



学数学丛书



平行线教育  
Parallel Education

# 解析几何

## 竞赛读本

蔡玉书 编著

中国科学技术大学出版社



学数学丛书

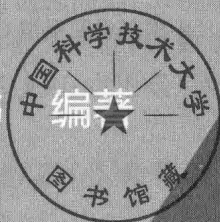


平行线教育  
Parallel Education

# 解析几何

## 竞赛读本

蔡玉书



中国科学技术大学出版社

## 内 容 简 介

全书详细介绍数学联赛中解析几何的题型和解题方法. 解析几何的基本内容包括: 直线和圆、圆锥曲线、参数方程和极坐标、轨迹问题、圆锥曲线的切线和极线问题; 基本题型包括: 圆锥曲线性质的研究、圆锥曲线的最值问题; 解题技巧包括: 平面几何性质的使用、圆锥曲线有关直径性质的使用、点差法的使用、两条直线合成技巧的使用、曲线系方程的使用. 本书还对解析几何中一般圆锥曲线的性质进行了深入研究, 这些可以用于命题研究和试题研究. 作为本书的新亮点, 第 10 章对平面几何竞赛试题的解析法证明进行了充分的展示.

本书内容丰富, 方法多样, 习题充足, 可作为参加全国高中数学联赛的中学生复习解析几何的首选用书, 也可作为广大数学奥林匹克教练员进行高中数学联赛考前辅导的教材, 或高等院校数学系本科生和研究生选修数学竞赛的参考书.

## 图书在版编目(CIP)数据

解析几何竞赛读本/蔡玉书编著. —合肥: 中国科学技术大学出版社, 2017. 8  
(学数学丛书)

ISBN 978-7-312-04060-3

I. 解… II. 蔡… III. 几何课—中学—题解 IV. G634.635

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 044908 号

出版 中国科学技术大学出版社  
安徽省合肥市金寨路 96 号, 230026  
<http://press.ustc.edu.cn>  
<https://zgkxjsdxcb.tmall.com>  
印刷 安徽国文彩印有限公司  
发行 中国科学技术大学出版社  
经销 全国新华书店  
开本 787 mm×1092 mm 1/16  
印张 21.5  
字数 550 千  
版次 2017 年 8 月第 1 版  
印次 2017 年 8 月第 1 次印刷  
定价 58.00 元

# 前 言

历时两年多的写作,这本《解析几何竞赛读本》终于和大家见面了.

这本书姗姗来迟有两方面原因:首先,本人平时教学任务繁重,既是中学特级教师,又是教授级中学高级教师,学校的工作量一直饱满,有两个班的教学任务,用来写作的时间不是太多.其次,想把书做得精巧需要一定的时间做保证,需要收集整理资料.尤其是第8章“圆锥曲线统一直角坐标方程的应用”,是通过研究大量中学数学期刊与推广命题后编写而成的,需要对这些命题进行系统的证明.第10章“平面几何问题解析法证明”中的例题、练习题大多数选自《中等数学》增刊《国内外数学竞赛试题汇编》,这些题目都是国家级数学奥林匹克试题,有很大的难度,由于原来的解答都采用平面几何证明方法,现在要用解析法证明,每道试题都需要亲自演算,耗费大量时间.

单墀教授在《解析几何的技巧》一书前言中这样写道:

“几何难!”

很多人都有这样的感慨.

感谢笛卡儿创立了解析几何,为解决几何问题开辟了一条康庄大道.

可是仍有不少人不乐意采用这一方法,原因之一是他们觉得解析几何“繁”.其实,真正掌握了技巧,许多问题用解析几何来解不但不“繁”,而且解答井井有条,十分优雅.

本书的选材大多数来自数学竞赛试题,部分试题是经典高考解析几何试题的推广,希望能给喜欢数学的朋友提供一些素材.全书共分10章,每章可以独立成文,部分内容在《数学通讯》《中学数学月刊》和《中等数学》上发表过,可供数学竞赛专题讲座使用.本书最后的附录提供了各章练习题的具体解答,供读者参考使用.

由于时间所限,书中疏漏、不足之处在所难免,欢迎广大读者指正(作者邮箱:caiyushu19631981@sina.com).对此,谨致以诚挚的谢意!

蔡玉书

2017年5月于苏州正谊书院

# 目 录

|                             |         |
|-----------------------------|---------|
| 前言 .....                    | ( i )   |
| 第 1 章 直线和圆 .....            | ( 1 )   |
| 例题选讲 .....                  | ( 1 )   |
| 练习题 .....                   | ( 8 )   |
| 第 2 章 圆锥曲线 .....            | ( 12 )  |
| 例题选讲 .....                  | ( 12 )  |
| 练习题 .....                   | ( 28 )  |
| 第 3 章 圆锥曲线参数方程的应用 .....     | ( 34 )  |
| 例题选讲 .....                  | ( 34 )  |
| 练习题 .....                   | ( 43 )  |
| 第 4 章 圆锥曲线极坐标方程的应用 .....    | ( 45 )  |
| 例题选讲 .....                  | ( 45 )  |
| 练习题 .....                   | ( 51 )  |
| 第 5 章 解析几何中的轨迹问题 .....      | ( 54 )  |
| 例题选讲 .....                  | ( 54 )  |
| 练习题 .....                   | ( 64 )  |
| 第 6 章 解析几何中的最值问题 .....      | ( 68 )  |
| 例题选讲 .....                  | ( 68 )  |
| 练习题 .....                   | ( 79 )  |
| 第 7 章 圆锥曲线中与切线相关的问题 .....   | ( 84 )  |
| 例题选讲 .....                  | ( 85 )  |
| 练习题 .....                   | ( 95 )  |
| 第 8 章 圆锥曲线统一直角坐标方程的应用 ..... | ( 99 )  |
| 例题选讲 .....                  | ( 99 )  |
| 练习题 .....                   | ( 118 ) |
| 第 9 章 解析几何解题技巧的研究 .....     | ( 122 ) |
| 例题选讲 .....                  | ( 122 ) |
| 练习题 .....                   | ( 132 ) |
| 第 10 章 平面几何问题解析法证明 .....    | ( 135 ) |
| 例题选讲 .....                  | ( 135 ) |

---

|               |       |
|---------------|-------|
| 练习题 .....     | (151) |
| 附录 习题解答 ..... | (166) |
| 第 1 章 .....   | (166) |
| 第 2 章 .....   | (181) |
| 第 3 章 .....   | (204) |
| 第 4 章 .....   | (214) |
| 第 5 章 .....   | (220) |
| 第 6 章 .....   | (232) |
| 第 7 章 .....   | (258) |
| 第 8 章 .....   | (274) |
| 第 9 章 .....   | (285) |
| 第 10 章 .....  | (294) |
| 参考文献 .....    | (336) |

# 第1章 直线和圆

解析几何是中学阶段的重要内容,直线和圆是解析几何的基础.竞赛中直线和圆部分主要涉及一些证明和最值问题.

