期性

教师（观看教室前墙上贴的"课程表"，故意发出惊讶的声音）：一学期有二十几周，一百五十多天，为什么这个"课程表"只列出五天的课程？

学生1：从星期一到星期五，每周的课程都是一样的，即重复出现，所以根本没有必要列出这个学期每天的课程.

教师：大家说，这种规律反映的是一种什么现象？

众学生：周期现象.

教师：此类现象多吗？

学生2：太多了，除"课程表"外，日出日落、月圆月缺、潮涨潮落、寒来暑往、人的属相等，都呈现出这种周期性.

教师：可见周期性普遍存在，那么在我们学过的函数中，有没有呈周期性的函数？

众学生：有！正弦函数、余弦函数.

教师：很好！我们知道 $y=\sin(x+2\pi)=\sin x$，就说它是以常数 2π 为周期的函数，那么能不能给一般的周期函数 F 一个定义呢？

学生3：当自变量增加一个值或减少一个值后，函数值重复出现，这就刻画了此函数的周期性.

教师：很好！但这只是粗略的文字语言，必须用精确的数学符号语言来表述才行.

---

① 陈静兴. 课例：函数的周期性[J]. 中学数学教学参考，2013(11)：28—30.

② 王强芳，程乐根. 本色中闪耀着课堂的光辉[J]. 中学数学教学参考，2013(11)：30—31.

学生3:设函数$f(x)$,若存在常数a,对于定义域中的任一自变量x的值,都有$f(x+a)=f(a)$成立,那么就称$f(x)$为周期函数,a叫做此函数的周期.

教师:好!有点像了,不过我们习惯上把周期用T表示,尽管你们已注意到"任一自变量x",但我认为精确度还不够.

教师:现在我提出两个非常有趣的问题,请大家进行讨论.

问题1 按照该同学们的定义,应该说"所有函数都是周期函数".

教室里一片哗然.

教师:设任意函数$f(x)$,$f(x+0)=f(x)$是不是都成立?

众学生:是啊!

教师:所以得"所有的函数都是周期函数",且"0是所有函数的周期"这个结论.

学生3:如果"函数都是周期函数",那么研究周期函数就失去意义了,加上条件"T是非零常数"这个问题就解决了.

教师:太好了!在数学科学研究中,对问题的本质是逐步认识和完善的.

问题2 设函数$f(x)=8(x\in R)$,我说"任何实数都是这个函数的周期",对不对?

学生4:既然函数$f(x)$的值恒为8,那么对于任意的C,都有$f(x+C)=f(x)=8$成立,所以$f(x)=8$是以任意实数C为周期的周期函数.

教师:对,不过讨论这样的函数,意义不大,所以在下面的研究中,我们将这种情况排除在外,此时我们再得出周期函数的定义应该怎样表达呢?

学生4:设函数$f(x)$,若存在非零常数T,如果对于定义域中的任一自变量x的值,都有$f(x+T)=f(x)$成立,那么就称$f(x)$为周期函数,T叫做此函数的周期.

教师:很好!按照这样的定义,周期函数的周期是否唯一呢?

学生众:不唯一.

教师:请说说理由.

学生4:若非零常数T是周期函数$f(x)$的周期,则$f(x+2T)=f(x+T)=f(x)$,$f(x+3T)=f(x+2T)=f(x+T)=f(x)$,…,所以$kT$都是函数$f(x)$的周期.

教师:这里的k如何取值?

学生4:$k\in N^*$.

教师:有不同意见吗?

学生4:不对,应是$k\in Z$.

教师:请你说说理由.

学生4:比如,今天是星期一,上午第一节课是数学课,那么7天前,7天后,14天前,14天后,…,上午第一节课也都是数学课,$7k$天$(k\in Z)$就是课程表的周期.

教师：很好！我们再回到周期函数应有什么样的结论，换一位同学来回答，不能将所有机会都给予你哦！

学生 5：若非零常数 T 是周期函数 $f(x)$ 的周期，则 $f(x+kT)=f(x)(k\in Z)$，所以 kT 就是周期函数 $f(x)$ 的周期，故周期函数的周期有无数多个.

