张宇数学教育系列丛书

2018

张宇考研数学
题源探析经典1000题

解析分册 · 数学二

张宇 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

张宇考研数学题源探析经典1000题

解析分册 · 数学二

张宇○主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学题源探析经典1000题. 解析分册. 数学二 / 张宇主编. — 北京 : 北京理工大学出版社, 2017.4(2017.7重印)

ISBN 978-7-5682-3938-7

Ⅰ. ①张… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第075972号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市文阁印刷有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米 1/16
印　　张 / 14.5
字　　数 / 362千字
版　　次 / 2017年4月第1版 2017年7月第2次印刷
定　　价 / 52.80元(共2册)

责任编辑 / 高　芳
文案编辑 / 胡　莹
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

Contents 目录

第一篇　高等数学

第二篇 线性代数

第一篇　高等数学

第 1 章　函数、极限、连续

A 组

一、选择题

1.1. (B) **【解析】** 若$\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$是无穷小，则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n\cdot\dfrac{1}{x_n}=0$，故(B) 正确.

若取$x_n=\dfrac{1}{n}$，$y_n=1$，则满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，且$\{x_n\}$在$n\to\infty$时是无穷小、有界、单调递减的，但$\{y_n\}$不是无穷小，排除(A)，(C)，(D).

1.2. (D) **【解析】** 令$g(x)=\varphi[\varphi(x)]$，注意$\varphi(x)$是奇函数，有

$$g(-x)=\varphi[\varphi(-x)]=\varphi[-\varphi(x)]=-\varphi[\varphi(x)]=-g(x),$$

因此$\varphi[\varphi(x)]$为奇函数. 同理可得$f[\varphi(x)]$，$f[f(x)]$，$\varphi[f(x)]$均为偶函数. 答案选(D).

1.3. (B) **【解析】** 注意在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内，$\sin x$是增函数，$\cos x$是减函数.

任取$x_1,x_2\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且$x_1<x_2$，有$\cos x_1>\cos x_2$，所以$\sin(\cos x_1)>\sin(\cos x_2)$，即$f(x)$是减函数；由于$\sin x_1<\sin x_2$，所以$\cos(\sin x_1)>\cos(\sin x_2)$，即$\varphi(x)$是减函数.

【注】 复合函数的单调性：若$f(x)$是增函数，$\varphi(x)$是减函数，则$f[f(x)]$，$\varphi[\varphi(x)]$是增函数，而$f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$是减函数.

1.4. (D) **【解析】** $f(-x)=\begin{cases}(-x)^2, & -x\leqslant 0,\\ (-x)^2+(-x), & -x>0\end{cases}=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ x^2-x, & x<0.\end{cases}$

1.5. (D) **【解析】** 如$\alpha(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$，$\beta(x)=x$，当$x\to 0$时，都是无穷小. 但$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在，故$\alpha(x)$和$\beta(x)$无法比较阶的高低.

1.6. (A) **【解析】** 对于任意给定的正数M，总存在点$x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，当$n>\dfrac{2M-\pi}{4\pi}$，使$|f(x_n)|=\left|2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right|>M$，故$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内无界.

(C) 错，对于任意给定的正数M，无论x取多么大的正数，总有$x_n=|2n\pi|>x$（只要$|n|>\dfrac{x}{2\pi}$），使$f(x_n)=x_n\sin x_n=0<M$，故当$x\to\infty$时$f(x)$不是无穷大. 千万不要将无穷大与无界混为一谈.

1.7. (C) **【解析】** 由题设可知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}}{x^3}\neq 0$，即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+bx)e^x-(1+ax)}{x^3(1+bx)}\neq 0$. 因为$x\to 0$

时，分母趋于零，所以$\lim\limits_{x\to 0}[be^x+(1+bx)e^x-a]=0$，得到$b+1-a=0$.

又假设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+bx)e^x-(1+ax)}{x^3(1+bx)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2b+1)e^x+bxe^x}{6x+12bx^2}$成立，则必须有$2b+1=0$，即$b=-\dfrac{1}{2}$，再结合$b+1-a=0$，得$a=\dfrac{1}{2}$.

1.8. (B) **【解析】** 令$\dfrac{1}{x}=t$，则$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\sin\frac{1}{x}}-1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\alpha}-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{\sin t}-1}{(1+t)[(1+t)^{\alpha-1}-1]}=\dfrac{1}{\alpha-1}(\alpha\neq 1)$.

