

机械专业卓越工程师教育培养精品教材系列

工程有限元与 数值计算

陈雪峰 李 兵 杨志勃 孙 瑜 编著



科学出版社

机械专业卓越

教材系列

工程有限元与数值计算

陈雪峰 李 兵 杨志勃 孙 瑜 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书主要内容为有限元方法的基本原理和工程实例,讲述了有限元方法入门基础、杆梁有限元单元、平面与三维实体有限元单元、等参数单元、薄板弯曲有限元等经典有限元内容以及基本的数值计算方法;同时,为了拓展思路,介绍了新型小波有限元方法;并利用有限元软件 ANSYS,结合汽车驱动桥、高速主轴、海流发电装备、铁路转辙机等工程结构,说明了有限元分析流程。本书满足机械类工程教育专业认证标准。

本书可作为工科院校机械类本科生和研究生的教材,也可供相关专业工程设计和研究人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程有限元与数值计算 / 陈雪峰等编著. —北京:科学出版社,2017.8
机械专业卓越工程师教育培养精品教材系列
ISBN 978-7-03-054124-6

I. ①工… II. ①陈… III. ①有限元法-应用-工程技术-教材 ②数值计算-应用-工程技术-教材 IV. ①TB115

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 191558 号

责任编辑:毛 莹 朱晓颖 / 责任校对:郭瑞芝
责任印制:吴兆东 / 封面设计:迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京京华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 8 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2017 年 8 月第一次印刷 印张:16 1/4

字数:413 000

定价:45.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

2016年6月2日,国际工程联盟(The International Engineering Alliance, IEA)会议全票通过中国科协代表我国正式加入《华盛顿协议》,掀开了我国工程教育新篇章。

中国工程教育专业认证协会机械类分委员会在机械类专业《自评报告》补充说明中明确提出了在机械类专业开设计算方法课程。事实上,西安交通大学机械类专业在2003版培养方案中就开设了“机械工程计算方法”课程。之后由于种种原因,将该课程并入了有限元课程中。在2010版培养方案中,该课程演化为“有限元分析及工程应用”,成为了机械类专业模块必修课程。

西安交通大学机械类专业2012年通过《华盛顿协议》认证,美国ASME工程认证委员会主席Mary等专家参加了该次认证评估。针对六年后再次认证中计算方法环节的教学要求,作者不禁从两个维度思考这一问题:从微观方面来说,有限元课程对于机械专业至关重要,计算方法是其重要基础之一,例如如果不讲数值积分则难以深刻讲述有限元单刚阵的积分;从宏观方面来说,在2005年作者参与丁汉教授牵头的“数字化制造基础研究”973项目申报中,钟掘院士、熊有伦院士与李培根院士提出数字化制造内涵,其中就涉及数字化、离散化、制造过程与系统的建模能力等,而计算方法正是培养这种能力。

随着“中国制造2025”“科技创新2030”等国家战略的提出,该门课程在本科生中开设的重要性就更加突出,但是如果简单地移植理科学生开设的计算方法课程,不一定是最佳方式。通过多次研讨,本内容在2015版培养方案中确定为“工程有限元与数值计算”课程。

本书前身为《有限元方法及及其工程案例》,于2014年1月出版发行,至今已经过去了4年。《有限元方法及及其工程案例》结合作者八年连续开设课程的教学经验,对于尚未先修结构力学、弹性力学、计算方法的本科生,如何讲好这门课程,让学生不要望而却步,作者在本书中尽量从材料力学等基本知识入手,深入浅出,让学生抓住有限元方法的本质。同时为了让学生不要对有限元浅尝辄止,在《有限元方法及及其工程案例》编写中,作者结合历年有限元分析经历,撰写了几个典型工程案例,在教学中期望结合工程案例,让学生身临其境、学用结合;并且结合作者主持的国家杰出青年科学基金等项目,撰写了一章新型有限元方法,使学生开阔思路、学以创新。

本书根据中国工程教育专业认证协会机械类分委员会认证要求,在《有限元方法及及其工程案例》基础上,结合工程认证对计算方法内容及最新的工程案例,进行了完善补充。计算方法的内容主要包括三方面:数值逼近、数值代数和微积分方程求解。本书重点讲解插值原理与方法、迭代求解法、有限元基本理论及复杂工程案例,同时设置多个工程案例实践。

本书出版欣逢“新工科”概念提出,相信在工程专业认证新要求下出版的这本教材,将为制造强国的中国梦提供人才培养支撑。

本书的具体编写分工如下:第1、4、5、7章由陈雪峰撰写,第2章由孙瑜主要撰写,第3、6、10章由杨志勃撰写,第8、9、11章由李兵撰写。郭艳婕在本书撰写、文字与图表编排过程中付出了大量劳动。杨立娟、薛晓峰、王亚楠、左浩等在文字编排过程中完成了很多工作,在此表示感谢!