教师：如果必须从中选一个代表你会选谁？

学生 5：选取其中最小的一个正数为代表.

教师：选得好！确实是这样，以后凡提到周期函数的周期，指的都是它的最小正周期，同学们可以举个例子吗？

学生 6：如正弦函数 $y=\sin(x+2k\pi)=\sin x\ (k\in Z)$，它的周期是 $2k\pi\ (k\in Z)$.

学生 7：不对！刚才说过"凡提到周期函数的周期，指的都是它的最小正周期"，所以应该说正弦函数的周期是 2π.

教师：如果说"2π 是 $y=\sin x$ 的周期"对不对？

学生 7：对！

教师：很好！对于正弦函数来说，还能找到一个"比 2π 更小的正周期"，请看：$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{6}$，所以说$\frac{2\pi}{3}$也是正弦函数的周期，类似的还有很多，对吗？

学生 8：不对！虽然 $\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin x$ 对于 $x=\frac{\pi}{6}$时成立，但对一切实数 x 却不成立，所以这种说法是错误的.

教师：很好，看来同学们对周期函数定义已有了比较深刻的理解，那么我们能不能利用这个定义解决以下问题呢？

例 1　设定义在实数集 R 上的函数 $f(x)$，满足 $f(x+2)=-f(x)$ 对一切实数 x 均成立，请研究：$f(x)$ 是不是周期函数，若是周期函数，找出它的周期.

学生通过研究得到：因 $f(x+2)=-f(x)$，所以 $f(x+4)=f[(x+2)+2]=-f(x+2)=f(x)$，故 $f(x)$ 是周期函数，周期为 4.

例 2　设定义在实数集 R 上的函数 $f(x)$，满足 $f(x+2)=f(x-1)$ 对一切实数 x 均成立，请研究：

(1) $f(x)$ 是不是周期函数，若是周期函数，找出它的周期；

(2) 设当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=x-4$，求 $f(10)$ 的值；

(3) 画出函数 $y=f(x)$ 的图象.

学生通过研究，得到：

(1) 因 $f(x+2)=f(x-1)$，所以 $f[(x+1)+2]=f[(x+1)-1]=f(x)$，即 $f(x+3)=f(x)$，故 $f(x)$ 是周期函数，周期为 3；

(2) 因为当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=x-4$，所以 $f(1)=-3$；

又由(1)，得 $f(10)=f(7)=f(4)=f(1)=-3$；

(3) 图象略(原文如此).

例3 设$f(x)$是以2为周期的周期函数,已知当$x\in[-1,1]$时,$f(x)=1-x^2$,则当$x\in[1,3]$;$x\in[3,5]$;$x\in[-3,-1]$;$x\in[-5,-3]$时,$f(x)$的表达式分别是什么?

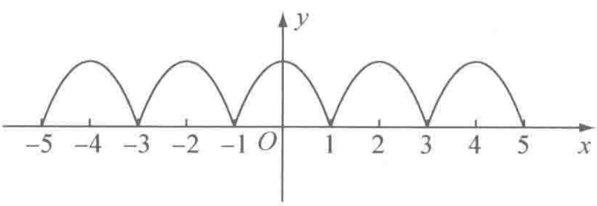

图1-1 函数$f(x)$的图象

学生经过讨论,觉得用函数的图象(图1-1)来解更为方便,则知所求函数$f(x)$的表达式依次为:

$f(x)=1-(x-2)^2, x\in[1,3]$

$f(x)=1-(x-4)^2, x\in[3,5]$

$f(x)=1-(x+2)^2, x\in[-3,-1]$

$f(x)=1-(x+4)^2, x\in[-5,-3]$

教师:利用图象来解确实方便,体现了数形结合的数学思想,但我提出更一般的问题,恐怕就不那么简单了,求当$x\in[2k-1,2k+1]$ $(k\in Z)$时,函数的表达式.

学生9:也不难,所求函数的表达式为:$f(x)=1-(x-2k)^2, x\in[2k-1,2k+1]$ $(k\in Z)$.

