

# 通信信号处理模型方法及应用

包建荣 姜 斌 许晓荣 唐向宏 编著



科学出版社

# 通信信号处理模型方法及应用

包建荣 姜 斌 许晓荣 唐向宏 编著

科学出版社

北 京

## 内 容 简 介

本书全面阐述目前通信信号处理模型方法的研究现状,介绍采用模型的方法来解决数字通信中的信号分析与处理问题,以期获得接近最大似然的最优信号处理性能。具体介绍典型的稀疏概率图、因子图等软概率信息处理方法和常见的维纳、卡尔曼滤波及时间序列模型等现代信号处理方法,并对其理论展开较深入的分析。同时,也结合部分概率图、因子图等通信信号处理的模型方法,给出典型应用,以启发现代通信信号处理新方法的发展及应用。

本书适合作为普通高等院校及独立学院电子信息类专业高年级本科生、研究生、教师及从事通信信号处理各领域工作的科技工作者的参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

通信信号处理模型方法及应用/包建荣等编著. —北京:科学出版社, 2018.1

ISBN 978-7-03-055259-4

I. ①通… II. ①包… III. ①信号处理—系统模型—研究  
IV. ①TN911.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 275652 号

责任编辑:陈 静 董素芹 / 责任校对:郭瑞芝

责任印制:张克忠 / 封面设计:迷底书装

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2018 年 1 月第 一 版 开本:720×1 000 1/16

2018 年 1 月第一次印刷 印张:15 1/2

字数:300 000

定价:80.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

# 前 言

本书较系统且全面地阐述目前通信信号处理模型方法的研究现状，系统介绍采用模型的方法来解决数字通信中的信号分析与处理问题，以期获得接近最大似然的最优信号处理性能。其中，主要侧重典型稀疏概率图、因子图等软概率信息处理方法和常见的维纳、卡尔曼滤波及时间序列模型等现代信号处理方法，并对其进行较深入的探讨。同时，也结合部分算法，给出其在通信信号处理中的典型应用，来启发及推广这些现代通信信号处理模型方法的应用场景。最后，还针对这些通信信号处理模型方法中的问题，总结了其可能的无线通信应用领域。

与类似侧重调制解调、同步、均衡等通信具体环节的通信信号处理类书籍不同的是，本书主要将一些分散于各学术著作与论文中的模型化信号处理内容，较完整地综合归纳总结及系统化描述，争取学术思想前沿、内容范围适当合理、结构体系较为完善、文字写作尽量精练。具体特色如下：本书强调通信信号的模型计算方法中物理概念和原理结论的理解与掌握，简化烦琐的数学推导，注重使用明确、直观的物理概念，并增加较多实例，力求让讲述的内容理论联系实际，使其更适合于通信领域科技工作者参考。内容涉及经典信息论、图模型等经典内容及协同迭代信息论最新发展趋势的论述。另外，也注重理论联系实际，每部分内容都增加适当的实践应用讨论，方便读者进一步开展计算机仿真实验等工作，进而提高对本书内容的理解，达到较好的阅读效果。

本书也是作者对自己多年来从事空间和无线通信物理层信道编码及信号处理算法研究成果的总结与阐述，较深入地阐明数学模型方法在通信信号处理问题中的建模方法和算法设计思路。本书主要借鉴概率推理等现代概率域软信息处理机制，结合信息论原理，较好地分析物理层传输过程中遇到的信号检测与接收等问题，开展较详细的理论分析和推导证明，通过计算机仿真结果来验证其模型的性能，并给予适当的评价。这些模型方法和手段可为从事现代无线通信信号处理研究与物理层算法系统开发的科研工作者和工程技术人员提供一定的理论支撑，也可为无线通信相关领域专业的教师、学生在科研中提供参考，有助于激发或开拓通信信号处理的研究思路。

全书共9章，除第1章为通信信号模型方法的概论外，其余几章分别针对现有较热门的贝叶斯推理、稀疏概率图、因子图、隐马尔可夫模型、最小均方及维纳滤波、最小二乘与卡尔曼滤波等信号处理模型方法，开展对现有通信信号处理算法的典型分类建模与分析应用。全书章节安排主要如下：第1章概述通信信号处理模型