作 者

2017年夏于西安

目 录

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 有限元方法的提出	1
1.1.1 有限元概念	1
1.1.2 有限元概念的提出	1
1.1.3 有限元发展	2
1.1.4 国内有限元的发展	3
1.2 有限元的工程应用	5
1.3 新型有限元方法概述	6
1.4 数值计算方法简介	12
习题	13
第 2 章 有限元及数值计算基础	14
2.1 矩阵基础知识	14
2.2 线性代数方程组的求解	16
2.2.1 直接法	16
2.2.2 迭代法	22
2.3 有限元对弹簧系统的分析	25
习题	29
第 3 章 连续系统的数学模型与插值方法	31
3.1 连续系统的数学模型	31
3.1.1 微分形式	31
3.1.2 变分形式	33
3.2 连续系统的数学模型的求解方法	34
3.2.1 加权余量法	34
3.2.2 Ritz 法	36
3.2.3 从 Ritz 法到有限元法	37
3.2.4 插值方法与插值函数	38
3.2.5 插值误差分析	40
习题	42
第 4 章 杆梁有限元单元	43
4.1 杆结构的有限元方法	43
4.1.1 杆的应变与应力	43
4.1.2 杆单元的力学分析	44

4.1.3	单元刚度矩阵变换	48
4.1.4	刚度矩阵的存储	50
4.1.5	有限元计算步骤	52
4.2	梁结构的有限元方法	55
4.2.1	梁结构材料力学基本知识	56
4.2.2	梁结构有限元分析	57
习题		66
第5章	平面与三维实体有限元单元	67
5.1	弹性力学基础	67
5.1.1	弹性力学基础知识	67
5.1.2	弹性力学有限元分析	69
5.1.3	弹性力学中平面问题	70
5.2	三角形单元	72
5.3	四边形单元	83
5.4	其他二维平面单元	89
5.4.1	六节点三角形单元	89
5.4.2	八节点矩形单元	89
5.5	三维实体单元	90
5.5.1	八节点六面体单元	90
5.5.2	二十节点六面体单元	92
习题		93
第6章	数值微分与数值积分方法	94
6.1	数值微分	94
6.1.1	直接数值微分法:以差分法为例	94
6.1.2	谱微分法:以傅里叶微分法为例	95
6.1.3	伪谱微分法:以切比雪夫微分法为例	98
6.2	数值积分	101
6.2.1	牛顿-柯特斯积分	102
6.2.2	高斯积分	103
习题		105
第7章	等参数单元	106
7.1	等参数单元基本格式	106
7.2	等参数单元的数值积分	109
7.3	八节点四边形等参数单元	113
7.3.1	基本形式	113
7.3.2	积分选择	113
习题		116

第 8 章 薄板弯曲有限元	117
8.1 经典薄板弯曲的力学基本方程	117
8.1.1 基本假设条件	117
8.1.2 经典薄板弯曲的力学基本方程	117
8.2 经典薄板弯曲的有限元分析	120
8.3 中厚板与平面壳体单元	123
8.3.1 Mindlin 平板单元	124
8.3.2 平面壳体单元	125
习题	128
第 9 章 有限元的多场分析	129
9.1 热传导有限元分析	129
9.1.1 传热学基础	129
9.1.2 稳态热分析有限元方程	130
9.1.3 瞬态热分析有限元方程	130
9.1.4 分析实例	130
9.2 流体有限元分析	132
9.2.1 计算流体力学(CFD)工程意义	132
9.2.2 理想流体基本方程	132
9.2.3 二维理想流体的有限元分析	133
9.3 电磁有限元分析	134
9.3.1 电磁场理论基础	134
9.3.2 电磁场分析平台	135
9.3.3 分析实例	136
9.4 耦合分析	139
9.4.1 耦合分析基础	139
9.4.2 分析实例	141
习题	142
第 10 章 新型小波有限元方法	143
10.1 基本原理和提出思路	143
10.2 小波有限元基本理论	143
10.2.1 小波分析与有限元空间	143
10.2.2 小波梁单元构造	144
10.2.3 小波矩形薄板单元构造	146
10.2.4 薄板自由振动固有频率分析	148
10.3 基于小波有限元模型的裂纹故障诊断原理	149
10.3.1 正问题:裂纹数值建模	150
10.3.2 反问题:裂纹故障诊断	151
10.4 转子系统裂纹定量诊断仿真分析	152

10.5 基于小波有限元模型的应力波传播仿真分析	153
10.5.1 梁类结构的应力波传播仿真分析	154
10.5.2 板类结构的应力波传播仿真分析	155
习题	157
第 11 章 工程案例	158
11.1 承载支架强度校核	158
11.1.1 工程背景	158
11.1.2 分析关键	159
11.1.3 分析步骤	160
11.2 高速主轴模态分析	169
11.2.1 工程背景	169
11.2.2 分析步骤	170
11.3 水力透平流固耦合分析	176
11.3.1 流固耦合分析基础	176
11.3.2 透平流固耦合分析	177
11.4 铁路转辙机底壳有限元分析	199
11.4.1 铁路转辙机底壳静力学分析	199
11.4.2 铁路转辙机底壳模态分析	211
11.4.3 铁路转辙机底壳谐响应分析	215
11.4.4 铁路转辙机内部流场分析	218
11.4.5 铁路转辙机底壳疲劳分析	231
11.4.6 转辙机底壳的模态测试	233
11.4.7 转辙机底壳的扫频实验	238
11.4.8 转辙机两轴试验平台	242
参考文献	244