教师:这充分说明大家的认识、理解和解决问题的能力有了质的飞跃.(结合函数$y=\sin x$等的图象,屏幕显示,略)对于周期函数,只要研究它在一个周期段上的性质,就可以知道它在整个定义域上的性质,从已知到未知,从有限到无限,从个例到全体,体现了数学科学研究的巨大威力和魅力,也证实了研究周期函数的巨大价值.

例4 设定义在实数集R上的奇函数$f(x)$是以5为周期的周期函数,若$f(3)=0$,则方程$f(x)=0$在区间[0,10]上至少有哪些根,写出这些根组成的集合.

学生10:因为$f(x)$是奇函数,且当$x=0$时有意义,所以$f(0)=0$.

又$f(5)=f(10)=0$,所以所求集合为$\{0,5,10\}$.

学生11:条件$f(3)=0$还没有用到呢!

学生12:对了,还有$f(7)=0$.

教师:又"逮着"一个,妙!

学生12:还没有"逮"全,$f(-3)=f(2)=f(7)=0$,$f(3)=f(8)=0$.

教师:这下子,全部"落网"了,所以所求集合为——

众学生:为$\{0,5,10,2,3,7,8\}$.

教师总结:好,完成了以上任务,看来同学们收获不小啊!这节课在同学们的共同努力下,我们研究了函数的周期性的定义及应用,事实表明:只有对定义真正理解了,应用才能自如.

布置作业,宣布下课.

2 辨析:几个反例、几段简析,暴露课例的6个问题

先看两个反例.

反例1　已知函数 $f_1(x)=\sin x, x\in R^+$，判断 $f_1(x)$ 是否为周期函数？请加以讨论.

反例2　已知函数 $f_2(x)=\sin x, x\in R^-$，判断 $f_2(x)$ 是否为周期函数？请加以讨论.

显然，对于任意的 $x\in R^+$，有 $x+2\pi\in R^+$，且由正弦函数性质有 $f_1(x+2\pi)=f(x+2\pi)=\sin x=f_1(x)$，$f_1(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数；而对于任意的 $x\in R^-$，有 $x-2\pi\in R^-$，且有：$f_2(x-2\pi)=\sin(x-2\pi)=\sin x=f_2(x)$，$f_2(x)$ 是以 -2π 为周期的周期函数.

进一步可知：对于任意的 $k\in N^*$，若 $x\in R^+$，则 $x+2k\pi\in R^+$，且 $f_1(x+2k\pi)=f_1(x)$，$2k\pi\ (k\in N^*)$ 都是 $f_1(x)$ 的周期；若 $x\in R^-$，则 $x-2k\pi\in R^-$，且 $f_2(x-2k\pi)=f_2(x)$，$-2k\pi\ (k\in N^*)$ 都是 $f_2(x)$ 的周期. 在数集 $\{T/T=2k\pi, k\in N^*\}$ 中，$T_1=2\pi$ 为最小的元素；在数集 $\{T/T=-2k\pi, k\in N^*\}$ 中，$T_2=-2\pi$ 为最大的元素. 又由正弦函数的性质可知：不可能有小于 2π 的正数为 $f_1(x)$ 的周期；也不可能有大于 -2π 的负数为 $f_2(x)$ 的周期，因此可知：$T_1=2\pi$ 为 $f_1(x)$ 的最小正周期；$T_2=-2\pi$ 为 $f_2(x)$ 的最大负周期.

由于对于 $k\in N^*$，当 $x\in(0,2\pi)\subseteq R^+$ 时，有 $x-2k\pi\leqslant x-2\pi<0$，$x-2k\pi\notin R^+$，故 $-2k\pi\ (k\in N^*)$ 都不是 $f_1(x)$ 的周期；而当 $x\in(-2\pi,0)\subseteq R^-$ 时，有 $x+2k\pi\geqslant x+2\pi>0$，$x+2k\pi\notin R^-$，故 $2k\pi\ (k\in N^*)$ 都不是 $f_2(x)$ 的周期.

综上可知：$f_1(x)$ 是以 2π 为最小正周期的周期函数，无任何负周期；$f_2(x)$ 是以 -2π 为最大负周期的周期函数，无任何正周期.