## 例题选讲

**例1** 已知  $k \in (0, 4)$ , 直线  $l_1: kx - 2y - 2k + 8 = 0$ ,  $l_2: 2x + k^2y - 4k^2 - 4 = 0$  与两坐标轴围成一个四边形. 问当  $k$  为何值时, 四边形面积有最小值? (2007 年陕西省数学竞赛试题)

**解析** 直线  $l_1: kx - 2y - 2k + 8 = 0$  的斜率大于 0, 并且恒过定点  $P(2, 4)$ , 与  $y$  轴交于  $B(0, 4 - k)$ , 直线  $l_2: 2x + k^2y - 4k^2 - 4 = 0$  的斜率小于 0, 并且也恒过定点  $P(2, 4)$ , 与  $x$  轴交于  $A(2k^2 + 2, 0)$ , 如图 1.1 所示, 四边形  $OAPB$  的面积为

$$S = \frac{1}{2} \times (2k^2 + 2) \times 4 + \frac{1}{2} \times (4 - k) \times 2 = 4k^2 - k + 8 = 4\left(k - \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{127}{16}$$

所以, 当  $k = \frac{1}{8}$  时, 四边形  $OAPB$  的面积取最小值  $\frac{127}{16}$ .

**例2** 已知直线  $l_1: y = 4x$  和点  $P(6, 4)$ . 在直线  $l_1$  上求一点  $Q$ , 使过  $P, Q$  的直线与  $l_1$  以及  $x$  轴在第一象限内所围成的三角形的面积最小. (1978 年全国高中数学联赛试题)

**解析** 如图 1.2 所示, 设  $Q$  点坐标为  $(x_1, y_1)$ , 则  $y_1 = 4x_1$ , 过  $P, Q$  的直线  $l_2$  的方程为  $\frac{y-4}{4x_1-4} = \frac{x-6}{x_1-6}$ , 直线  $l_2$  与  $x$  轴的交点  $M$  的坐标为  $(\frac{5x_1}{x_1-1}, 0)$ .

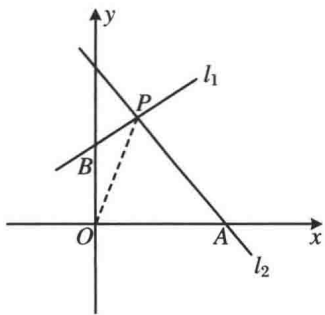


图 1.1

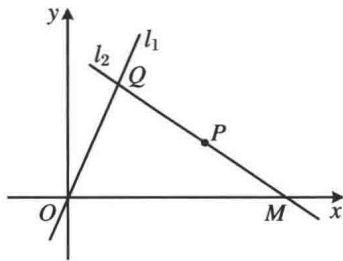


图 1.2



$\triangle OMQ$  的面积为

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{5x_1}{x_1 - 1} \cdot 4x_1 = \frac{10x_1^2}{x_1 - 1} \quad ①$$

(解法一)由式①得  $10x_1^2 - Sx_1 + S = 0$ .

要使此方程有实根,则  $S^2 - 40S \geq 0$ , 即  $S \geq 40$ .

当  $S = 40$  时,  $x_1 = 2$ . 即  $x_1 = 2$  时,  $S$  达到最小值.

故所求  $Q$  点坐标为  $(2, 8)$ .

(解法二)  $S = 10 \left[ (x_1 - 1) + \frac{1}{x_1 - 1} \right] + 20 \geq 10 \times 2 + 20 = 40 (x_1 > 1)$ . 当且仅当  $x_1 - 1 = 1$ , 即  $x_1 = 2$  时等号成立. 此时  $Q$  点坐标为  $(2, 8)$ .

(解法三)  $S = \frac{10x_1^2}{x_1 - 1} = \frac{10}{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_1^2}} = \frac{10}{-\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \geq 40$ , 当  $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{2}$  时  $S = 40$ . 即  $x_1 = 2$

时,  $S$  取最小值 40, 此时  $Q$  点坐标为  $(2, 8)$ .

**注** 本题有一个重要的几何背景, 它隐藏着下面的面积最小值定理: 已知过  $\angle AOB$  内一个定点  $M$  作直线  $l$ , 分别与  $OA$ 、 $OB$  交于  $C$ 、 $D$ , 则当  $M$  为  $CD$  的中点时,  $\triangle COD$  面积最小.

利用这个定理可以轻松解决例 2. 这个定理的证明方法也有多种, 留给读者考虑.

### 例 3

如图 1.3 所示, 将一块直角三角形板  $ABO$  放置于平面直角坐标系中, 已知  $AB$

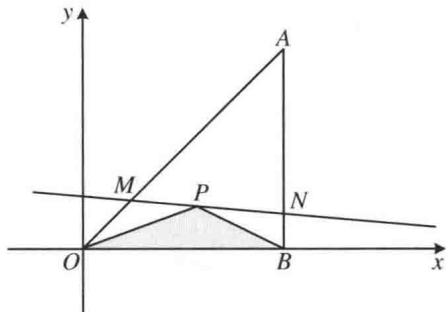


图 1.3

$= BO = 2$ , 且  $AB \perp OB$ . 点  $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$  是三角形板内一点, 现因三角形板中阴影部分 (即  $\triangle POB$ ) 受到损坏, 要把损坏部分锯掉, 可用经过点  $P$  的任一直线  $MN$  将三角板  $ABO$  锯成  $\triangle AMN$ , 设直线  $MN$  的斜率为  $k$ .