第 1 章 绪 论

1.1 有限元方法的提出

1.1.1 有限元概念

有限元方法的基本思想是将结构离散化,用有限个容易分析的单元来表示复杂对象,单元之间通过有限个节点相互连接,然后根据变形协调条件综合求解。由于单元数目是有限的,节点数目也是有限的,所以称为有限元方法^[1](Finite Element Method, FEM)。

单元按不同联结方式进行组合,且单元本身可以有不同形状,因此可以模型化几何形状复杂的求解域。有限元方法利用每个单元内的近似函数来分片表示全求解域上待求的未知场函数,近似函数由未知场函数在单元各个结点的数值和其插值函数来表达。这样在有限元分析中未知场函数在各个结点上的数值就成为新的未知量,从而使一个连续无限自由度问题变成离散有限自由度问题。通过插值函数计算出各个单元内场函数的近似值,从而得到整个求解域上的近似解。显然随着单元数目的增加即单元尺寸的缩小,或者随着单元自由度的增加及插值函数精度的提高,解的近似程度将不断改进,如果单元是满足收敛要求的,近似解最后将收敛于精确解。

1.1.2 有限元概念的提出

有限元思想最早可以追溯到远古时代,在几个世纪前就得到了应用,如用多边形(有限个直线单元)逼近圆来求圆的周长。17 世纪,牛顿和莱布尼茨发明了积分法,在牛顿之后约一百年,学者高斯提出了加权残值法及线性代数方程组的解法。这两项成果的前者被用来将微分方程改写为积分表达式,后者被用来求解有限元方法所得出的代数方程组。18 世纪,学者拉格朗日提出了泛函分析,这种方法是将偏微分方程改写为积分表达式的一种方法。19 世纪末 20 世纪初,学者瑞利和里兹首先提出可对全定义域运用展开函数来表达定义域上的未知函数。1915 年,学者伽辽金提出了选择展开函数中形函数的伽辽金法,该方法后来被广泛地用于有限元。1943 年, Courant 在论文中取定义在三角形域上分片连续函数,利用最小势能原理研究 St Venant 扭转问题^[2],这实际上就是有限元的做法。

有限元方法的概念是由 Turner 与 Clough 最早提出的^[3],1952 年美加州大学伯克利分校的学者 Clough 与波音公司结构振动分析专家 Turner 共同开展了对三角形机翼结构的分析,在经历了运用传统一维梁分析失败后,1953 年, Clough 运用直接刚度位移法成功地给出了用三角单元求得平面应力问题的正确答案^[4,5],所获得的结果于 1956 年公开发表^[3],这篇文章通常被认为是有限元提出的标志。1960 年 Clough 进一步研究了弹性问题的应力分析,并首次使用“有限元(Finite element)”这一术语^[1],他选择这一术语主要是为了与虚功原理等经典分析方法在计算结构位移时考虑外力无限小的贡献相区分。

1.1.3 有限元发展

有限元方法从 1943 年产生至今大致可分为三个阶段:1943 年,Courant 提出定义在三角形域上分片连续函数^[2];1960 年,Cough 首次提到有限元的名称^[1];1970 年以后,随着计算机和软件的发展,有限元发展起来并在近年来不断得到蓬勃发展。

1. Zienkiewicz 对有限元的贡献

在有限元的发展过程中,Zienkiewicz 是需要被提到的一位学者,他是英国威尔士(Wales)大学土木工程学院教授,担任联合国教科文组织工程数值计算委员会主席,在等参元、板壳元列式、简缩积分、罚函数格式、误差估计、自适应有限元方面做出了卓越贡献,这些贡献主要体现在他的 593 篇论文与 13 部专著中。1965 年 10 月,Zienkiewicz 和香港大学的 Cheung 在文中第一次使用极小位能原理系统地实现了有限元方法对边界场问题的求解^[6],但极小位能原理在处理流体力学中的某些问题时遇到了困难,于是虚功原理被引入了。1964 年,Zienkiewicz 和 Cheung 首次使用虚功原理导出有限元方法^[7]。1969 年,另一位有限元大师 Oden 首先论述了利用虚功原理求解流体力学中非自伴问题的可能性^[8],1973 年,Taylor 和 Hood 第一次用虚功原理得到了非自伴问题的实用解^[9],从此流体力学中的非自伴问题就可以用有限元方法来解了。不久,数学家发现虚功原理只是加权残值法的一种特殊形式,因此到 60 年代末,加权残值法也用来导出有限元方法。Zienkiewicz 的有限元专著从最早(1967 年)与 Cheung 合著的《结构力学中的有限元方法》^[10],到最近(2008 年)与加州大学伯克利分校 Taylor 合著的《有限元方法基础理论(第六版)》^[11],被译为包括中文在内的多种语言,这些专著以及他 1968 年创办的杂志 *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 有力地推动了有限元在工程计算中的应用,为此,Zienkiewicz 获得了包括美国机械工程学会颁发的 Timoshenko 勋章在内的多项荣誉,当时关于有限元方法的研究论文几乎按指数规律增加,公开发表近 8000 篇,内部报告就更多。有限元这一术语的出现意味着可以直接用离散系统的标准研究方法来研究有限元,在概念上使我们对方法的理解得到改善,在计算上可对各种问题应用统一的方法并研制出标准的计算程序。