1.9. (D) **【解析】** 设$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$，当$x\to 0$时为无界变量，不是无穷大. 令$g(x)=x$，当$x\to 0$时为无穷小，可排除(A). 设$x\to 0$时，令$f(x)=x^2,g(x)=\dfrac{1}{x}$可排除(B)，(C).

1.10. (B) **【解析】方法一** 若$f(x)+\sin x$在点x_0处连续，则
$$f(x)=[f(x)+\sin x]-\sin x$$
在点x_0处也连续，与已知矛盾.

方法二 排除法. 设$f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$则$f(x)$在点$x=0$处间断，$f(x)\sin x=0$在$x=0$处连续. 若设$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $f(x)$在点$x=0$处间断，但$f^2(x)=1$，$|f(x)|=1$在$x=0$处都连续. 故可排除(A)，(C)，(D).

二、填空题

1.11. $e^{\frac{1}{100}x^2}$ **【解析】** 当x充分大时，有重要关系：$e^{\alpha x}\gg x^{\beta}\gg \ln^{\gamma}x$，其中$\alpha,\beta,\gamma>0$，故本题填$e^{\frac{1}{100}x^2}$.

1.12. $\dfrac{1}{2}$ **【解析】** $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin 2x}=\dfrac{1}{2}$.

1.13. 0 **【解析】** $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$.

1.14. e^6 **【解析】** $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot 3x}{\sin x}\right\}=e^6$.

1.15. $-\dfrac{1}{6}$ **【解析】** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{(e^{x^2}-1)\ln(1-x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{6}x^3}{x^2(-x)}=-\dfrac{1}{6}$.

1.16. e^6 **【解析】** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x-2}\right)^{2x-1}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3(2x-1)}{x-2}\right\}=e^6$.

1.17. $\dfrac{1}{3}$；1 **【解析】** 当$x\to -1$时，
$$\sqrt[3]{x}+1\xlongequal{t=x+1}\sqrt[3]{t-1}+1=-(\sqrt[3]{1-t}-1)\sim -\left(-\frac{1}{3}t\right)=\frac{x+1}{3}.$$
故$A=\dfrac{1}{3},k=1$.

三、解答题

1.18.【解】 由 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & \frac{1}{e}<g(x)<1,\\ g(x), & 1\leqslant g(x)<e\end{cases}$ 得到 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & -1<x<0,\\ e^x, & 0\leqslant x<1.\end{cases}$

【注】在求 $f[g(x)]$ 时，既要把解析式 $f(x)$ 中的 x 都换为 $g(x)$，同时要把表示自变量变化范围中的 x 换为 $g(x)$，并由得到的不等式求出复合函数的自变量的变化范围.

1.19.【解】 当 $x\to 0$ 时，$\tan x\sim x,(1+\sin x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}\sin x\sim\frac{x}{n}$，故原极限 $=\frac{1}{n}$.

1.20.【解】 当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x, e^x-e^{-x}=e^{-x}(e^{2x}-1)\sim 2x$，故原极限 $=2$.

1.21.【解】 当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x^4)\sim x^4, 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2, 1-\cos\frac{x}{2}\sim\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{1}{8}x^2$，故原极限 $=\frac{1}{16}$.

1.22.【解】 这是"1^∞"型未定式极限，可用公式 $\lim\limits_{x\to 0}u^v=\exp\{\lim\limits_{x\to 0}v(u-1)\}$ 计算. 事实上 $\ln u=\ln[1+(u-1)]\sim u-1(u\to 1)$. 故原式 $=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+e^x-1}{x}\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{e^x-1}{x}\right)\right\}=e^2$.

1.23.【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{6}\sin^3 x\cdot x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{6}x^4}{x^4}=\frac{1}{6}$.

投命题者所好，当狗 $\to 0$ 时，狗 $-\sin$ 狗 $\sim\frac{1}{6}$ 狗^3.

1.24.【解】 当 $x\to 0$ 时，$e^{\tan x}-e^{\sin x}=e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)\sim\tan x-\sin x, x\sin^2 x\sim x^3$，故

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}\left(x\to 0\text{ 时}, \tan x\sim x, 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\right).\end{aligned}$$

1.25.【解】 $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}&=\exp\left\{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan x}{x}-1\right)\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan x-x}{x}\right)\right\}\\&=\exp\left\{\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x-x}{x^3}\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to 0^+}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}\right\}=e^{\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

根据海涅定理，取 $x=\frac{1}{n}$，则原式 $=e^{\frac{1}{3}}$.