(1) 试用  $k$  表示  $\triangle AMN$  的面积  $S$ , 并指出  $k$  的取值范围;

(2) 试求  $S$  的最大值. (2006 年广州市数学竞赛试题)



**解析** (1) 直线  $MN$  的方程是  $y = k(x - 1) + \frac{1}{2}$ , 直线  $OA$  的方程是  $y = x$ , 解得

$$N\left(2, k + \frac{1}{2}\right), M\left(\frac{\frac{1}{2} - k}{1 - k}, \frac{\frac{1}{2} - k}{1 - k}\right). \text{ 于是 } |AN| = \frac{3}{2} - k, |AM| = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{3}{2} - k\right)}{1 - k}.$$

所以

$$S = \frac{1}{2} |AN| \cdot |AM| \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - k\right) \cdot \frac{\sqrt{2}\left(\frac{3}{2} - k\right)}{1 - k} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(3 - 2k)^2}{8(1 - k)}$$

易知  $-\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}$ . 故

$$S = \frac{(3 - 2k)^2}{8(1 - k)} \quad \left(-\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}\right)$$



(2)  $S' = \frac{(3-2k)(2k-1)}{8(1-k)^2}$ , 所以当  $k = \frac{1}{2}$  或  $k = \frac{3}{2}$  时,  $S = f(k) = \frac{(3-2k)^2}{8(1-k)}$  取得极值.

因为当  $-\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}$  时,  $S' < 0$ , 故  $S = f(k)$  在  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  上是减函数, 所以当  $k = -\frac{1}{2}$

时,  $S$  取得最大值  $\frac{4}{3}$ .

**例4** 如图 1.4 所示, 已知  $P(2, 1)$ , 过点  $P$  作直线  $l$  与  $x$  轴、 $y$  轴正半轴分别交于  $A$ 、 $B$  两点, 求使  $\triangle AOB$  ( $O$  为坐标原点) 的周长最小的直线  $l$  的方程. (2007 年吉林省数学竞赛试题)

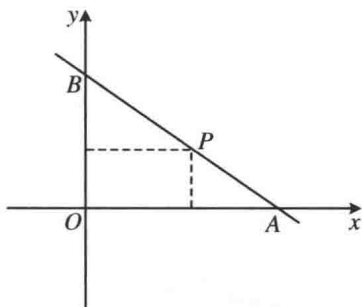


图 1.4

**解析** 设  $\angle BAO = \theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ),  $t = \tan \frac{\theta}{2} \in$

$(0, 1)$ . 则  $\triangle AOB$  的周长为

$$s = (2 + \cot \theta) + (1 + 2 \tan \theta) + \left( \frac{1}{\sin \theta} + \frac{2}{\cos \theta} \right) = 6 + \frac{1-t}{t} + \frac{4t}{1-t} \geq 10$$

当且仅当  $\frac{1-t}{t} = \frac{4t}{1-t}$ , 即  $t = \tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{3}$  时, 等号成立.

直线  $l$  的斜率为  $k = -\tan \theta = -\frac{3}{4}$ , 所以直线  $l$  的方程是  $3x + 4y - 10 = 0$ .

**注** 本题的最值可以用导数考虑, 这样技巧性就没有上面解法强, 请读者考虑.

**例5** 已知圆  $C: (x-2)^2 + (y-2)^2 = m$ , 点  $A(4, 6)$  和点  $B(s, t)$ .

(1) 若  $3s - 4t = -12$ , 且直线  $AB$  被圆  $C$  截得的弦长为 4, 求  $m$  的值;

(2) 若  $s, t$  是正整数, 且圆  $C$  上任意一点到点  $A$  的距离与到点  $B$  的距离之比为定值  $\lambda$  ( $\lambda > 1$ ), 求  $m$  的值. (2012 年福建省数学竞赛试题)

**解析** (1) 因为  $3 \times 4 - 4 \times 6 = -12$ , 且  $3s - 4t = -12$ , 所以直线  $AB$  的方程为  $3x - 4y = -12$ , 即  $3x - 4y + 12 = 0$ .

因为直线  $AB$  被圆  $C$  截得的弦长为 4, 且圆心  $C$  到直线  $AB$  的距离为  $d = \frac{|6 - 8 + 12|}{5} =$

2, 所以圆半径  $r = 2\sqrt{2}$ , 故  $m = 8$ .

(2) 设  $P(x, y)$  为圆  $C$  上任意一点, 由条件知

$$\frac{\sqrt{(x-4)^2 + (y-6)^2}}{\sqrt{(x-s)^2 + (y-t)^2}} = \lambda \quad (\lambda > 1)$$

即

$$(\lambda^2 - 1)x^2 + (\lambda^2 - 1)y^2 - 2(\lambda^2 s - 4)x - 2(\lambda^2 t - 6)y + \lambda^2(s^2 + t^2) - 52 = 0 \quad ①$$

由点  $P$  为圆  $C$  上任意一点知, 方程①表示的轨迹与圆  $C$  是同一曲线. 所以

$$\frac{\lambda^2 s - 4}{\lambda^2 - 1} = 2, \quad \frac{\lambda^2 t - 6}{\lambda^2 - 1} = 2, \quad \frac{\lambda^2(s^2 + t^2) - 52}{\lambda^2 - 1} = 8 - m$$

因此

$$s = 2 + \frac{2}{\lambda^2}, \quad t = 2 + \frac{4}{\lambda^2}, \quad m = 8 - \frac{\lambda^2(s^2 + t^2) - 52}{\lambda^2 - 1}$$

由  $\lambda > 1$  知,  $2 < s < 4$ . 结合  $s$  为正整数知,  $s = 3, \lambda = \sqrt{2}$ . 因此,  $t = 4, m = 10$ .

**例 6**

如图 1.5 所示, 已知圆  $C: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$ , 过原点  $O$  作圆  $C$  的两条切线  $OA$ 、 $OB$ , 切点依次为  $A$ 、 $B$ , 过原点  $O$  引直线  $l$  交圆  $C$  于  $D$ 、 $E$  两点, 交直线  $AB$  于点  $F$ .