20 世纪 60 年代中期,有限元方法有了坚实的数学和工程学基础后,其应用范围也随之扩大。到现在,几乎所有能应用偏微分方程模型的领域都可以使用有限元方法,它“可能在 20 世纪的所有逼近方法中对数值方法的理论和实践产生的影响最大”^[12]。由于极小位能原理和虚功原理的引入使有限元方法在实践中可以解决许多困难的问题,实现了有限元方法应用范围的扩大,再加上 1967 年 Zienkiewicz 出版了第一本推广有限元方法的教程《结构力学中的有限元法》,所以 60 年代晚期 70 年代早期,有限元方法在工程界逐渐流行起来。

2. 曲边单元的提出

随着有限元方法在工程中的推广,在很多情况下要处理边界条件为曲线(或曲面)的区域,如果用直边单元去逼近曲线边界,为了达到一定的精度,就需要在边界上充分细分单元。这样就会使单元增多,从而导致有限元方程中的变量数量增加,有时超出了当时计算机的能力。比如 1968 年,Zienkiewicz 在英国的斯旺西大学用线性直边单元分析拱形坝的受力情况时,形成的有限元方程有几千变量。当时英国最好的计算机是阿特拉斯(Atlas),它处理这么多变量需

要几小时,但它每运行约 20min 就会产生一个随机错误,所以使用直边单元在当时条件下无法解决这个问题^[13]。为了克服这类困难,学者们创造了曲边单元来逼近曲边定义域。

使用曲边单元的基本思想是将曲边单元映射成常用的直边单元,然后使用直边单元理论,这就要用到等参映射的技术。等参映射可以将规则的形状映射成不规则的形状,也可以将不规则的形状映射成规则的形状。1961 年, Taig 在他的报告《通过矩阵位移方法的结构分析》(Structural analysis by the matrix displacement method)中首次成功地将长方形映射成了一般四边形。后来, Irons 在 Zienkiewicz 的建议下开始研究这个课题。1966 年,他将 Taig 的方法作了推广,将直边单元映射成曲边单元,这样曲边单元被引入了有限元方法中。20 世纪 60 年代晚期, Zienkiewicz、Irons 和 Scott 等在 1966 年的基础上进一步提升了等参映射技术,并且把它应用到了二维和三维问题中。

3. 对有限元收敛性的研究

关于有限元方法收敛性的研究,在 20 世纪 60 年代早期,根据极小位能原理,学者们很容易给出了有限元方法收敛的准则,现在我们把这个准则叫形状函数的完备性和协调性。它第一次正式出现是在 1964 年 1 月斯旺西举行的一个学术会议上。1965 年, Zienkiewicz 和 Holister 将这次学术会议中的论文集合起来,以《应力分析》(Stress analysis)为题目正式出版。

在 1965 年戴顿(Dayton)举行的学术会议上, Bazeley、Cheung、Trons 和 Zienkiewicz 展示了非协调元^[14],这种单元表现要比协调元好,但它不符合有限元方法收敛准则中的协调性,所以收敛性得不到保证。针对这种情况, Bazeley 等提出了保证非协调元收敛的准则——分片试验。虽然分片试验原来是针对非协调元的,但人们很快发现它可以用于所有的单元。经过 Taylor、Zienkiewicz、Sim、Chan 对分片试验的提升^[15],它现在已经成了所有有限元形式收敛的充分必要条件。

收敛性保证的是极限状况下有限元方法的有效性,但在实践中不可能真正将定义域无限细分,所以通常得到的解是近似解。对近似解做误差估计是由另一位有限元大师 Babuška 和 Rheinboldt 提出的,他们不仅指出了估计误差的可能性,而且描述了如何通过恰当的网格改进来达到所要求的精度^[16,17]。为了得到较好的误差估计,1992 年, Zienkiewicz 和 Zhu 提出了著名的超收敛分片恢复算法(Superconvergent patch recovery)^[18,19]。这个算法指出,有限元解在某些点上的值与精确解的值十分接近,这些点称为超收敛点。超收敛分片恢复算法的核心思想是利用超收敛点上的值来得到比较精确的解。此后,越来越多的力学家、工程师、数学家投入到有限元方法的研究与应用中。在近半个世纪里,为有限元这一博大精深理论体系做出过卓越贡献的人挂一漏万、不胜枚举。