方法的一些基本原理；第2章描述概率域信号处理的贝叶斯推理模型理论基础；第3章给出稀疏概率图模型的一些分析结论；第4章探讨一类改进的概率图模型，即因子图模型，便于处理一些复杂的信号识别与接收等功能；第5章探讨经典的最小均方及维纳滤波理论；第6章介绍最小二乘及卡尔曼滤波；第7章论述线性预测原理；第8章介绍隐马尔可夫模型；第9章主要为采用概率图和因子图等模型方法的通信信道编码、联合编码调制、迭代解调等典型应用。

全书编撰工作如下：唐向宏主要撰写了第1章，在总体上给出通信信号处理模型方法的数学基础；许晓荣完成了第5章、第6章，系统描述最小均方及最小二乘等经典的信号处理算法模型，突出通信信号处理模型方法涉及的重点，特别是信号估计建模等热门研究点；姜斌完成了第3章，介绍概率图模型的信号处理方法，并协助校对了部分章节文字。全书剩余部分由包建荣编撰整理和总结。此外，吴佳雯、杨顺峰、钱方、李阳光、姚辉等也参与了部分资料的整理与总结，且绘制了部分插图，在此特别感谢。最后，本书全文由唐向宏审核，并主持内容讨论及最终定稿。

本书得到了杭州电子科技大学省重点学科“电路与系统”及杭州电子科技大学信息工程学院一流学科B建设“杭电信工学院电子科学与技术专业”的资助，特此感谢。此外，本书最后章节的通信信号处理模型方法应用等部分内容的编撰，还得到了浙江省自然科学基金（编号：LZ14F010003）、国家自然科学基金（编号：61471152）、东南大学移动通信国家重点实验室开放研究基金（编号：2014D02）、浙江省公益性技术应用研究计划项目（编号：2015C31103）、浙江省2016年度高等教育教学改革项目（编号：jg20160237）等课题的资助。

本书主要从通信信号处理的数学模型理论出发，由浅入深，直观与严谨相结合，并提供了较为详尽的参考文献。

由于作者水平有限和通信信号处理模型方法发展的日新月异，书中难免有不足之处，还望各位专家和读者予以批评指正。

作者

2017年6月

于杭州电子科技大学信息工程学院

# 目 录

第 1 章 概率模型及信息理论基础	1
1.1 概率模型与信息理论概述	1
1.2 随机过程	2
1.2.1 随机信号概述	2
1.2.2 随机过程概念	3
1.3 随机信号的概率模型	4
1.3.1 概率定义	4
1.3.2 离散、连续和有限状态概率模型	4
1.3.3 离散随机变量与随机过程及其概率质量函数	5
1.3.4 连续随机变量与随机过程及其概率密度函数	6
1.4 随机过程的数字特征	8
1.4.1 均值	8
1.4.2 相关性及自协方差	8
1.5 随机信号的平稳性	10
1.5.1 严平稳过程	11
1.5.2 广义平稳过程	12
1.6 随机信号的功率谱密度	12
1.7 随机信号的统计特性	13
1.7.1 互相关和互协方差	13
1.7.2 互功率谱密度和相关性	14
1.7.3 平均遍历过程	15
1.7.4 相关遍历过程	16
1.8 一些典型的随机过程	16
1.8.1 高斯过程	16
1.8.2 泊松过程	17
1.8.3 马尔可夫过程(连续变量)和马尔可夫链(离散变量)	18
1.9 信息理论模型基础	20
1.9.1 信息熵	20
1.9.2 互信息量	21