以上讨论充分说明了如下两个问题

（Ⅰ）“对于一般周期函数 $f(x)$ 来说：若非零常数 T 为 $f(x)$ 的一个周期，则 $f(x+kT)=f(x)\ (k\in Z)$，$kT\ (k\in Z)$ 都是 $f(x)$ 的周期”这一命题是假命题. 其实，当 $k=0$ 时，$kT=0$，也说明这一命题是假命题，正确的命题应是：

（Ⅰ′）若非零常数 T 是周期函数 $f(x)$ 的一个周期，则对于 $k\in N^*$，有 $f(x+kT)=f(x)$，$kT\ (k\in N^*)$ 都是函数 $f(x)$ 的周期.

学生4开始的回答是正确的，只是在教师的追问下，才出现了错误的结论.

（Ⅱ）“凡提到周期函数的周期，指的都是它的最小正周期”这一说法也是错误的. 这一说法即是另一个假命题：“凡周期函数必存在最小正周期”.

不仅反例2说明它是假命题（无正周期，当然不存在最小正周期），下述反例也说明了这一点.

反例3　函数 $f_3(x)=8\ (x\in R)$.

这就是被教师“排除”的那个例子. $f_3(x)$ 是以任意一个非零常数为其周期的周期函数. 而非零实数集中不存在最小的正数，故 $f_3(x)$ 无最小正周期.

反例4　函数 $f_4(x)=\begin{cases}1 & (x\text{ 为有理数})\\ 0 & (x\text{ 为无理数})\end{cases}$

函数 $f_4(x)$ 是以任意一个非零有理数为周期的周期函数. 而非零有理数集中也无最小元素. 故 $f_4(x)$ 无最小正周期.

函数 $f_3(x)$、$f_4(x)$ 都既有正周期,又有负周期,但它们都既无最小正周期,又无最大负周期. 它们都是周期函数中的一个特殊类型,即周期函数类中的一个子类. 因此,课例将 $f_3(x)=8(x\in R)$ 排除在外后,才下周期函数的定义是一种错误,并非明智之举. 周期函数定义中“存在一个非零常数 T”讲的是“存在性”,它并不考虑“唯一性”. 实际上,T 的存在,具有“无穷性”“无数性”,这个“无数性”也不排斥“任意性”. 不能因为“意义不大”,就在研究中将这种“任意性”排除在外,使周期函数的概念丧失其完整性.

由反例 1、反例 2 可见,周期函数的定义域可以是一端有界的. 由此,我们又可发现课例中的两个错误.

(Ⅲ)例题 3 只给出函数 $f(x)$ 的周期 $T=2$ 和函数 $f(x)$ 在 $x\in[-1,1]$ 时的解析式 $f(x)=1-x^2$,而没有给出函数 $f(x)$ 的定义域. 因此,使此例为缺少条件的、部分区间的函数解析式不可求的病错题.

我们知道,设 $f(x)$ 的定义域为 D,由题设可知 $[-1,1]\subseteq D$. 又由函数 $f(x)$ 的周期为 2,知:$x\in D$ 时,$x+2k\in D\ (k\in N^*)$,因此有 $[-1+2k,1+2k]\subseteq D\ (k\in N^*)$,又这无穷个区间的并集 $\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty}[-1+2k,1+2k]=[-1,+\infty)$. 可知 $[-1,+\infty]\subseteq D$,即函数 $f(x)$ 在 $[-1,+\infty]$ 必有定义. 因此,在区间 $[1,3]$、$[3,5]$,函数 $f(x)$ 的解析式可求. 但是函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 或其子集上是否有定义? 这仍是一个未知的问题. 如果 $D=[-1,+\infty]$,则函数在 $[-5,-3]$、$[-3,-1]$ 无定义,当然就不可能求所谓的“解析式”了.

例 3 的正确命题应给出函数的定义域 D,且要求 $D\supseteq[-5,+\infty]$,例如取 $D=R$,那么,此题就变成可解的问题了.