1.26.【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}}=e^{-2}$.

1.27.【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)\cos^2 x}{\sin^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

1.28.【解】 $$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\frac{\sin x+x^2\sin\frac{1}{x}}{x}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+x\sin\frac{1}{x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

1.29.【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{a}{x}-\left(\frac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{a}{x}-\frac{1}{x^2}\ln(1+ax)\right]+0$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{ax - \ln(1+ax)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{a - \dfrac{a}{1+ax}}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{a^2 x}{2x(1+ax)} = \frac{a^2}{2}.$$

1.30.【解】 $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{x}{1+\ln x}} = \exp\left\{\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x\ln x}{1+\ln x}\right\} = \exp\left\{\lim\limits_{x \to 0^+} x\left(1 - \dfrac{1}{1+\ln x}\right)\right\} = \mathrm{e}^0 = 1.$

1.31.【解】 $\lim\limits_{x \to 0^+} (\cot x)^{\tan x} = \exp\{\lim\limits_{x \to 0^+} \tan x \ln(\cot x)\} = \exp\{\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(\cot x)\}$

$$= \exp\left\{\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(\cot x)}{\dfrac{1}{x}}\right\} = \exp\left\{\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{\sin x \cos x}\right\}$$

$$= \mathrm{e}^0 = 1.$$

1.32.【解】 原式 $= \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 - \cos x}{x(1 - \cos\sqrt{x})(1 + \sqrt{\cos x})} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\dfrac{1}{2}x^2}{x \cdot \dfrac{1}{2}x(1 + \sqrt{\cos x})} = \dfrac{1}{2}.$

1.33.【解】 为了在使用洛必达法则时使求导数变得简单，先做变量代换，令 $t = \dfrac{1}{x}$，从而

$$原式 = \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln(1+\mathrm{e}^{2t})}{\ln(1+\mathrm{e}^t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{2\mathrm{e}^{2t}}{1+\mathrm{e}^{2t}} \cdot \frac{1+\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t} = 2.$$

1.34.【解】 此题为“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式，若用洛必达法则，则

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \xlongequal{洛必达法则} \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} \xlongequal{洛必达法则} \lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}},$$

连续使用完两次法则，又回到了起点，法则失效，正确的做法是先对式子恒等变形.

分子分母同乘 e^{-x}，即 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}} = 1.$

1.35.【解】 原式 $= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x-\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}} + \sqrt{1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}} = 1.$

1.36.【解】 原式 $= \lim\limits_{x \to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} - \dfrac{1}{2}(1+2x)^{\frac{1}{2x}} \cdot \dfrac{2x - (1+2x)\ln(1+2x)}{x^2(1+2x)}\right],$

而 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)} = -\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2x - (1+2x)\ln(1+2x)}{x^2(1+2x)} = -1$，故原极限 $= \dfrac{\mathrm{e}}{2}.$

【注】有的读者会问，可以不用洛必达法则吗？当然可以. 请读者利用 B 组 1.50 的答案思考.

1.37.【证】 记数列 $\{y_k\}$ 为单调数列 $\{x_n\}$ 的收敛子数列，因为单调数列 $\{x_n\}$ 的子数列 $\{y_k\}$ 也一定是单调数列. 由于收敛的单调数列必有界，所以数列 $\{y_k\}$ 一定有界. 即存在实数 A 和 B，对一切 k 成立 $A < y_k < B$. 由于数列 $\{y_k\}$ 是单调数列 $\{x_n\}$ 的收敛子数列，所以存在 N，当 $n > N$ 时，有 $x_n \geqslant y_1$，则 $A < x_n < B$. 又根据单调有界数列必收敛的原理可知，数列 $\{x_n\}$ 必收敛.

1.38.【解】 不正确. 初等函数是指由常数及基本初等函数经有限次四则运算及有限次复合步骤所得到的，并用一个式子表示的函数. 分段函数虽用几个表达式表示，但并不能说肯定不能用一个表达式表示，因此，分段函数可能是初等函数，也可能不是初等函数，如 $\varphi(x) = |x|$，通常写成分段函数的形式 $|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$ 但也可以写成一个表达式 $|x| = \sqrt{x^2}$，所以函数 $\varphi(x) = |x|$ 是初等

函数. 而 $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\0, & x=0,\\-1, & x<0,\end{cases}$ 则不是初等函数.