1.10	本章小结	23
<b>第 2 章</b>	<b>贝叶斯统计推断</b>	<b>24</b>
2.1	贝叶斯估计的基本概念	24
2.1.1	贝叶斯准则	25
2.1.2	估计的动态预测与概率模型	26
2.1.3	模型参数与信号空间	26
2.1.4	估计的指标和特征	27
2.1.5	先验和后验空间分布	29
2.2	贝叶斯估计方法	30
2.2.1	最大后验概率估计	30
2.2.2	最大似然估计	31
2.2.3	最小均方误差估计	33
2.2.4	误差对估计性能的影响	34
2.2.5	先验与观测的相对重要性	36
2.3	EM 算法	37
2.3.1	EM 算法原理	37
2.3.2	EM 算法的收敛性	38
2.4	最小估计方差的 Cramer-Rao 界	39
2.4.1	随机参数的 Cramer-Rao 界	41
2.4.2	向量参数的 Cramer-Rao 界	41
2.5	贝叶斯分类	42
2.5.1	二元分类	42
2.5.2	分类错误	43
2.5.3	离散值参数的贝叶斯分类	44
2.5.4	最大后验概率分类	44
2.5.5	最大似然分类	45
2.5.6	最小均方误差分类	45
2.5.7	有限状态过程的贝叶斯分类	45
2.5.8	最大可能状态序列的贝叶斯估计	47
2.6	本章小结	47
<b>第 3 章</b>	<b>概率图模型</b>	<b>49</b>
3.1	概率图模型概述	49
3.2	概率图模型的分类	54
3.3	有向概率图模型	56

3.3.1	贝叶斯网络	56
3.3.2	动态贝叶斯网络	58
3.3.3	隐马尔可夫模型	59
3.4	无向概率图模型	66
3.4.1	马尔可夫随机场	66
3.4.2	条件随机场	67
3.5	概率图模型学习与推断	67
3.6	本章小结	73
<b>第 4 章</b>	<b>因子图模型</b>	<b>74</b>
4.1	因子图概述	74
4.1.1	因子图分配率	75
4.1.2	因子图表示	75
4.1.3	边缘函数的递归运算	76
4.1.4	通过消息传递计算边缘函数	78
4.2	因子图与迭代译码	79
4.2.1	逐比特 MAP 译码	79
4.2.2	置信传播译码	80
4.2.3	逐块 MAP 译码	82
4.3	译码界及理论分析	83
4.4	因子图的编码表示	84
4.4.1	线性码的图表示	84
4.4.2	马尔可夫链和隐马尔可夫模型	85
4.5	基于因子图的迭代接收机统一模型	86
4.5.1	迭代接收机设计	86
4.5.2	块衰落信道	87
4.5.3	Rayleigh 衰落信道	88
4.5.4	多径衰落信道	91
4.6	衰落信道上基于因子图的迭代信号检测	94
4.6.1	信道模型	94
4.6.2	因子图迭代接收机设计	95
4.7	因子图及和积算法及其符号间干扰信道应用	99
4.7.1	因子图表示	100
4.7.2	图的改进	103
4.7.3	平均互信息量的分析	104



4.8	本章小结	105
<b>第 5 章</b>	<b>最小均方误差和维纳滤波器</b>	<b>106</b>
5.1	最小均方误差估计: 维纳滤波器	106
5.1.1	维纳滤波方程	106
5.1.2	输入信号自相关和输入与期望信号的互相关	109
5.2	维纳滤波器的块数据形式	110
5.2.1	维纳滤波器的块数据表示	110
5.2.2	最小均方误差方程的 QR 分解	111
5.3	维纳滤波器的向量空间投影	112
5.4	最小均方误差信号分析	113
5.5	频域维纳滤波器	114
5.6	维纳滤波器的实现	115
5.6.1	维纳滤波器的阶数选择	115
5.6.2	维纳滤波器的阶数改进	116
5.7	维纳滤波器的应用	116
5.7.1	维纳滤波器用于减少加性噪声	116
5.7.2	平方根维纳滤波器	118
5.7.3	维纳信道均衡器	118
5.7.4	多通道系统中的信号时间对准	119
5.8	本章小结	120
<b>第 6 章</b>	<b>自适应滤波模型</b>	<b>121</b>
6.1	自适应滤波模型简介	121
6.2	最陡下降法	123
6.3	LMS 滤波器	126
6.3.1	NLMS 滤波器	126
6.3.2	LMS 算法的稳态误差	128
6.4	状态空间卡尔曼滤波器	128
6.5	递归最小二乘自适应滤波器	134
6.6	本章小结	138
<b>第 7 章</b>	<b>线性预测模型</b>	<b>139</b>
7.1	线性预测编码	139
7.1.1	LP 模型的时频域描述	140
7.1.2	线性预测系数的计算	142