(Ⅳ)“设 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数,且当 $x\in[-1,1]$ 时,$f(x)=1-x^2$,则 $f(x)$ 的表达式为 $f(x)=1-(x-2k)^2,x\in[2k-1,2k+1]\ (k\in Z)$”这也是一个假命题.

由(Ⅲ)的讨论可知:当 $D=[-1,+\infty)$ 时,函数 $f(x)$ 的表达式应为:$f(x)=1-(x-2k)^2,x\in[2k-1,2k+1]\ (k\in N^*)$. 此时,$f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 无定义,谈不上其上有函数 $f(x)$ 的表达式. 课例所给 $(k\in Z)$,是默认函数 $f(x)$ 的定义域为 R 的结果. 因为命题的前提中未给出定义域 D,因此所得结论是不确定的. 这里的两种“结论”只是这“不确定”的结论中的两种极端情况. 又如取 $D=[-5,+\infty)$,则其中 k 的取值应是 $k\in Z$ 且 $k\geqslant-2$.

《本色中闪耀着课堂的光辉》在点评“课例”中谈到“教材处理机智”时说:“陈老师在这方面做了机智的选择,采取了强调变量 x 的任意性,不深入对变量 x 做进一步研究(如周期函数的定义域如何之类的问题),将教学的着力点放在对常数 T 及 kT 的深入探究中,目标明确. 事实上,学生不仅对 T 的‘非零性’印象深刻,同时

在对 T 及 kT 之间的关系的探究过程中，更是思想活跃、精彩纷呈.”

笔者以为：不深入对变量 x 做进一步研究，并不等于对周期函数的定义域只字不提. 正是因为这种对周期函数定义域的“只字不提”的“机智”处理，才造成了上述四个错误的产生. 表面的“学习活动的集中”，并没有使学生真正“对 T 的‘非零性’印象深刻”，如果真的对“$T\neq 0$”印象深刻，那么就能深刻地认识到“$kT\neq 0$，因此 $k\neq 0$”，那么学生 4 在得出“$k\in N^*$”后，就不会因教师的“有不同意见吗?”而改变主意得“$k\in Z$”，而是坚持“$k\in N^*$”，即使不坚持“$k\in N^*$”，也只会改为“$k\in Z$ 且 $k\neq 0$”. 课例的“灵活处理”，是以牺牲数学学科的科学性为代价的.

下面对其他错误进行分析.

（Ⅴ）对于定义在实数集 R 上的奇函数 $f(x)$，若它也是以非零常数 T 为周期的周期函数，则有 $f(-x)=-f(x)$ 且 $f(x+T)=f(x)$，取 $x=-\dfrac{T}{2}$，则 $f\left(\dfrac{T}{2}\right)=f\left(-\dfrac{T}{2}\right)=-f\left(\dfrac{T}{2}\right)$. 由此可得 $f\left(\dfrac{T}{2}\right)=f\left(-\dfrac{T}{2}\right)=0$.

由此可知：例 4 在讨论方程 $f(x)=0$ 在区间 $[0,10]$ 上至少有哪些根时，并没有把应求之根全部“逮着”，漏网的有 $f\left(\dfrac{15}{2}\right)=f\left(\dfrac{5}{2}\right)=0$，“逮着” $x=\dfrac{5}{2}$，$x=\dfrac{15}{2}$ 后，才能算全都“逮着”了，本题所求集合应为

$$\left\{0,2,\frac{5}{2},3,5,7,\frac{15}{2},8,10\right\}.$$

这个问题我们在第 5 篇“编解抽象函数题时应注意的若干问题”时还要集中谈论，这里不再赘述.

（Ⅵ）若非零常数 T 为周期函数 $f(x)$（解析式未给出）的一个周期，在给出 $f(x)$ 在一个周期长度（$|T|$）的区间上的解析式后，一般可求出 $f(x)$ 在整个定义域上的函数解析式. 但所给区间应是半开半闭区间，否则，在区间端点会造成条件多余，这种多余的条件又很可能出现互不相容的问题. 课例例 2、例 3 都是给出的闭区间，这是错误的. 例 3 因 $f(x)=1-x^2$ 在闭区间 $[-1,1]$ 端点 $x=\pm 1$ 取值相同 $f(\pm 1)=0$，未出现条件不相容的问题. 但例 2 就不是这样了.