【注】虽然有些分段函数是初等函数，但把它写成一个表达式时，无助于我们讨论它的性质，相反，常会给我们增加麻烦. 因此对于分段函数，除特殊需要外，通常我们没有必要去鉴别它是不是初等函数.

一般地，如果 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上是初等函数，$g(x)$ 在 $[c,b]$ 上是初等函数，且 $f(c)=g(c)$，那么分段函数 $\varphi(x)=\begin{cases}f(x), & a\leqslant x\leqslant c,\\g(x), & c<x\leqslant b\end{cases}$ 必是初等函数，因为这时 $\varphi(x)$ 可以写成一个表达式：

$$\varphi(x)=f\left(\frac{x-c-|x-c|}{2}+c\right)+g\left(\frac{x-c+|x-c|}{2}+c\right)-f(c), x\in[a,b].$$

1.39.【解】 显然 $f(0)$ 无意义.

当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+2}-1}{x^{2n}+1}=\begin{cases}-1, & 0<|x|<1,\\x^2, & |x|>1,\\0, & |x|=1,\end{cases}$

而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-1$，则 $x=0$ 为可去间断点.

$$f(1^-)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(-1)=-1, f(1^+)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}x^2=1,$$

则 $x=1$ 为跳跃间断点.

由于 $f(x)$ 是偶函数，则 $x=-1$ 也是跳跃间断点.

1.40.【解】 令 $x^n-t^n=u$，则 $F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{n}\int_0^{x^n}f(u)\mathrm{d}u$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{2n}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{nx^{2n}}\int_0^{x^n}f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{n}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)nx^{n-1}}{2nx^{2n-1}}=\frac{1}{2n}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)}{x^n}=\frac{f'(0)}{2n}.$$

1.41.【解】 $f(x)$ 无定义的点是使 $1-x=0$ 和 $1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}=0$ 的点，即 $x=1$ 和 $x=0$，所以 $f(x)$ 的连续区间为 $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$. 当 $x\to 0$ 时，$1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\to 0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$，所以 $x=0$ 是无穷间断点.

当 $x\to 1^-$ 时，$\dfrac{x}{1-x}\to+\infty$，$1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\to-\infty$，所以 $f(1^-)=0$，而当 $x\to 1^+$ 时，$\dfrac{x}{1-x}\to-\infty$，$1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\to 1$，所以 $f(1^+)=1$. 所以 $x=1$ 是跳跃间断点.

1.42.【证】 已知 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，令 $x_2=0$，则 $f(x_1)=f(x_1)+f(0)$，可得 $f(0)=0$，又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)=f(0)=0$，而 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x_0)+f(\Delta x)-f(x_0)=f(\Delta x)$，两边取极限得到 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)=0$，故函数 $f(x)$ 在任意点 x_0 处连续.

1.43.【解】 当 $k\leqslant 0$ 时，$I=-\infty$，极限不存在；

当 $k>0$ 时，$I\xlongequal[x=\frac{1}{t}]{\infty-\infty}\lim\limits_{t\to 0^+}\left[\left(\dfrac{1}{t^\alpha}+\dfrac{8}{t^4}+2\right)^k-\dfrac{1}{t}\right]$（注意 $\alpha\geqslant 5$）

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{(1+8t^{\alpha-4}+2t^\alpha)^k-t^{\alpha k-1}}{t^{\alpha k}}.$$

只有当 $\alpha k-1=0$，即 $k=\dfrac{1}{\alpha}$ 时，极限才为"$\dfrac{0}{0}$"型，否则极限为 ∞，不存在.

故 $$I=\lim_{t\to 0^+}\frac{(1+8t^{\alpha-4}+2t^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}-1}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{\alpha}(8t^{\alpha-4}+2t^{\alpha})}{t},$$

当 $\alpha=5$ 时，$I=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{5}\frac{(8t+2t^5)}{t}=\frac{8}{5}$，此时 $k=\frac{1}{5}$；

当 $\alpha>5$ 时，$I=0$，此时 $k=\frac{1}{\alpha}$.