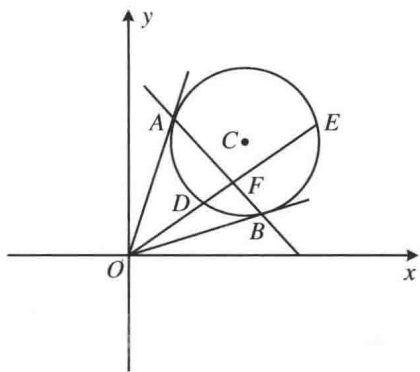


图 1.5

(1) 求直线  $AB$  的方程;

(2) 求证:  $\frac{1}{|OD|} + \frac{1}{|OE|} = \frac{2}{|OF|}$ . (2009 年福建省数学竞赛试题)



**解析** (1) 因为  $OA$ 、 $OB$  是圆  $C$  的两条切线, 且  $A$ 、 $B$  为切点, 所以点  $A$ 、 $B$  在以  $OC$  为直径的圆上, 即点  $A$ 、 $B$  在圆  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$  上.

点  $A$ 、 $B$  又在圆  $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$  上, 将上面两式相减得直线  $AB$  的方程为  $x + y - 3 = 0$ .

(2) 设直线  $l$  的方程为  $y = kx (k > 0)$ .

由  $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ y = kx \end{cases}$  得  $x_F = \frac{3}{1+k}$ ,  $|OF| = \sqrt{1+k^2} |x_F - 0| = \frac{3\sqrt{1+k^2}}{1+k}$ , 所以

$$\frac{2}{|OF|} = \frac{2(1+k)}{3\sqrt{1+k^2}}$$

由

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2 \\ y = kx \end{cases}$$

得

$$(1+k^2)x^2 - 4(1+k)x + 6 = 0$$

设  $D(x_1, y_1)$ 、 $E(x_2, y_2)$ , 则

$$x_1 + x_2 = \frac{4(1+k)}{1+k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{6}{1+k^2}$$

$$|OD| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - 0|, \quad |OE| = \sqrt{1+k^2} |x_2 - 0|$$

显然  $x_1 > 0, x_2 > 0$ , 所以

$$\frac{1}{|OD|} + \frac{1}{|OE|} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}x_1} + \frac{1}{\sqrt{1+k^2}x_2} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{2(1+k)}{3\sqrt{1+k^2}}$$

于是,  $\frac{1}{|OD|} + \frac{1}{|OE|} = \frac{2}{|OF|}$ .

**注** 命题可以直接用平面几何方法考虑, 请读者完成.

**例 7**

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知  $\odot C_1$  与  $\odot C_2$  交于  $P$ 、 $Q$  两点, 点  $P$  的坐标为  $(3, 2)$ , 两圆半径的乘积为  $\frac{13}{2}$ . 若  $\odot C_1$  和  $\odot C_2$  均与直线  $l: y = kx$  及  $x$  轴相切, 求直线  $l$  的方程. (2011 年山东省数学竞赛试题)



**解析** 由题意得  $O$ 、 $C_1$ 、 $C_2$  三点共线.

设  $\odot C_1$  与  $\odot C_2$  的半径分别为  $r_1$ 、 $r_2$ , 直线  $C_1 C_2$  的斜率为  $\tan \alpha \neq 0$ .

令  $m = \cot \alpha$ , 则  $C_1(mr_1, r_1)$ 、 $C_2(mr_2, r_2)$ , 两圆的方程分别为

$$(x - mr_1)^2 + (y - r_1)^2 = r_1^2$$

$$(x - mr_2)^2 + (y - r_2)^2 = r_2^2$$

因为  $P(3,2)$  是两圆的公共点, 所以

$$(3 - mr_1)^2 + (2 - r_1)^2 = r_1^2$$

$$(3 - mr_2)^2 + (2 - r_2)^2 = r_2^2$$

由此知  $r_1, r_2$  是方程  $m^2 r^2 - 2(3m+2)r + 13 = 0$  的两个根, 即有  $r_1 r_2 = \frac{13}{m^2}, m = \sqrt{2}$ .

从而, 直线  $l$  的方程为

$$y = x \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \cdot x = 2\sqrt{2}x$$

**例 8** 设  $\odot O_1, \odot O_2$  相交于  $A, B$  两点,  $\odot O_3$  分别与  $\odot O_1, \odot O_2$  外切于点  $C, D$ , 直线  $EF$  分别与  $\odot O_1, \odot O_2$  相切于点  $E, F$ , 直线  $CE$  与直线  $DF$  相交于点  $G$ . 证明:  $A, B, G$  三点共线. (2008 年安徽省数学竞赛试题)

**证明** 以  $EF$  为  $x$  轴,  $O_1 E$  为  $y$  轴, 建立直角坐标系. 设  $E(0,0), F(c,0)$ , 则

$$\odot O_1: x^2 + (y - r_1)^2 = r_1^2 \quad (1)$$

$$\odot O_2: (x - c)^2 + (y - r_2)^2 = r_2^2 \quad (2)$$

$$\odot O_3: (x - a)^2 + (y - b)^2 = r_3^2 \quad (3)$$

其中  $a, b$  满足

$$\begin{cases} a^2 + (b - r_1)^2 = (r_1 + r_3)^2 \\ (a - c)^2 + (b - r_2)^2 = (r_2 + r_3)^2 \end{cases} \quad (4)$$

$$(a - c)^2 + (b - r_2)^2 = (r_2 + r_3)^2 \quad (5)$$

于是①-②得直线  $AB$  的方程为

$$2cx + 2(r_2 - r_1)y - c^2 = 0 \quad (6)$$

由定比分点公式求得点  $C, D$  的坐标分别为

$$C: \frac{r_3(0, r_1)}{r_1 + r_3} + \frac{r_1(a, b)}{r_1 + r_3} = \frac{r_1(a, r_3 + b)}{r_1 + r_3}$$

$$D: \frac{r_3(c, r_2)}{r_2 + r_3} + \frac{r_2(a, b)}{r_2 + r_3} = \frac{(r_2 a + r_3 c, r_2(r_3 + b))}{r_2 + r_3}$$

所以, 直线  $CE, DF$  的方程分别为

$$(r_3 + b)x - ay = 0 \quad (7)$$

$$(r_3 + b)(x - c) - (a - c)y = 0 \quad (8)$$

由⑦⑧求得  $G(a, r_3 + b)$ .

由④-⑤知点  $G$  的坐标满足直线  $AB$  的方程, 即  $A, B, G$  三点共线.