例 2 在总题干中未给出函数 $f(x)$ 的任何解析（表达）式，第 3 问要求画图是一件不可能完成的事情. 若将第（2）问中的当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=x-4$ 移至总题干（设）. 由于 $f(x)$ 的周期 $T=3$，而区间 $[0,2]$ 的长度为 2，小于 3，我们只能求得 $f(x)$ 在集合 $A=\bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty}[3k,2+3k]$ 上的函数解析（表达）式，从而作出（或平移图象作出）函数 $y=f(x)$ 在 A 上的图象，但不能画出函数 $f(x)$ 在集合 $B=\bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty}(2+3k,3+3k)$ 上的图象. 函数 $f(x)$ 在定义域 R 上的图象照样无法画出.

要想画出图象，只能参照课例例 3 猜测：可能在排印中将闭区间 $[0,3]$ 误排成 $[0,2]$（即将“3”误为“2”了）. 若真是这样，前面所说“不相容”问题就出来了：如

$f(3)=f(0)=-4$，$f(3)=3-4=-1$，矛盾，则例 2 成了条件不相容的病错题. 例 2 的正确命题应是：

例 2′设定义在实数集 R 上的函数 $f(x)$，满足 $f(x+2)=f(x-1)$ 对一切实数 x 均成立，且当 $x\in[0,3)$［或 $x\in(0,3]$］时，$f(x)=x-4$，请研究：

(1) $f(x)$ 是不是周期函数，若是周期函数，找出它的周期；

(2) 求 $f(10)$ 的值；

(3) 画出函数 $y=f(x)$ 的图象.

学生得出(1)、(2)的答案不会变. 这时可求出函数 $f(x)$ 在 R 上的表达式 $f(x)=x-3k-4$，$x\in[3k,3k+3)$［或 $x\in(3k,3k+3]$］$(k\in Z)$，从而画出图象. 因此题未要求求出 $f(x)$ 的函数解析(表达)式，故只需先画函数 $y=f(x)$ 在 $[0,3)$［或 $(0,3]$］的图象，再平移［向左(右)每次平移 3 个单位］得图象如图 1－2.［或交换其虚实点即是给出 $x\in(0,3]$ 所画的图象］.