B组

一、选择题

1.1. (D) **【解析】** 对于命题①，由数列收敛的定义可知，若数列$\{u_n\}$收敛于 A，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|u_n-A|<\varepsilon$，

则当 $n_i>N$ 时，恒有

$$|u_{n_i}-A|<\varepsilon,$$

因此数列$\{u_{n_i}\}$也收敛于 A，可知命题正确.

对于命题②，不妨设数列$\{x_n\}$为单调递增的，即

$$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant\cdots,$$

其中某一给定子数列$\{x_{n_i}\}$收敛于 A，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，当 $n_i>N$ 时，恒有

$$|x_{n_i}-A|<\varepsilon.$$

由于数列$\{x_n\}$为单调递增的数列，对于任意的 $n>N$，必定存在 $n_i\leqslant n\leqslant n_{i+1}$，有

$$-\varepsilon<x_{n_i}-A\leqslant x_n-A\leqslant x_{n_{i+1}}-A<\varepsilon,$$

从而 $$|x_n-A|<\varepsilon,$$

可知数列$\{x_n\}$收敛于 A. 因此命题正确.

对于命题③，因 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=A$，由极限的定义可知，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，必定存在自然数 N_1,N_2：

当 $2n>N_1$ 时，恒有 $|x_{2n}-A|<\varepsilon$；

当 $2n+1>N_2$ 时，恒有 $|x_{2n+1}-A|<\varepsilon$.

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，总有 $|x_n-A|<\varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. 可知命题正确.

故答案选择(D).

1.2. (C) **【解析】** 令 $u(x)=\frac{2}{x}$，$v(x)=\frac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时可排除(A)；令 $u(x)=v(x)=\frac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时可排除(B)；令 $u(x)=\frac{1}{x}$，$v(x)=-\frac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时可排除(D).

1.3. (A) **【解析】** 有限个无穷小的和、差、积、绝对值还是无穷小.

1.4. (A) **【解析】** 不妨设 $f(x)$ 单调递增，且 $|f(x)|\leqslant M$，对任一点 $x_0\in(a,b)$，当 $x\to x_0^-$ 时，$f(x)$ 随着 x 增加而增加且有上界，故 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 存在；当 $x\to x_0^+$ 时，$f(x)$ 随着 x 减小而减小且有下界，故 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在，故 x_0 只能是第一类间断点.

1.5. (C) **【解析】** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^x}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}-e^x}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\left[e^{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}-1\right]}{x^n}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}-1}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^n}=C\neq 0,$$

则 $n=3$ 时，$C=\frac{1}{3}$.

1.6. (A) 【**解析**】由泰勒公式 $\sin ax=ax-\frac{1}{6}a^3x^3+o(x^3)(x\to 0)$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-a)x+\frac{1}{6}a^3x^3+o(x^3)}{-bx^3}=1,$$

解得 $a=1,-\frac{1}{6b}=1$，即 $a=1,b=-\frac{1}{6}$.

1.7. (C) 【**解析**】由于$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3ax^2+b}{(e^{\sin^2 x}-1)\cos x}$，当 $b\neq 0$ 时，该极限为 ∞，于是 $b=0$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{3ax^2+b}{(e^{\sin^2 x}-1)\cos x}\xlongequal{\text{等价无穷小代换}}\lim_{x\to 0}\frac{3ax^2}{\sin^2 x}=3a=1\Rightarrow a=\frac{1}{3}.$$

1.8. (D) 【**解析**】若 $\lambda>0$，则必存在一个 x 使得 $\lambda-e^{-kx}=0$，即分母为 0，矛盾，故 $\lambda\leqslant 0$；又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，故 $k>0$.

1.9. (D) 【**解析**】因为

$$f(x)=\ln\frac{1+x^2}{1+\sin^2 x}=\ln\left(1+\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\right)\sim\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\sim x^2-\sin^2 x(x\to 0).$$

又

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^{n-1}}=2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(n-1)x^{n-2}}$$

$$\xlongequal{\text{当 } n=4}2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3},$$

因此 $n=4$.

【**注**】更希望读者看出：$x^2-\sin^2 x=(x+\sin x)(x-\sin x)\sim 2x\cdot\frac{1}{6}x^3=\frac{1}{3}x^4(x\to 0)$，这样便可直接得出答案.

1.10. (D) 【**解析**】由 $f(x)$ 的表达式可知 $x=0,x=1$ 为其间断点.