7.1.3	逆滤波器：频谱白化和解相关	144
7.1.4	预测误差信号	145
7.2	前向、后向和格型预测器	145
7.2.1	前向和后向预测器的增广方程	146
7.2.2	Levinson-Durbin 递归解	147
7.2.3	格型预测	149
7.2.4	最小二乘误差预测的替代公式	149
7.2.5	预测模型阶数选择	150
7.3	短期与长期建模	151
7.4	预测系数的最大后验估计	152
7.4.1	预测输出的概率密度函数	152
7.4.2	使用预测系数的先验概率密度函数	153
7.5	LP 算法的应用实例	154
7.6	本章小结	159
<b>第 8 章</b>	<b>隐马尔可夫模型</b>	<b>160</b>
8.1	非平稳过程的统计模型	160
8.2	隐马尔可夫模型概述	161
8.2.1	隐马尔可夫模型的参数	162
8.2.2	状态观测概率模型	163
8.3	HMM 参数的训练	165
8.3.1	前向-后向概率计算	166
8.3.2	Baum-Welch 模型的重估计	167
8.3.3	离散密度观测模型及其 HMM 参数训练	168
8.3.4	HMM 的高斯矩阵概率密度函数	170
8.4	使用 HMM 解码信号	171
8.4.1	维特比译码算法原理	171
8.4.2	维特比译码算法流程	172
8.5	HMM 的信号与噪声建模	173
8.5.1	信号与噪声 HMM 的合并与分解	174
8.5.2	基于 HMM 的维纳滤波器	176
8.6	本章小结	177
<b>第 9 章</b>	<b>通信信号处理模型方法的典型应用</b>	<b>178</b>
9.1	LDPC 编码构造	178
9.1.1	基于原模图的广义结构化 LDPC 码校验矩阵的构造	179

---

9.1.2	构造的广义结构化 LDPC 码参数	187
9.1.3	广义结构化 LDPC 码的编译码结构	188
9.1.4	广义 QCARA 结构 LDPC 码仿真及其分析	190
9.2	LDPC 编码 MSK 调制	192
9.3	采用 LDPC 译码软信息的同步	195
9.3.1	同步偏差对译码信号的影响	195
9.3.2	迭代定时与载波同步算法及分析	201
9.4	LDPC 译码辅助的迭代信噪比估计	215
9.4.1	信噪比偏差对译码影响的分析	215
9.4.2	迭代信噪比估计算法及分析	217
9.5	联合 LDPC 译码 MIMO 检测	221
9.5.1	MIMO 原理	221
9.5.2	联合迭代 VBLAST 检测及 LDPC 译码	223
9.5.3	联合迭代 VBLAST 检测及 LDPC 译码仿真与分析	226
9.6	本章小结	229
	参考文献	230

# 第 1 章 概率模型及信息理论基础

概率模型与信息理论为通信信号处理系统的分析、建模和设计等研究提供了必要的数学基础。本章主要针对通信信号特征,开展相关的数学模型及分析设计研究。该研究首先面对的问题是消息、数据和知识所代表的信息究竟如何来衡量。因信息理论与可量化的变量密切相关,故信息可定义为一个关于随机过程状态或值的知识或数据<sup>[1]</sup>,如过程的状态数、状态可能性、各状态可观测概率、状态序列条件概率及过程历程(变化状态)等。信息理论允许通过相关观测对随机过程的值或数据作预测和估计,观察结果可能不完整或存在噪声。故可通过利用信息承载过程和噪声的概率模型及随机过程状态序列的依赖关系来实现。而概率模型则为信息理论的基础,信息是概率的对数函数,而且,在对数底为 2 时,信息的度量单位为比特。概率模型已广泛应用于语音图像识别、信号检测、调制解调等不同通信信号处理领域的描述及预测随机信号等场合。