**例 9** 如图 1.6 所示, 在平面坐标系中, 已知一个半径为  $R$ 、圆心为  $O_1$  的圆及一直线  $a$ ,  $O_1$  到  $a$  的距离为  $d, d > R$ , 在  $a$  上取点  $M, N$ , 使得以  $MN$  为直径的圆与圆  $O_1$  外切, 证明在该平面上存在一点  $A$ , 使得所有线段  $MN$  对  $A$  的张角都相等. (1985 年国际数学奥林匹克(IMO)预选题)

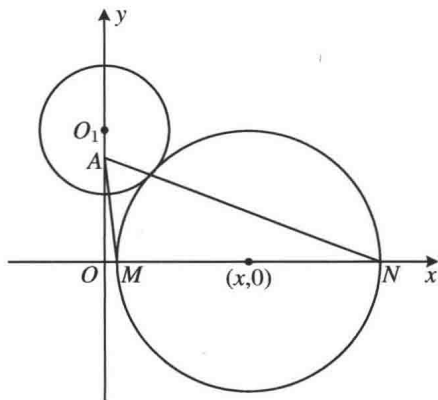


图 1.6



**证明** 以直线  $a$  为  $x$  轴, 以过  $O_1$  与直线  $a$  垂直的直线为  $y$  轴建立直角坐标系.

设  $O_1(0, d)$ , 且圆  $O_1$  与圆心在  $(x, 0)$ 、半径为  $r$  的圆外切, 于是,  $x^2 + d^2 = (R + r)^2$ .

由对称性, 如果点  $A$  存在, 则点  $A$  一定在  $y$  轴上, 设  $A(0, h)$ . 又  $M(x - r, 0)$ 、 $N(x + r, 0)$ , 所以直线  $AM$  的斜率为  $-\frac{h}{x - r}$ , 直线  $AN$  的斜率为  $-\frac{h}{x + r}$ . 下面计算  $\tan \angle MAN$ .

$$\begin{aligned}\tan \angle MAN &= \frac{k_{AN} - k_{AM}}{1 + k_{AN}k_{AM}} = \frac{-\frac{h}{x + r} + \frac{h}{x - r}}{1 + \frac{h^2}{x^2 - r^2}} \\ &= \frac{2hr}{x^2 - r^2 + h^2} = \frac{2hr}{(R + r)^2 - d^2 - r^2 + h^2} \\ &= \frac{2hr}{R^2 + h^2 + 2Rr - d^2}\end{aligned}$$

显然, 当  $R^2 + h^2 - d^2 = 0$ , 即  $R^2 + h^2 = d^2$  时上式为常数. 因此,  $A$  点是存在的, 其坐标为  $(0, \sqrt{d^2 - R^2})$ .

### 例 10

在坐标平面内, 横、纵坐标都是整数的点称为整点, 三个顶点都是整点的三角形称为整点三角形. 求以点  $I(2015, 7 \times 2015)$  为内心且直角顶点在坐标原点  $O$  的整点直角三角形  $OAB$  的个数. (2015 年福建省数学竞赛试题)



**解析** 不妨设点  $A$  在第一象限. 设  $\angle xOI = \alpha$ , 则  $\tan \alpha = 7$ , 直线  $OA$  的斜率  $k_{OA} = \tan(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan \alpha - 1}{1 + \tan \alpha} = \frac{7 - 1}{1 + 7} = \frac{3}{4}$ , 所以  $k_{OB} = -\frac{4}{3}$ .

由于  $A, B$  为整点, 设  $A(4t_1, 3t_1)$ 、 $B(-3t_2, 4t_2)$ , 其中  $t_1, t_2$  为正整数. 所以  $|OA| = 5t_1$ ,  $|OB| = 5t_2$ .

$\triangle OAB$  内切圆的半径  $r = \frac{\sqrt{2}}{2} |OI| = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 5\sqrt{2} \times 2015 = 5 \times 2015$ .

又  $r = \frac{|OA| + |OB| - |AB|}{2}$ ,  $|AB| = |OA| + |OB| - 2r$ , 由

$$|AB|^2 = (|OA| + |OB| - 2r)^2 = |OA|^2 + |OB|^2$$

得

$$(5t_1 + 5t_2 - 2 \times 5 \times 2015)^2 = 25t_1^2 + 25t_2^2$$

即  $(t_1 + t_2 - 2 \times 2015)^2 = t_1^2 + t_2^2$ .

设  $t_1 = x + 2015$ ,  $t_2 = y + 2015$ , 则

$$(x + y)^2 = (x + 2015)^2 + (y + 2015)^2$$

$$xy = 2015x + 2015y + 2015^2$$

$$(x - 2015)(y - 2015) = 2 \times 2015^2 = 2 \times 5^2 \times 13^2 \times 31^2$$

由  $|OA| > 2r$ ,  $|OB| > 2r$ , 知  $x - 2015, y - 2015$  为正整数. 又  $2 \times 5^2 \times 13^2 \times 31^2$  的正因数有  $2 \times 3 \times 3 \times 3 = 54$  个, 所以符合条件的  $(x, y)$  有 54 组, 从而符合条件的三角形有 54 个.

### 例 11

已知平面上同心圆的半径分别为  $R$  和  $r$  ( $R > r$ ), 设  $P$  是小圆上的一个定点,  $B$  是大圆上的一个动点, 直线  $BP$  与大圆相交于另一点  $C$ , 通过点  $P$  且与  $BP$  垂直的直线  $l$  与小圆相交于另一点  $A$ . (如果  $l$  与小圆相切于  $P$ , 则  $A$  与  $P$  重合.)

(1) 求表达式  $|BC|^2 + |CA|^2 + |AB|^2$  所取值的集合;

(2) 求线段  $AB$  中点的轨迹. (第29届IMO试题)

**解析** (1) 如图1.7所示, 以圆心  $O$  为原点建立直角坐标系, 并且使得点  $P$  在  $x$  轴负半轴上, 则  $P(-r, 0)$ , 两圆的方程分别为  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $x^2 + y^2 = r^2$ .