$x\to 1^+,x-1\to 0^+,\frac{x}{x-1}\to+\infty,e^{\frac{x}{x-1}}\to+\infty,f(x)\to 0$；

$x\to 1^-,x-1\to 0^-,\frac{x}{x-1}\to-\infty,e^{\frac{x}{x-1}}\to 0,f(x)\to-1$；

$x\to 0^+,\frac{x}{x-1}\to 0^-,e^{\frac{x}{x-1}}-1\to 0^-,f(x)\to-\infty$；

$x\to 0^-,\frac{x}{x-1}\to 0^+,e^{\frac{x}{x-1}}-1\to 0^+,f(x)\to+\infty$.

故 $x=1$ 是第一类间断点，$x=0$ 是第二类间断点，选(D).

1.11. (C) 【**解析**】$f_2(x)=f_1[f_1(x)]=\frac{f_1(x)}{\sqrt{1+[f_1(x)]^2}}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$,

设

$$f_k(x)=\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}(k\geqslant 1),$$

则
$$f_{k+1}(x)=f_1[f_k(x)]=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+kx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}},$$

因此对任意 $n\geqslant 1$,有 $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$,故选(C).

二、填空题

1.12. na **【解析】**令 $x=-1$,则 $f(1)=f(-1)+f(2)$,因 $f(x)$ 是奇函数,得到 $f(2)=f(1)-f(-1)=2f(1)=2a$.再令 $x=1$,则 $f(3)=f(1)+f(2)=3f(1)=3a$,现用数学归纳法证明 $f(n)=na$.

当 $n=1,2,3$ 时,已知或者已证.假设 $n=k$ 时,有 $f(k)=ka$.当 $n=k+1$ 时,$f(k+1)=f(k-1)+f(2)=(k-1)a+2a=(k+1)a$,故对一切正整数 n,有 $f(n)=na$,令 $x=0$,则 $f(2)=f(0)+f(2)$,即 $f(0)=0=0\cdot a$,又 $f(x)$ 是奇函数,故对一切负整数 n 有 $f(n)=-f(-n)=-(-na)=na$.所以对一切整数 n,均有 $f(n)=na$.

1.13. 1 **【解析】**$\lim\limits_{x\to 0^+}e^x(\sin x+\cos x)=1$,$\lim\limits_{x\to 0^-}(2x+a)=a$.由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,可得
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=1=\lim_{x\to 0^-}f(x)=a.$$

1.14. $5;\dfrac{1}{4^5}$ **【解析】**原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{3}{x}\right)\left(1-\frac{4}{x}\right)\left(1-\frac{5}{x}\right)}{\left(4-\frac{1}{x}\right)^{\alpha}}x^{5-\alpha}$
$$=4^{-\alpha}\cdot\lim_{x\to\infty}x^{5-\alpha}=\beta>0,$$
所以 $\alpha=5,\beta=\dfrac{1}{4^5}$.

1.15. $-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ **【解析】**$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x})(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}{(x+2)(x-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$
$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\lim_{x\to 1}\frac{2(1-x)}{x-1}=-\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

1.16. 2 **【解析】**$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=2.$$

1.17. -3 **【解析】**当 $x\to 0$ 时,
$$\ln\frac{1-ax^2}{1+ax^2}=\ln\left(1-\frac{2ax^2}{1+ax^2}\right)\sim-\frac{2ax^2}{1+ax^2}\sim-2ax^2,$$
$$\frac{1}{10\,000}x^4+\sin^2(\sqrt{6}x)\sim\sin^2(\sqrt{6}x)\sim 6x^2,$$
故 $a=-3$.

1.18. $-\dfrac{2}{9};2$ **【解析】**$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\cos\frac{2x}{3}\right)}{Ax^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\cos\frac{2x}{3}-1\right)}{Ax^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\frac{2x}{3}-1}{Ax^k}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\left(\frac{2x}{3}\right)^2}{2}}{Ax^k} = -\frac{2}{9}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{Ax^k} = 1,$$

则 $k=2, -\frac{2}{9A}=1$,即 $A=-\frac{2}{9}$.