本章主要介绍随机过程等概率模型概念,并探讨概率和信息间的关系。同时,作为信息量化方法引入了熵的概念,并提出了互信息计算等应用。最后,分析了几种不同形式的概率模型及其在通信信号处理中的应用。

## 1.1 概率模型与信息理论概述

通信信号处理和随机信号决策等都需携带多层次的消息,但这些消息往往包含噪声且可能并不完整。图 1.1 给出了从信息生成到信息译码决策等自下而上信息处理各层的简化结构。在信息流各层中也存在随机性和不确定性,观察结果可能隐含了混合信号、隐藏参数及噪声。

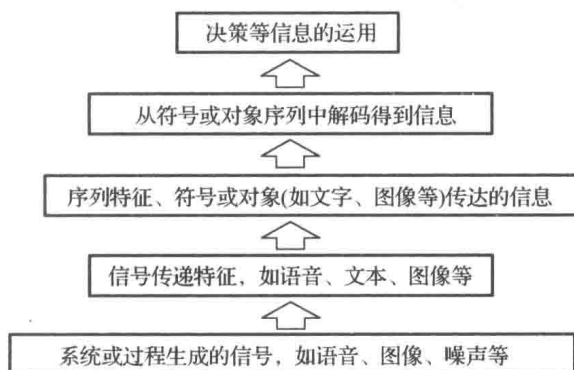


图 1.1 信息处理与决策流程结构图

在图 1.1 所示的信息处理各层中, 都可能存在一定的随机性和不确定性及附加的干扰噪声, 而这些都可用概率函数来分析。

信息论与随机信号决策的基础都可由概率模型组成, 如图 1.2 所示<sup>[2]</sup>。数据压缩、模式识别、决策、搜索引擎和人工智能等通信信号处理的典型应用都采用了基于信号的概率模型。

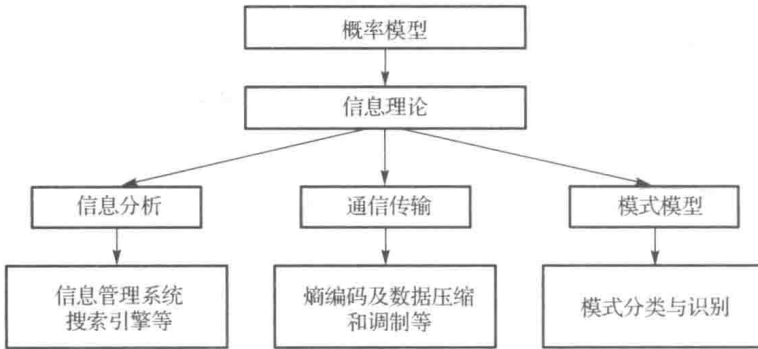


图 1.2 面向概率模型的信息论及其通信信号处理应用结构图

信息论研究的信息, 主要是随机承载于信号中的, 如文本、语音、图像、噪声等。只有当一个信号为随机信号时才可携带和传递信息, 而确定或可预测信号不能携带信息<sup>[3]</sup>, 即承载信息的信号值不能完全被预测。信源包含了信息内容, 它可通过熵的概念, 即概率的对数函数, 以比特为单位来衡量。通信系统建模、量化、估计和信息排序及搜索引擎都需要适当的数学工具, 对承载信息的信号随机性和不确定性建模, 且该数学模型需根据统计概率理论来实现。因此, 信息处理可针对随机过程和概率模型开展研究。在通信信号处理中, 概率模型常用于描述和预测随机信号在信号处理中的具体应用, 如语音或图像识别, 音视频编解码, 信号检测、同步、均衡等。

以上主要介绍了信号的随机性、信息、熵的概念及它们三者间的关系。通常, 一个随机过程可由概率模型来完整描述, 但也可由简单统计量来部分描述, 如平均值、相关性和功率谱。本章主要考虑一些广泛应用的固定、非平稳和有限状态随机过程, 并讨论通信信号的滤波或变换对其概率分布的影响, 重点分析通信信号处理中概率模型的几个关键应用。