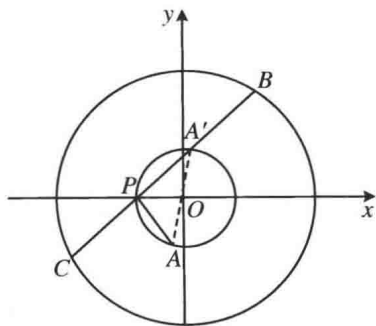


图 1.7

设  $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ , 则

$$\begin{aligned} & |BC|^2 + |CA|^2 + |AB|^2 \\ &= (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ &= 4R^2 + 2r^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 + y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1) \end{aligned}$$

由于  $PA \perp PB$ , 所以

$$(x_1 + r)(x_2 + r) + y_1y_2 = 0$$

即

$$x_1x_2 + y_1y_2 = -r(x_1 + x_2) - r^2$$

所以

$$\begin{aligned} & x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 + y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 \\ &= -r(x_1 + x_2) - r^2 + x_3(x_1 + x_2) + y_3(y_1 + y_2) \\ &= -(x_1 + x_2)(r - x_3) + y_3(y_1 + y_2) - r^2 \end{aligned} \quad ①$$

设  $BC$  与小圆的另一交点为  $A'$ , 因为  $PB \perp PA$ , 所以  $A'(-x_1, -y_1)$ . 由同一个圆的性质知线段  $BC$  与  $A'P$  有相同的中点:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -r - x_3 \\ y_1 + y_2 = -y_3 \end{cases} \quad ②$$

将②代入①得

$$\begin{aligned} & x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 + y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 \\ &= -(-r - x_3)(r - x_3) + y_3(-y_3) - r^2 \\ &= r^2 - (x_3^2 + y_3^2) - r^2 = -R^2 \end{aligned}$$

所以

$$|BC|^2 + |CA|^2 + |AB|^2 = 6R^2 + 2r^2$$

即表达式  $|BC|^2 + |CA|^2 + |AB|^2$  所取值的集合是  $\{6R^2 + 2r^2\}$ .

(2) 设线段  $AB$  的中点坐标为  $(x, y)$ , 由②知

$$\begin{cases} x_3 = -r - (x_1 + x_2) = -r - 2x \\ y_3 = -(y_1 + y_2) = -2y \end{cases}$$

代入  $x_3^2 + y_3^2 = R^2$ , 得线段  $AB$  的中点轨迹为

$$\left(x + \frac{r}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$$

这是一个以  $\left(-\frac{r}{2}, 0\right)$  为圆心、 $\frac{R}{2}$  为半径的圆.

## 练习题

1. 已知有向线段  $PQ$  的起点  $P$  和终点  $Q$  的坐标分别为  $(-1, 1)$  和  $(2, 2)$ , 若直线  $l: x + my + m = 0$  与线段  $PQ$  的延长线相交, 求  $m$  的取值范围. (1994 年全国高中数学联赛试题)
2. 给定一点  $P(3, 1)$  及两条直线  $l_1: x + 2y + 3 = 0$ 、 $l_2: x + 2y - 7 = 0$ , 试求过点  $P$  且与  $l_1$ 、 $l_2$  都相切的圆的方程. (1979 年全国高中数学联赛试题)
3. 如图 1.8 所示,  $A$  是半径为 1 的圆上一定点,  $l$  是过点  $A$  的切线,  $P$  是圆上任一点,  $PQ \perp l$ , 垂足为  $Q$ , 求  $\triangle PAQ$  面积的最大值. (2007 年陕西省数学竞赛试题)
4. 如图 1.9 所示, 过坐标原点  $O$  作圆  $C: \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + y^2 = 9$  的两条切线, 设切点为  $A$ 、 $B$ .

- (1) 求直线  $AB$  的方程以及线段  $AB$  的长;
- (2) 求  $\triangle OAB$  内切圆的方程. (2013 年福建省数学竞赛试题)

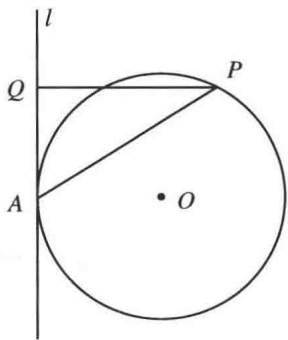


图 1.8

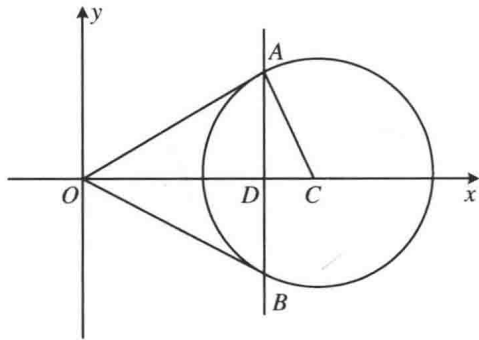


图 1.9

5. 如图 1.10 所示, 在直角坐标系  $xOy$  中, 圆  $O_1$ 、圆  $O_2$  都与直线  $l: y = kx$  及  $x$  轴正半轴相切. 若两圆的半径之积为 2, 两圆的一个交点为  $P(2, 2)$ , 求直线  $l$  的方程. (2015 年江苏省数学竞赛试题)
6. 已知圆  $C_1: (x+3)^2 + y^2 = 4$ 、 $C_2: x^2 + (y-5)^2 = 4$ , 过平面内的点  $P$  有无数多对互相垂直的直线  $l_1$ 、 $l_2$ , 它们分别与圆  $C_1$ 、圆  $C_2$  相交, 且被圆  $C_1$ 、圆  $C_2$  截得的弦长相等, 求点  $P$  的坐标. (2010 年河北省数学竞赛试题)
7. 如图 1.11 所示, 已知圆  $O: x^2 + y^2 = 1$  与  $x$  轴交于  $A$ 、 $B$  两点, 与  $y$  轴交于点  $C$ ,  $M$  是圆  $O$  上的任意一点 (除去圆  $O$  与两坐标轴的交点). 直线  $AM$  与  $BC$  交于点  $P$ , 直线  $CM$  与  $x$  轴交于点  $N$ . 设直线  $PM$  与  $PN$  的斜率分别为  $m$ 、 $n$ , 求证:  $m - 2n$  为定值. (2014 年陕西省

数学竞赛试题)