1.1.4 国内有限元的发展

从有限元方法的早期发展可以看出,国外有限元方法的产生在很大程度上是出于工程技术的需要。在我国社会主义建设的过程中也有大量需要有限元方法解决的实际问题,我国在 20 世纪 60 年代比较封闭,不了解国外科技的最新进展。在这种情况下有一位学者独立于西方创造了有限元方法,他就是冯康教授。冯康于 1957 年调入中国科学院计算技术研究所,1978 年任中国科学院计算中心主任,1980 年当选中国科学院学部委员(院士),1987 年起任计算中心名誉主任。曾任全国计算数学会理事长,《计算数学》、《数值计算与计算机应用》、J.

Comp. Math., Chinese J. Numer. Math. Appl. 等四刊主编, 国家攀登计划项目“大规模科学工程计算的方法与理论”首席科学家等职。丘成桐教授评价说, “中国近代数学能够超越西方或与之并驾齐驱的主要原因有三个, 主要是讲能够在数学历史上很出名的有三个: 一个是陈省身教授在示性类方面的工作, 一个是华罗庚在多复变函数方面的工作, 一个是冯康在有限元计算方面的工作”。足见冯康教授之与有限元、之与国家之贡献。

冯康教授于 1964 年独立于西方创立了数值求解偏微分方程的有限元方法, 形成了标准的算法形态, 编制了通用的计算程序, 是数学机械化思想的一种生动体现^[20], 部分地做到了一切问题数学化, 一切数学问题代数化, 一切代数问题化为代数方程求解, 并及时地解决了当时我国最大的刘家峡水坝的应力分析问题^[21]。1965 年在《应用数学与计算数学》上发表了“基于变分原理的差分格式”一文, 在极其广泛的条件下证明了方法的收敛性和稳定性, 给出了误差估计, 从而建立了有限元方法严格的数学理论基础, 为其实际应用提供了可靠的理论保证。这篇论文的发表是我国学者独立于西方创始有限元方法的标志。

冯康把有限元方法要点归纳为“化整为零、截弯取直、以简驭繁、化难于易”, 其内容主要分两个方面: 一是变分原理, 二是剖分插值。从第一方面看, 它是传统的能量法的一种变形; 从第二方面看, 则是差分方法的一种变形。它具有很广的适应性, 特别适合于几何、物理条件比较复杂的问题而且便于程序的标准化。由于该方法对有限与无限、连续与离散、局部与整体、简单与复杂、理论与实际、人与机器等各种矛盾的处理都比较得当, 因此在解题能力、处理效率和理论保证诸方面都远远超过传统的方法。在有限元方法创始之初, 冯康就认识到它的内在潜力, 并估计这一方法将使固体力学和其他一些领域中提出的椭圆型方程计算问题得到实际的解决, 这一点现在已被实践所证实。

20 世纪 70 年代中后期, 在经典的连续有限元即协调元取得成功的基础上, 冯康注意到了间断有限元, 包括非协调有限元的理论还处在不甚令人满意的状态, 及时开展了相关研究。他在 1979 年建立了间断函数类的庞加莱(Poincare)型不等式、间断有限元函数空间的嵌入定理及间断有限元的一般收敛性定理^[22]。这些成果正是后来得到的系统发展的非协调有限元理论研究的先导。冯康还将椭圆方程的经典理论推广到具有不同维数的组合流形, 即由不同维数子流形组成的几何结构, 这在国际上为首创。他提供了严密的数学基础, 解决了有限元方法对组合结构的收敛性^[23], 并将此项成果向工程界讲授, 颇受欢迎。国外直到 20 世纪 80 年代中期才有这方面的工作。近年来, 由于诸如机器人及空间站等高度复杂的结构的出现, 这一方向已显示出极大的发展前景。

有限元方法的创立是计算数学发展的一个重要里程碑。冯康独立于西方创始有限元方法, 并先于西方建立了极其严密的理论基础, 对计算数学的发展作出了历史性的贡献。冯康创始有限元方法的学术观点和学术道路与西方迥然不同, 这使得他能在比西方远为落后的计算机设备条件下做出领先于西方的工作。有限元方法的创立对数学学科本身也有重要意义, 它的出现使得微分方程的数值解法及其理论分析的面貌大为改观, 对数学、力学、工程科学和计算机科学学科之间交流渗透起到了极大的促进作用, 其基本方法和理论因其意义重大且已定型成熟而成为经典, 被写进教科书, 并被多数理工科大学列为必修课程。冯康对有限元方法的重大贡献今天已得到国内外公认和重视, 冯康的论文被后来的多数国内同行反复引用, 被视为有限元方法的创始工作。外国科学家在事过 10 余年了解到冯康的工作后也都一致对这一工作的历史地位和作用予以充分肯定, 公正承认冯康教授在创始有限元方法中做出的贡献。法