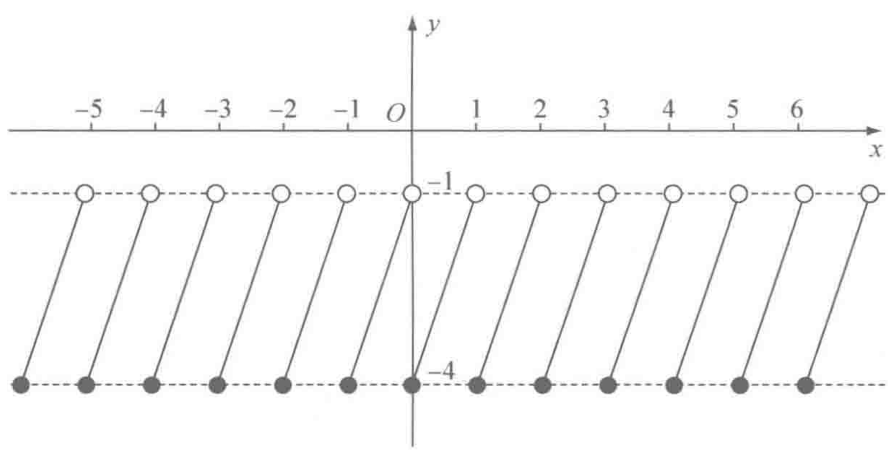

图 1－2　函数 $f(x)$ 的图象

3　问题(Ⅰ)至(Ⅳ)的错因分析，兼谈对周期函数教学的修补

教材用属加种差的方法给出周期函数的定义. 这里的属概念即函数，种差则是与其他函数不同的特殊属性：存在非零常数 T，对于定义域 D 内的任意一个实数 x 都有 $f(x+T)=f(x)$ ⊛ 成立. 但在下定义之前，教材仅给出它的“背景”或“模型”函数——正、余弦函数. 这两种函数具有更加特殊的属性：存在非零常数 T，对于定义域 D 内的任意一个实数 x 都有 $f(x\pm T)=f(x)$ ⊛⊛ 成立. 即它们都是具有“双周期”的周期函数，我们称之为“双向周期函数”，而按 ⊛ 式定义的一般周期函数，它可以是这种“双向周期函数”：$f(x+T)=f(x)$ 与 $f(x-T)=f(x)$ 同时成立；也可能是仅 $f(x+T)=f(x)$ 成立，但 $f(x-T)=f(x)$ 不成立. 我们称这类周期函数为“单向周期函数”. 因此，“双向周期函数”只是一般周期函数的一个子集. 同时，正余弦函数的定义域又都是 R，且都存在最小正周期，因此，正、余弦函数又仅仅是

“双向周期函数”的一个小的子类(双向周期函数的定义域可以不是 R——如反例5,也可能不存在最小正周期——如反例3、反例4).

反例 5　函数

$$f(x)=\begin{cases}1 & x=2k \quad (k\in Z)\\ 0 & x=2k+1 \quad (k\in Z)\end{cases}$$

是以 2 为最小正周期、-2 为最大负周期的周期函数(双向周期函数),但它的定义域是 Z,不是 R.

正是这种“背景”“模型”的特殊性和单一性,使初学者或未读懂一般周期函数定义中⊛式内涵的教师产生如下错觉:定义所指数学对象的全部,就是这种定义在 R 上的,既具有双向周期($\pm T$),又存在最小正周期的周期函数. 纵观《课例:函数的周期性》教学的全过程不难发现,就是这种错觉引领师生得到了错误的结果Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ. 这是一种以偏概全的错误,是一种任教者不理解概念的含义,对周期函数概念所指数学对象的要素缺乏全面分析而产生的错误.

概念学习不能从抽象的定义出发,而应该从具体事例出发,这就要求任教者举好事例——所举事例既要有典型性:概念的本质属性突出,容易被学生感知;又要有丰富性——所举事例或事例组能包含本质特征的不同表现形式. 这样,才能让学生感知、抽象、概括出它们的真正的共同本质属性,从而形成真正的概念认知. 数学概念都是某一类事物的反映,其外延是由许多子类组成的. 所以,概念教学不仅要引导学生“下定义”,还要引导学生对概念所指的数学对象进行“划分”,下定义是明确概念内涵的逻辑方法,划分则是明确概念外延的逻辑方法. 划分就是将一个概念所指的数学对象按不同属性划分成若干子类. 通过划分,一方面可使概念系统化、完整化,从而建立概念的结构体系;另一方面能获得对概念外延的更深刻的认识,从而夯实研究概念所指数学对象的性质的基础. 所以,教好“划分”是概念教学的重要一环[①].

由此审视《课例:函数的周期性》不难发现,它至少存在两大缺陷. 其一,举例缺乏丰富性,即事例单一,不能全面反映周期函数本质特征的不同表现形式.《课例:函数的周期性》仅由正、余弦函数为例让学生感知、抽象、概括. 而 $\sin(x\pm 2\pi)=\sin x$、$\cos(x\pm 2\pi)=\cos x$. 一个有经验的教师会意识到,当学生 3 说“增加一个值或减少一个值”时,他和他的同学们很可能将其中的“或”偷换成“且”. 如果学生没有预习教材,很可能感知、抽象、概括出周期函数的本质属性或说关键特征为(**)式,而不是⊛式. 即使因预习得出的是⊛式,也会因正、余弦函数定义在 R 上,对于任意一个 $x\in R$,必有 $x-T\in R$ 而产生这样的认识:“对于 $f(x)$ 定义域 D 内任意一个 x,由于 $f(x+T)=f(x)$ 成立,又有 $x-T\in D$,故可换 x 为 $x-T$ 得 $f(x)=f(x-T)$,即得 $f(x-T)=f(x)$ 也成立.”这两种认识都是对周期函数概念的错误认识或

① 章建跃,陈向兰. 数学教育之取势明道优术[J]. 数学通报,2014(10):1—7+封底.