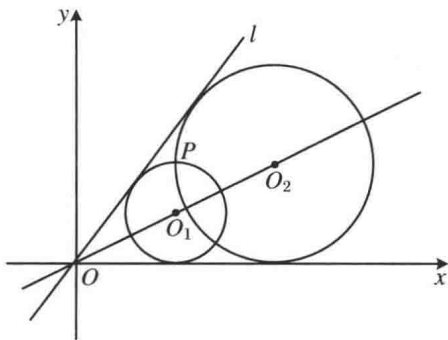


图 1.10

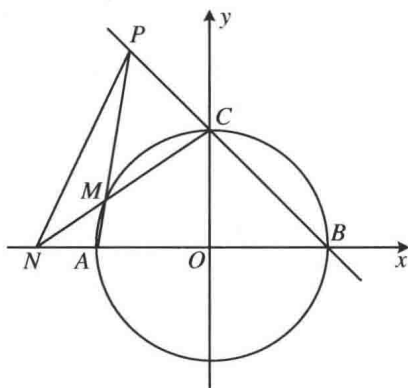


图 1.11

8. 已知三条直线  $l_1: mx - y + m = 0$ ,  $l_2: x + my - m(m+1) = 0$ ,  $l_3: (m+1)x - y + (m+1) = 0$ , 它们围成  $\triangle ABC$ .

(1) 求证: 无论  $m$  为何值,  $\triangle ABC$  都有一个顶点为定点;

(2) 问当  $m$  为何值时,  $\triangle ABC$  的面积有最大值、最小值? (第5届美国普特南数学竞赛试题)

9. 在  $x$  轴同侧的两个圆——动圆  $C_1$  和圆  $4a^2x^2 + 4a^2y^2 - 4abx - 2ay + b^2 = 0$  外切 ( $a, b \in \mathbb{N}, a \neq 0$ ), 且动圆  $C_1$  与  $x$  轴相切.

(1) 求动圆  $C_1$  的圆心轨迹  $l$  的方程;

(2) 若直线  $4(\sqrt{7}-1)abx - 4ay + a^2 + b^2 - 6958a = 0$  与曲线  $l$  有且仅有一个公共点, 求  $a, b$  的值. (2006年浙江省数学竞赛试题)

10. 如图 1.12 所示, 2 个长方形的金属片零件  $ABCD$  和  $ECFG$  放在直角坐标平面上, 从原点  $O$  发出的激光将对零件做切割. 如果激光 ( $l$ ) 一次从 2 个长方形上切割下的零件 (均在  $l$  上方) 的面积相等, 求激光 ( $l$ ) 所在直线的方程. (2004 年上海市数学竞赛试题)

11. 如图 1.13 所示, 已知  $A, B$  是  $\odot O: x^2 + y^2 = 4$  与  $x$  轴的两个交点,  $P$  是直线  $l: x = 4$  上的动点,  $PA, PB$  与  $\odot O$  的另一个交点分别为  $M, N$ , 证明: 直线  $MN$  过定点. (2011 年河北省数学竞赛试题)

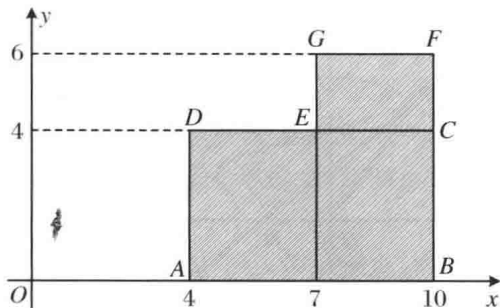


图 1.12

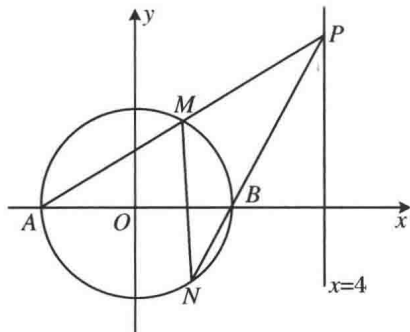


图 1.13

12. 已知  $P$  是圆  $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$  上一动点, 向量  $\overrightarrow{OP}$  依逆时针方向旋转  $90^\circ$  得到向量  $\overrightarrow{OS}$ , 又点  $P$  关于  $A(3,0)$  的对称点为  $T$ , 求  $|\overrightarrow{TS}|$  的取值范围. (2009 年新疆维吾尔自治区数学竞



赛试题)

13. 在平面直角坐标系中, 设  $A, B, C$  是曲线  $xy=1$  上的三个不同的点, 且  $D, E, F$  分别是  $BC, CA, AB$  的中点. 求证:  $\triangle DEF$  的外接圆经过原点  $O$ . (2013 年天津市数学竞赛试题)

14. 回答下列两个问题, 举出例子或给出证明:

(1) 对任意正整数  $n$ , 在平面上是否都存在  $n$  个不在同一条直线上的点, 使得任意两点间的距离都为正整数?

(2) 在平面上是否存在两两不同的无限点列组成的点集  $M$ , 使得  $M$  内的所有点不在同一条直线上, 且  $M$  内任意两点间的距离为正整数? (2007 年吉林省数学竞赛试题)

15. 在坐标平面上, 是否存在一个含有无穷多条直线  $l_1, l_2, \dots, l_n, \dots$  的直线族, 满足条件:

(1)  $(1, 1) \in l_n (n=1, 2, \dots)$ ;

(2)  $k_{n+1} = a_n - b_n$ , 其中  $k_1$  是  $l_1$  的斜率,  $k_{n+1}$  是  $l_{n+1}$  的斜率,  $a_n$  和  $b_n$  分别是  $l_n$  在  $x$  轴和  $y$  轴上的截距 ( $n=1, 2, 3, \dots$ );

(3)  $k_n k_{n+1} \geq 0 (n=1, 2, 3, \dots)$ .

并证明你的结论. (1988 年全国高中数学联赛试题)

16. 如图 1.14 所示, 在平面直角坐标系中, 方程为  $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$  的圆内接四边形  $ABCD$  的对角线  $AC$  和  $BD$  垂直, 且  $AC$  和  $BD$  分别在  $x$  轴和  $y$  轴上.