国科学院院士 Lions 在 70 年代末就已对此给出了很高的评价,他说:“有限元方法意义重大,中国学者在对外隔绝的环境下独立创造了有限元方法,在国际上属最早之列,今天这一贡献已为全人类所共享”。美国著名学者 Lax 院士曾写道:“冯康的声望是国际性的,我们记得他瘦小的身材,散发着活力的智慧的眼睛以及充满灵感的脸孔,整个数学界及他众多的朋友都将深深怀念他”。

继冯康教授之后,石钟慈院士在有限元研究中也做出了非常杰出的贡献。20 世纪 70 年代末,石钟慈在多年与工程人员合作推广应用有限元方法的基础上,创造性地提出了样条有限元,将样条逼近与有限元巧妙结合,得到了完整的误差分析。此法解决了众多工程设计的实际问题,从 20 世纪 80 年代开始,他转向非协调有限元研究,取得了一系列系统深入的重大成果。他否定了当时国际上流行的判别非协调元收敛性的 Irons 准则,揭示了工程直观和数学严密之间的矛盾;首次证明非协调元的收敛性强烈依赖于网格剖分方式,并发现了一系列错向收敛现象;提出了一种新的判别非协调元收敛性的准则,既可靠又方便,这是非协调元收敛性研究的一项重大进展,为实际应用提供了强有力的工具;同时应西方有限元创始人德国的 Argyris 教授要求证明了一种非标准元(TRUNC)的收敛性,近年来他又从事非协调有限元多重网格技术研究,特别在瀑布型多重网格研究中取得了重要成果,首次论证了有限元方法的可靠性,给出了有限元近似解收敛性分析与最优误差估计^[24]。

此外还需要提及林群、陈传森、朱起定、吕涛、龙驭球教授等自 20 世纪 70 年代后期起在有限元超收敛、后处理与高精度算法研究中做出的许多重要工作,他们的工作引起国际同行长期的关注和重视^[21]。

1.2 有限元的工程应用

有限元方法在国民经济建设中发挥了重大作用,其应用领域的广度和深度的不断发展,目前有限元法的应用已由弹性力学平面问题扩展到空间问题、板壳问题,由静力平衡问题扩展到稳定问题、动力问题和波动问题。分析的对象从弹性材料扩展到塑性、黏弹性、黏塑性和复合材料等,从固体力学扩展到流体力学、传热学、电磁学、声学等连续介质领域。在工程分析中的作用已从分析和校核扩展到优化设计并和计算机辅助设计相结合,在短短的几十年里有限元方法已在航空航天、机械能源、土木建筑和汽车等国民经济支柱领域得到了广泛的应用。

1. 航空航天

航空航天一直以来都是各种先进技术的排头兵,有限元方法的应用也不例外。著名商用有限元软件中很多都有着航空航天的血统,如 NASTRAN 软件最早就源自美国宇航局(NASA),目前波音、空客、洛克希德·马丁、达索等美欧各大飞机制造公司,在研发中无不例外的都采用有限元方法提高设计效率,降低产品成本。波音 777 是世界上第一款全部由数字技术设计完成的大型喷气式飞机,借助 CATIA+ABAQUS 的 CAD 设计仿真模式,达索公司仅通过少量的投入即完成整个设计及改进任务^[25]。EADS(欧洲宇航防务集团)采用 ABAQUS 软件,利用一系列自由度总数,达到将近 450000 的各种 ABAQUS 元素构建飞机襟翼支承结构模型,并运用 ABAQUS 隐式算法和后置处理法对若干种情况下的负荷承受能力进行了计算,简化了新型复合材料成型加工的几何复杂性,从而最大限度降低了制造成本^[26]。

2. 机械能源

机械能源领域是有限元方法应用最为成功的领域之一,目前基于有限元方法开发的通用商业分析软件如 ANSYS、NASTRAN、ADINA、ABAQUS、ALGOR 等,已成功应用到包括产品零、部件和整机的刚度、强度、散热、振动和疲劳设计的各个环节。世界著名的工程机械设备供应商卡特皮勒(Caterpillar)公司在新一代 994 系列装载机设计中采用有限元 ANSYS 软件对底盘、臂架等关键零部件进行仿真分析,使这些产品在结构形式的合理性、先进性和安全性等方面都有了很大改进^[27]。中国核动力研究设计院以反应堆压力容器、堆内构件、燃料组件、控制棒驱动机构及其支撑结构组成的反应堆系统为分析对象,利用 ANSYS 软件对秦山核电二期工程反应堆系统进行抗震分析,一方面为反应堆结构设计提供地震输入,另一方面又为抗震实验提供地震激励,取得了很好的效果^[28]。