1.19. $-\frac{1}{32}$;2 【解析】当 $x\to\pi$ 时,

$$\sqrt[4]{\sin\frac{x}{2}}-1=\sqrt[4]{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)}-1=\sqrt[4]{1+\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)-1\right]}-1$$

$$\sim\frac{1}{4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)-1\right]$$

$$\sim\frac{1}{4}\cdot\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2\right]=-\frac{1}{32}(x-\pi)^2.$$

故 $A=-\frac{1}{32}, k=2$.

三、解答题

1.20.【解】本题考查分段函数的复合方法. 下面用解析法求解.

首先,广义化为 $f[g(x)]=\begin{cases}[g(x)]^2-1, & g(x)\leqslant 0,\\ \ln g(x), & g(x)>0.\end{cases}$

由 $g(x)$ 的表达式知,

当 $g(x)\leqslant 0$,即$\{2e^x-1\leqslant 0\}\cap\{x\leqslant 0\}$或$\{x^2-1\leqslant 0\}\cap\{x>0\}$,而

$$\{2e^x-1\leqslant 0\}\cap\{x\leqslant 0\}=\{x\leqslant -\ln 2\}\cap\{x\leqslant 0\}=\{x\leqslant -\ln 2\},$$

$$\{x^2-1\leqslant 0\}\cap\{x>0\}=\{-1\leqslant x\leqslant 1\}\cap\{x>0\}=\{0<x\leqslant 1\}.$$

当 $g(x)>0$,即$\{2e^x-1>0\}\cap\{x\leqslant 0\}$或$\{x^2-1>0\}\cap\{x>0\}$,而

$$\{2e^x-1>0\}\cap\{x\leqslant 0\}=\{x>-\ln 2\}\cap\{x\leqslant 0\}=\{-\ln 2<x\leqslant 0\},$$

$$\{x^2-1>0\}\cap\{x>0\}=\{x>1 \text{ 或 } x<-1\}\cap\{x>0\}=\{x>1\}.$$

综上,得 $f[g(x)]=\begin{cases}(2e^x-1)^2-1, & x\leqslant -\ln 2,\\ \ln(2e^x-1), & -\ln 2<x\leqslant 0,\\ (x^2-1)^2-1, & 0<x\leqslant 1,\\ \ln(x^2-1), & x>1.\end{cases}$

1.21.【解】因为 $$(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}>(3^n)^{\frac{1}{n}}=3,$$

又 $$(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}<(3\cdot 3^n)^{\frac{1}{n}}=3\cdot 3^{\frac{1}{n}}, \lim_{n\to\infty}3\cdot 3^{\frac{1}{n}}=3,$$

由夹逼准则,得 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$.

1.22.【解】这是“$\infty-\infty$”型未定式极限,首先通分变成“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式,然后使用洛必达法则求极限.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{3xe^x+x^2e^x}{e^x+xe^x-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3e^x+5xe^x+x^2e^x}{2e^x+xe^x}=\frac{3}{2},$$

或利用等价无穷小代换 $e^x-1\sim x(x\to 0)$,则

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3xe^x+x^2e^x}{2x}=\frac{3}{2}.$$

【注】典型错误：$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x+xe^x}{x}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+xe^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}(2e^x+xe^x)=2.$ 等价无穷小代换只能在乘除运算时使用，不能在加减运算时使用.

1.23.【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n$ 是"1^∞"型未定式极限，可以使用洛必达法则求极限，也可以凑成第二个重要极限，还可以利用等价无穷小代换.

方法一 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left[\frac{x-2ax+1}{x(1-2a)}\right]^x=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left[1+\frac{1}{x(1-2a)}\right]\left(令\frac{1}{x}=t\right)$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{1-2a}\right)}{t}\xlongequal{洛必达法则}\lim_{t\to0^+}\frac{1}{1+\frac{t}{1-2a}}\cdot\frac{1}{1-2a}=\frac{1}{1-2a}.$$

方法二 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n=\ln\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n\right\}$

$$=\ln\left\{\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)\cdot\frac{1}{1-2a}}\right\}=\ln e^{\frac{1}{1-2a}}=\frac{1}{1-2a}.$$

方法三 $\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]\sim\frac{1}{n(1-2a)}(n\to\infty)$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}n\frac{1}{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}.$$

1.24.【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x(1-\cos x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x\cdot(1-\cos x)}{x(1-\cos x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}=\frac{1}{2}.$$

1.25.【解】 当 $x=0$，原式 $=1$；

当 $x\neq0$ 时，原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\cdots$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$