(1) 求证:  $F < 0$ ;

(2) 若四边形  $ABCD$  的面积为 8, 对角线  $AC$  的长为 2, 且  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ , 求  $D^2 + E^2 - 4F$  的值. (2012 年河北省数学竞赛试题)

17.  $\triangle ABC$  是平面直角坐标系  $xOy$  上的一个直角三角形,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $|AB| = 60$ , 从  $A$  和  $B$  引出的中线分别为  $y = x + 3$  和  $y = 2x + 4$ , 求  $\triangle ABC$  的面积. (1986 年美国数学邀请赛试题)

18.  $\triangle ABC$  是锐角三角形,  $L$  是三角形所在坐标平面内的任一直线,  $u, v, w$  分别是点  $A, B, C$  到  $L$  的垂线段的长. 试证明:  $u^2 \tan A + v^2 \tan B + w^2 \tan C \geq 2S$ , 其中  $S$  为  $\triangle ABC$  的面积. (1988 年 IMO 预选题)

19. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 抛物线  $f(x) = ax^2 + bx + c$  与坐标轴有三个不同的交点, 过三个交点的圆为  $C$ , 证明: 若  $a$  为非零常数, 则圆  $C$  过定点. (2015 年河北省数学竞赛试题)

20. 如图 1.15 所示, 在直角坐标系  $xOy$  中, 圆  $O: x^2 + y^2 = 4$  与  $x$  轴的正半轴交于点  $A$ , 以  $A$  为圆心的圆  $(x-2)^2 + y^2 = r^2 (x > 0)$  与圆  $O$  交于  $B, C$  两点.

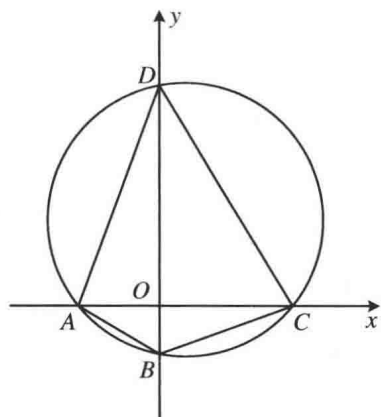


图 1.14

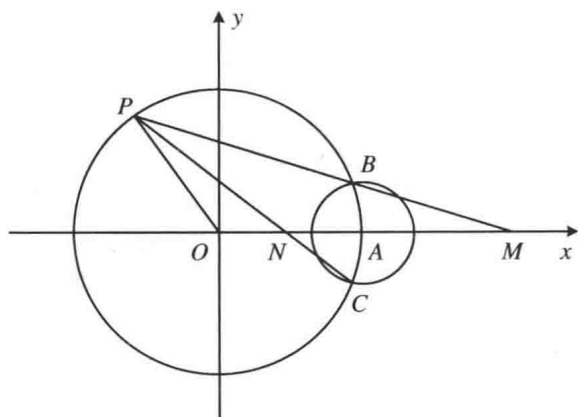


图 1.15

(1) 求  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  的最小值;

(2) 设  $P$  是圆  $O$  上异于  $B$ 、 $C$  的任一点, 直线  $PB$ 、 $PC$  与  $x$  轴分别交于点  $M$ 、 $N$ , 求  $S_{\triangle POM} S_{\triangle PON}$  的最大值. (2015 年陕西省数学竞赛试题)

21. 设动圆圆心在抛物线  $y = \frac{1}{4}x^2$  上, 半径等于该圆圆心的纵坐标. 求所有这样的圆上点的集合. (2010 年陕西省数学竞赛试题)

22. 在平面直角坐标系中, 以点  $C\left(t, \frac{2}{t}\right) (t \in \mathbf{R}, t \neq 0)$  为圆心的圆经过坐标原点  $O$ , 且与  $x$  轴、 $y$  轴交于点  $A$ 、 $B$  (不同于原点  $O$ ).

(1) 求证:  $\triangle OAB$  的面积  $S$  为定值;

(2) 设直线  $y = -2x + 4$  与圆  $C$  相交于不同的两点  $M$ 、 $N$ , 且  $|OM| = |ON|$ , 求圆  $C$  的标准方程. (2012 年陕西省数学竞赛试题)

23. 已知  $a$ 、 $b$  是实数, 且  $a^2 + b^2 = 1$ . 考察在平面直角坐标系  $xOy$  的直线系  $M: ax + by - 2b + 1 = 0$ .

(1) 若点  $P(x_0, y_0)$  到  $M$  中的任一条直线的距离都是定值  $d$ , 求点  $P$  的坐标及  $d$  的值;

(2) 若直线系  $M$  中至多有一条直线经过点  $Q(x, y)$ , 求点  $Q$  的轨迹方程. (2013 年河南省数学竞赛试题)

24. 如图 1.16 所示, 设  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  是一条直线上依次排列的四个不同的点, 分别以  $AC$ 、 $BD$  为直径的两个圆相交于  $X$  和  $Y$ , 直线  $XY$  交  $BC$  于  $Z$ . 若  $P$  为直线  $XY$  上异于  $Z$  的一点, 直线  $CP$  与以  $AC$  为直径的圆相交于  $C$ 、 $M$ , 直线  $BP$  与以  $BD$  为直径的圆相交于  $B$ 、 $N$ . 试证明:  $AM$ 、 $DN$ 、 $XY$  三线共点. (第 36 届 IMO 试题)

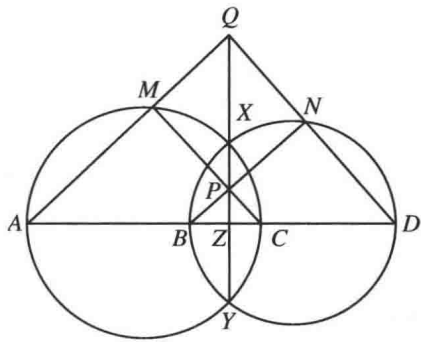


图 1.16

25. 对于任意给定的无理数  $a$ 、 $b$  及实数  $r (r > 0)$ , 证明: 圆周  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  上至多只有两个有理点 (纵、横坐标皆为有理数的点). (2015 年江西省数学竞赛试题)

26. 设  $M$  为平面上坐标为  $(1994p, 7 \times 1994p)$  的点, 其中  $p$  是素数, 求满足下列条件的直角三角形的个数.

(1) 三角形的三个顶点都是整点, 而且  $M$  是直角顶点;

(2) 三角形的内心是坐标原点. (1994 年中国数学奥林匹克试题)