3. 土木建筑

土木建筑领域也是有限元方法应用较为成熟的领域,桥梁、摩天大楼、大型网架、索膜结构、大坝等设计中要综合考虑环境对建筑物的影响,需要利用有限元方法进行抗震、抗风、抗碰撞等数值分析。太原理工大学土木系在李珠教授领导下的课题组采用 ANSYS 软件成功地对我国国家大剧院进行了结构分析^[29],开展了静力分析、多种载荷组合工况下的变形、结构抗震分析(响应谱分析、时间历程分析)并验证结构设计的合理性与可靠性,计算结果为工程设计及优化提供了可靠的理论依据。清华大学机械工程系曾攀教授在 ANSYS 平台上,进行了各种新型结构的方案设计和修改,创造性地设计了新型的双向拉索结构形式的悬索桥^[30],新型结构系统较传统结构系统在静力和动力特征方面都有很大的改善,新型双向拉索悬索桥主塔内的最大弯矩较传统结构系统有显著的降低,桥面内飘浮固有振型自振频率较传统结构系统有很大的提高。

4. 汽车

汽车领域中有限元应用具有明显的多物理场特点:在结构分析中,有车身、曲轴等关键汽车零部件变形和应力分析;在热计算中,有发动机外壳、涡轮增压器蜗壳温度场求解;在流场计算中,有汽车外流场、排气管流道设计等;在耦合场计算中,有噪声振动总成 NVH、散热片热应力分析等。从 2010 年至今,国际知名期刊用有限元方法对汽车优化分析的文章多达 2000 多篇,主要涉及汽车减重、安全性校核、新型材料的使用等^[31]。

1.3 新型有限元方法概述

正如文献[32]中提到:传统有限元理论成熟,原理简单,并且有强大的商业软件支持,在工程问题的数值模拟中占据着重要地位。在许多大型工程建设中有限元数值分析发挥了至关重要的作用,随着各种问题研究的不断深入,传统有限元方法在精度及收敛性上逐渐体现出不足,因此对传统有限元方法的每一点成功改进都将会产生深远的现实意义。近年来提出的新型有限元方法主要有以下几种。

1. 广义协调元

广义协调元是龙驭球院士于1987年首创的新型有限元单元^[33]。传统协调元在构造中要求太严,而非协调元又对单元间连接性放得太宽,龙驭球院士以追求平均意义上保证单元间的位移协调为目标,创造性地提出了广义协调元的概念。后经众多学者多年的不懈努力,广义协调元已发展出包括薄板、厚板、薄壳、等参四大类,数十种新单元^[34]。他还构造了克服剪切自锁的新型广义协调四边形厚板元^[35]及克服薄膜自锁的广义协调四边形薄膜元^[36],以及厚薄通用的三角形三节点平板壳元^[37],利用解析试函数法构造一个带旋转自由度广义协调超基膜元^[38]。数值算例表明,该类单元精度高、对网格畸变不敏感,显示出良好的性能,这一系列广义协调单元因适应性强而得到广泛的使用。对于困扰工程界的裂纹分析问题,龙驭球院士等利用构造的广义协调单元对平面切口问题进行了深入的分析^[39],推导了V形切口尖端的应力场基本解析式,对含切口解析单元的单元尺寸和应力项数等因素对分析结果的影响进行了系统的讨论。此外,他融入面积坐标及谱方法等技术,一些崭新的广义协调元方法也正在研究和讨论之中^[40]。

2. 基于理性有限元哲理的复合单元法

有限元是工程与科学计算中的一项伟大创造,它取得了很大的成功同时也遗留了不少问题。传统有限元技术发源于基本弹性力学问题求解,而在传统的弹性力学问题中,由于偏微分方程组解析解难以得到,研究者们通常利用凑配法求解,常用的有限元法也受到凑配法的深刻影响,对求解问题的解析部分特点的忽略,因此经常面对一些矛盾,如不可压缩材料的体积自锁、板壳弯曲单元的剪切自锁、薄膜自锁等问题。相对于有限元,边界元法采用解析解可以很容易地解决这些问题,但边界元求解软件难以商业化,也给边界元研究带来了瓶颈。受到边界元的启发并考虑到问题的解析性,钟万勰院士于1996年提出了理性有限元概念^[41],认为有限元方法论是只顾数学方便,仿佛只要采用完全低幂次多项式就可以,而对于力学要求则放在从属地位,以等参元为代表的常规有限元列式,强调了数学逼近与坐标变换的方便,缺乏力学概念的理性引导;理性有限元则以弹性力学方程的解为引导,直接在物理面内列式,再令以数学方法的逼近,可以取得很大的改善。曾攀教授在此基础上,研究了如何在单元内把一个经典解析位移场有效地嵌入到常规有限元位移场中,发展了一种新的单元技术——复合单元^[42,43],既具有常规有限元的灵活性又不丢失经典力学具有的高精度,从而大大地提高了数值分析精度,如今理性有限元已渐渐得到了广泛的应用^[44-46]。