## 1.2 随机过程

本节主要介绍随机信号与随机过程的基本概念, 并分析其部分参数。

### 1.2.1 随机信号概述

根据信号传递信息的能力, 可将信号分为两大类。

(1) 确定信号, 如正弦波, 无法传递信息。但由一个随机信息承载信号调制时可作为信息载体。

(2) 随机信号, 如语音和图像信号, 包含了承载信息的随机信号参数。

在每一类中, 信号在时间和幅度上可连续或离散, 且可分为一维或多维信号。

确定信号在时间或空间上具有预定轨迹, 其明确的波动可用一个时间函数描述, 使其在每个时间点的确切值都可从函数描述或过去信号中预测。例如, 一个正弦波  $x(t)$  可由方程  $x(t) = A\sin(2\pi ft + \phi)$  准确预测。所以一个确定信号除了其自身形状和特征参数外, 不携带任何信息。

随机信号具有不可预测的波动情况<sup>[4]</sup>, 所以无法制定一个可预测随机信号明确未来值的方程, 如语音、噪声等信号都至少部分随机。信号随机性也与其携带的信息、带宽和噪声等有密切联系。

因此, 一个信号有传递信息的能力, 就必有一定程度的随机性。而一个可预测的信号不传递任何信息。信号中的随机部分是信息内容或噪声。在通信信号处理中, 传输信号的可预测部分往往是时间、功率或带宽资源的浪费。因此, 信号在传输之前尽量消除内在相关性<sup>[4]</sup>。虽然随机信号不可预测, 但其表现出良好的统计值, 如最大值、最小值、平均值、中值、方差、相关性、功率谱和高阶统计值。故随机过程也可用其统计数据来描述, 并由其统计数据的概率模型来完善。

## 1.2.2 随机过程概念

随机过程是产生随机信号的任意过程或函数<sup>[5]</sup>。“随机过程”一词广泛应用于描述产生连续随机信号的随机过程, 如语音样本序列、视频序列、噪声样本序列等。在信号处理中, 随机过程也是一类随机信号概率模型, 如高斯过程、马尔可夫过程、泊松过程、二项过程、多项式过程等。

离散随机过程主要指以概率模型为特征的离散随机信号, 且可表示为  $X(m)$ 。离散随机过程  $X(m)$  的每个点在时间和空间有相应坐标, 记为  $x(m, s)$ 。其中,  $m$  为离散时间坐标,  $s$  是标明每个点的空间坐标整数变量。

一个随机过程的所有实现集合称为过程空间或集合, 如通信网络中的一个随机噪声过程。每条电话线路上的噪声随时间随机波动, 可表示为  $n(m, s)$ 。其中,  $m$  为离散时间坐标,  $s$  表示对应的电话线路。不同线路上的噪声的集合构成了噪声过程空间, 记为  $N(m) = \{n(m, s)\}$ 。其中,  $n(m, s)$  为噪声过程  $N(m)$  在第  $s$  条电话线路上的具体事件。

许多不同随机过程样本的空间平均值, 可作为一个“真实”随机过程的统计结果。在实际情况下, 一个过程只有一个或有限数量的事件。对于一个过程的单一实现, 遍历随机过程的时间平均统计可用来代替整体平均统计。

## 1.3 随机信号的概率模型

概率是为了计算各种结果的可能性而产生的。它用一个  $0\sim 1$  的数值来衡量离散随机变量中一个特定状态的可能性。它为随机过程中不同结果的可能性分布提供了完整数学描述, 如用一个变量结果的概率反映该结果发生的次数在总试验次数中所占的比例。

### 1.3.1 概率定义

概率又称可能性, 是概率论的基本概念。概率是对随机事件发生的可能性度量, 通常以一个  $0$  和  $1$  之间的实数表示事件发生可能性的大小。越接近  $1$ , 该事件越可能发生。反之, 越接近  $0$ , 则越不可能发生。通常, 可用百分比或介于  $0$  和  $1$  间的数来量化某一随机过程的结果。概率为  $0$  表示该结果不可能发生。概率为  $1$  意味着一定发生。因此, 概率也被映射成一个  $0\sim 1$  的数。如需维持概率法则, 对于一个任意事件, 选择  $0$  作为事件不发生的概率是必要的。例如, 一个不可能事件和一个可能事件的联合概率  $P$  (不可能, 可能), 应与不可能事件概率相同。而只有使用  $0$  来表示不可能事件概率, 才可满足该条件。此外, 选择  $1$  为必然事件的概率是任意的。