想法. 如果这个任教者又对周期函数概念理解深刻的话，他就会提前补充诸如 $f_1(x)$ 或 $f_2(x)$ 之类的事例；或在追问"你说的'或'是何含义？"让学生讨论，在暴露问题的过程中或其后补充上述反例，以避免错误Ⅰ、Ⅲ、Ⅳ的发生；同时，还会想到：学生可能将正、余弦函数都存在最小正周期的性质迁移到一般周期函数上去，因此，不仅不会将 $f(x)=8(x\in R)$ 这类函数排除在研究对象之外后才下定义，而且还会再补充如 $f_4(x)$ 那样的事例以防错误Ⅱ的发生.

其二，教学环节不完整，缺少教"划分"（或隐性的教"划分"）这一重要教学环节. 对于一个深刻理解周期函数概念又有经验的任教者来说，当学生 4 由⊛式推导而得到"kT 也是函数 $f(x)$ 的周期"并说"$k\in N^*$"后，绝不会仅用"有不同意见吗？"将学生引回到教学起点（由"课程表"与正弦函数继续讨论），而致使教学走向错误的方向. 应该是：或在学生 4 改口为"$k\in Z$"后再追问："到底是 $k\in N^*$，还是 $k\in Z$？"并引导学生继续紧扣周期函数的定义，即抓住关键特征⊛式，结合对前面所举各组事例（若前面未补全各类事例，在这里应继续补全）组织学生进行分类讨论，在让学生通过讨论辨明为什么是 $k\in N^*$ 而不是 $k\in Z$ 的同时，将教学自然而然地引入到教（或隐性的教）"划分"的第一个环节——按"$\forall x\in D$（定义域），$f(x-T)=f(x)$ 是否恒成立"这一标准将周期函数划分（或隐性划分）为双向周期函数和单向周期函数两个子类的过程；或者在学生 4 说"$k\in N^*$"后，教师直接肯定"很好！""为什么是 $k\in N^*$，而不能是 $k\in Z$？"同样，可引入到教"划分"的第一个环节. 在这一环节中，如果再细致点，还可按周期 T 的正、负将单向周期函数细划为右向周期函数和左向周期函数两个小子类. 这一环节是一个较为深入的理解一般周期函数概念内涵和外延的过程，教好这一环，会有效地预防错误Ⅰ、Ⅲ、Ⅳ的发生.

同样，对于一个深刻理解周期函数概念又有经验的任教者来说，当学生 5 回答"周期有无数多个"后，绝对不会直接提问"如果必须从中选一个代表你会选谁"而把学生带入"凡周期函数必有最小正周期"的泥潭，而应该是启发学生："请结合前面所举各事例分析一下，这无数多个周期 kT $(k\in N^*)$ 的正、负号规律和 T 的正、负之间的关系以及 T 的取值的限制情况."（T 正则 kT 正，T 负则 kT 负，T 可以是这无数个周期中的任意一个，T 有时可取任何一个非零实数值或非零有理数值，除了"$T\neq0$"的限制外，再无任何限制），然后追问："在这无数多个非零实数 kT 中，你一定能找到一个最小的正数吗？"在学生讨论的基础上适时给出被《课例：函数的周期性》忽视的教材上关于最小正周期的定义："对于一个周期函数来说，如果在所有的周期中存在着一个最小的正数，就把这个最小的正数叫做最小正周期."从而将教学引入到教（或隐性的教）"划分"的第二环节——按"最小正数是否存在"这一标准将周期函数"划分"（或隐性划分）为存在最小正周期的周期函数和不存在最小正周期的周期函数两个子类. 然后才是追问："如果一个周期函数存在最小正周期，若是必须从这无数个周期中选一个代表，你会选谁？"这一环节将再次深化学生对周期函数概念的内涵和外延的理解，也杜绝了错误Ⅱ的发生.