3. 样条有限元

20世纪70年代初,样条函数理论在国际上迅速发展起来,它在计算物理、最优控制、计算机辅助设计以及计算力学领域中,得到了推广应用。样条函数具有显示表达式,可以促进积分和微分系数的计算。实际应用中样条函数的分段方法可以像传统有限元一样简化计算,局部逼近和尺度优势使得该方法可以用于更高模态的分析。Tanaka等^[47]根据小波伽辽金方法使用B样条小波求解结构力学问题。样条有限元法是样条函数与有限元相结合的产物,一般样条有限元法中均采用B样条函数。1974年,Antes提出了应用截断式三次B样条插值函数来构造位移场函数,求解了薄板弯曲问题^[48],但在一段时间内未得到进一步发展。直到1979

年,石钟慈院士应用截断三次、五次 B 样条插值函数来构造矩形板、斜板、弹性地基板的弯曲位移场函数,应用最小势能原理导出了样条有限元计算模型,并推广至梁板组合结构的计算问题,进而提出了样条有限元法^[49]。华中科技大学徐长发等于 1994 年深入研究了半正交 B 样条小波有限元法的数值稳定性,为半正交 B 样条小波有限元法的构造提供了理论依据^[50]。西安建筑科技大学黄义等基于样条小波构造三角形和四边形小波单元,分析了薄板与弹性地基板的静力变形特性,收敛快、精度高^[51]。Chen 等^[52]在 1995 年提出了一种将有限元方法多功能性与样条函数逼近精度和小波多分辨分析相结合的样条小波有限元法用于框架结构振动分析,样条函数的“两尺度关系”和相应多分辨分析的小波通过构造有限元域约束下的两个变换矩阵来促使单元矩阵的操作。与其他分段多项式相比,样条函数具有许多优点:待定系数少,连续性强,逼近精度和计算效率高,因此样条有限元法得到了迅速的发展。张佑启提出了样条有限条法^[53],秦荣提出了样条有限点法和样条子域法^[54-56],并将 B 样条函数推广至结构非线性、耦合体系分析中。沈鹏程在该领域内开展了一系列深入的研究^[57-61],系统地阐述了将 B 样条函数引入力学问题求解中,构建有限元代数方程组,详细讨论了载荷的处理等问题,并将控制理论引入样条有限元方法中。龙驭球院士采用样条函数插值基进行分区插值的基础上,提出了样条单元法^[34],构造了一系列的样条单元,成功求解了工程实践中的很多问题,取得了满意的效果。

在样条有限元的基础上,学者们进一步提出了样条小波有限元方法,Xiang 等^[62,63]基于区间 B 样条小波(BSWI)对一维杆梁结构进行了分析,使用二维张量积构造了 C_0 型板单元求解平面弹性力学和中厚板问题,用 BSWI 二维张量积尺度函数代替传统多项式插值函数去构造 BSWI 单元,结合传统有限元方法的多样性和 B 样条函数逼近性和基函数的高精度分析结构。随后,Xiang 等^[64]又使用 BSWI 分析了转子轴承系统的动态参数。Dong 等^[65]使用高精度模态参数识别方法和小波有限元模型对转子系统的裂纹深度和位置进行模拟,使用 BSWI 单元对转子系统建模,利用经验模式分解法和拉普拉斯小波获取高精度的模态参数。Oke 等^[66]使用 BSWI 单元利用欧拉伯努利梁和 Timoshenko 梁构造了相应的管单元,分析了复合管的自由振动问题。Han 等^[67]在 2005 年使用多变量小波有限元求解厚板弯曲问题,基于边界条件构造的插值小波函数用来代入厚板广义势能函数,多变量小波有限元的公式通过 Hillinger-Reissner 广义变分原理用两个独立的变量去推导而得。选择插值小波的尺度函数,是因为尺度函数的多尺度小波有着优良的分析 and 计算能力,插值小波对称并且计算精度比较高,构造插值小波的尺度函数可以满足厚板的边界条件要求。随后 Zhang 等^[68]基于广义变量原理和区间 B 样条小波构造了多变量 BSWI 曲壳和柱壳单元,该单元位移和应力单元是两个独立的变量,避免了计算广义应力过程的微分和积分算法。Zhang 等^[69]还结合蒙特卡罗方法和 BSWI 单元构造了 BSWI 随机有限元方法,随机有限元处理了由材料属性、静态载荷幅值等各种不确定因素引起的结构响应的问题。尺度函数和小波函数代替传统的多项式插值用做有限元的形函数构造单元,优势是有显示表达式,所以刚度矩阵可以很方便地计算出来。B 样条小波的良好逼近性保证了 BSWI 单元逼近精确解的高精度特点。基于以上优势,近年来研究 BSWI 单元各种性能的学者也越来越多^[70-73]。当然原始的样条函数是在整个实数区间,这种小波作为插值函数会带来不稳定问题,为了克服这种局限性,Quak 构造了新的 B 样条函数,可以快速分解和快速重构^[74]。