### 1.3.2 离散、连续和有限状态概率模型

概率模型的提出, 使对含有噪声或不完整观察过程的估计成为可能。概率模型可以描述离散值、连续值或者有限状态连续值的随机过程, 如图 1.3 所示。该图列出了概率模型的常见形式, 其往往表示为随机过程的统计参数的函数, 如表示为均值和协方差的指数函数的形式。

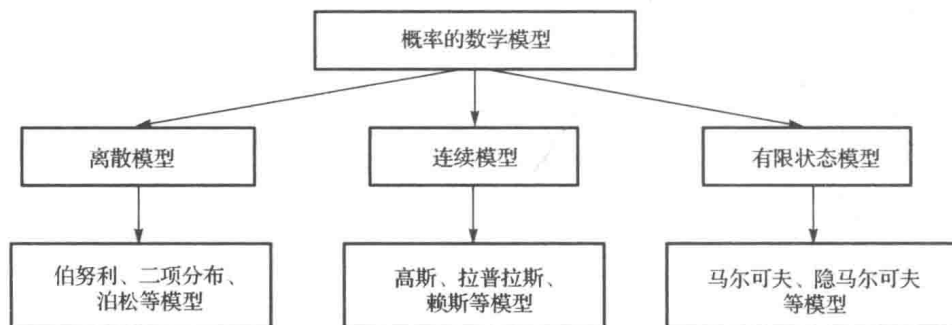


图 1.3 概率模型分类及典型实例

### 1.3.3 离散随机变量与随机过程及其概率质量函数

随机变量为一个变量是随机的值，如投硬币出现正面试验的结果、信号样本的值、图像的像素结果。而随机过程，如马尔可夫过程，其产生的随机变量通常是时间和空间的函数。例如，语音、图像及视频等的时间或空间序列，也通常称作随机过程。

考虑一个时间生成序列  $x(m)$  的随机过程。令  $\{x(m,s)\}$  为同一过程产生的不同时间序列的集合。其中， $m$  表示时间， $s$  表示序列系数。对于一个给定的瞬时时刻  $m$ ，随机过程的样本实现  $\{x(m,s)\}$  是呈现在整个空间  $s$  上的一个随机变量。随机变量和随机过程的主要区别是后者会生成随机时间或空间序列。因此，随机变量的概率模型也适用于随机过程。另外，随机变量也可定义为概率函数。

概率模拟了随机变量的特性。随机变量的经典例子有：机会过程的随机结果，如投掷硬币、骰子等。一个随机变量的空间为所有值或输出结果的集合，且该变量可以假设。例如，扔硬币得到的结果空间  $\{\text{正面}(H), \text{反面}(T)\}$  及掷骰子得到的结果空间  $\{1,2,3,4,5,6\}$  等。根据一定规则，也可将随机变量空间划分成若干子空间。子空间是具有某种共同属性值的集合，如一组大于或小于某一阈值的结果集合、一组紧密间隔的样本或在一个给定值范围内的样本集合等。

每个子空间为一个事件。事件  $A$  的概率  $P(A)$  为样本空间  $\Omega$  的试验结果数量  $N_A$  除以总观测数所得到的比例结果：

$$P(A) = N_A / \sum_i N_i \quad (1.1)$$

而且，一个试验所有可能事件的概率总和为 1。即有

$$\sum_A P(A) = 1 \quad (1.2)$$

对于一个离散随机变量  $X$ ，可从一个  $N$  个数的有限集  $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  的集合中任意取值。其中，每个结果  $x_i$  都可作为一个事件，且具有其发生的概率。例如，取变量“正( $H$ )”与“反( $T$ )”作为投掷硬币的结果，则有  $X = \{H, T\}$ 。在硬币均匀的前提下，有  $P(X=H) = P(X=T) = 0.5$ 。

当离散型随机变量  $X$  取  $x_i$  时，其概率  $P(X=x_i)$  称为概率质量函数 (Probability Mass Function, PMF)。存在两个随机变量  $X$  和  $Y$  时，当  $X$  取  $x_i$ 、 $Y$  取  $y_j$  时，它们输出结果的概率  $P(X=x_i, Y=y_j)$  称为联合概率质量函数。

根据条件概率质量函数和边缘概率质量函数，联合概率质量函数可表示为

$$P_{X,Y}(x_i, y_j) = P_{Y|X}(y_j | x_i) P_X(x_i) = P_{X|Y}(x_i | y_j) P_Y(y_j) \quad (1.3)$$

其中， $P_{Y|X}(y_j | x_i)$  为随机变量  $X$  取  $x_i$  的条件下，变量  $Y$  取  $y_j$  的条件概率。



随机变量  $X$  的边缘概率质量函数为

$$P_X(x_i) = \sum_{j=1}^M P_{X,Y}(x_i, y_j) = \sum_{j=1}^M P_{X|Y}(x_i | y_j) P_Y(y_j) \quad (1.4)$$

其中,  $M$  为离散随机变量  $Y$  空间内的值或结果的个数。

此外, 在求解条件概率时, 还可采用贝叶斯定理<sup>[4]</sup>求解。已知随机变量  $Y$  取  $y_j$  时的概率及随机变量  $X$  取  $x_i$  的概率, 则可从式 (1.3) 和式 (1.4) 中用贝叶斯定理求解条件概率质量函数为

$$P_{X|Y}(x_i | y_j) = \frac{P_{Y|X}(y_j | x_i) P_X(x_i)}{P_Y(y_j)} = \frac{P_{Y|X}(y_j | x_i) P_X(x_i)}{\sum_{i=1}^M P_{Y|X}(y_j | x_i) P_X(x_i)} \quad (1.5)$$

### 1.3.4 连续随机变量与随机过程及其概率密度函数

连续随机变量可假定为在一个非常小的范围内拥有无限数量的值。因此, 任何给定值的概率为无限小而趋近于零。对于连续随机变量  $X$ , 其累积分布函数 (Cumulant Distribution Function, CDF)  $F_X(x)$  定义为输出值小于  $x$  的概率:

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad (1.6)$$

其中,  $P(\cdot)$  表示概率。当随机变量  $X$  在以  $x$  为中心的邻域  $\Delta$  内取值时, 其概率为

$$\begin{aligned} P(x - \Delta/2 \leq X \leq x + \Delta/2) &= P(X \leq x + \Delta/2) - P(X \leq x - \Delta/2) \\ &= F_X(x + \Delta/2) - F_X(x - \Delta/2) \end{aligned} \quad (1.7)$$

对式 (1.7) 两边都除以  $\Delta$ , 且当  $\Delta$  趋近于 0 时, 可得概率密度函数为

$$f_X(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} [F_X(x + \Delta/2) - F_X(x - \Delta/2)] = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} \quad (1.8)$$

因  $F_X(x)$  随  $x$  递增, 故  $x$  的概率密度函数  $f_X(x)$  是一个非负函数, 即有  $f_X(x) \geq 0$ 。而且, 该函数在  $[-\infty, +\infty]$  区间的积分为 1, 即有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \quad (1.9)$$

此外, 条件概率函数、边缘概率函数及贝叶斯法则, 也适用于连续型变量的概率密度函数。

概率模型也可用于随机过程, 如语音、图像等。对于一个连续随机过程  $X(m)$ , 其最简概率模型为一维概率密度函数  $f_{X(m)}(x)$ , 即在随机过程  $X(m)$  中取一个样值  $x$  的概率密度函数。二维概率密度函数  $f_{X(m)X(m+n)}(x_1, x_2)$  则为随机过程分别在时刻  $m$  和  $m+n$  时取样值  $x_1$  和  $x_2$  的概率密度函数。