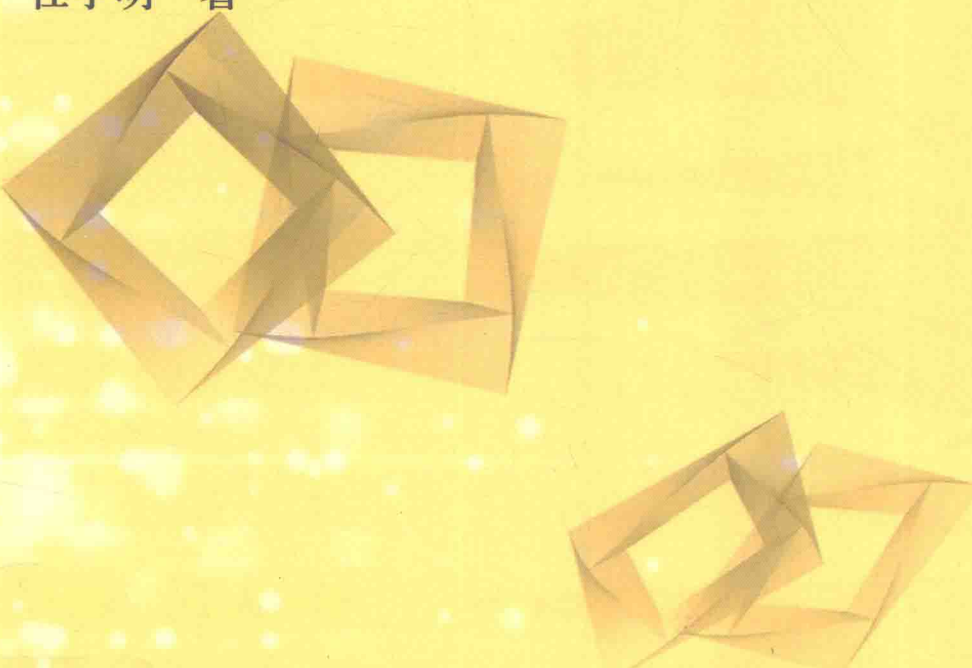
广义正则半群

任学明　著



科学出版社

广义正则半群

任学明 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书在半群理论的基础知识上，介绍了近几十年来半群理论在广义正则半群方面的若干最新研究成果. 全书由三部分组成，第一部分拟正则半群，介绍了E-矩形性拟正则半群、E-理想拟正则半群、Clifford 拟正则半群、拟矩形群、左 C-拟正则半群等半群的特性和代数结构；第二部分富足半群和 rpp 半群，介绍了超富足半群、$\mathcal{L}^*$-逆半群、$\mathcal{Q}^*$-逆半群、r-宽大半群等半群的性质、特征和结构. 第三部分 U-富足半群，介绍了 U-纯正半群、U-超富足半群、U-充足ω-半群的基本性质和代数结构.

本书适用于代数专业的研究生和有较好半群基础的高年级本科生，对研究信息科学和理论计算机科学中的许多问题会有帮助.

图书在版编目（CIP）数据

广义正则半群/任学明著. —北京：科学出版社，2017.9

ISBN 978-7-03-054616-6

Ⅰ. ①广… Ⅱ. ①任… Ⅲ. ①半群 Ⅳ. ①O152.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 238276 号

责任编辑：李 欣／责任校对：邹慧卿

责任印制：张 伟／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京九州迅驰传媒文化有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 9 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16

2017 年 9 月第一次印刷 印张：14 3/4

字数：297 000

定价：88.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

个 人 简 介

任学明，博士，二级教授，博士生导师，1954 年出生，2001 年博士毕业于香港中文大学. 1999 年被学校评为第一层次跨世纪人才，曾连续 4 届被学校聘为特聘教授. 从事半群代数理论及其应用的研究，主持国家自然科学基金项目和陕西省自然科学基金项目 7 项. 在 *Journal of Algebra*, *Communications in Algebra*, *Science in China*, *Semigroup Forum* 等国内外重要刊物上发表科研论文 90 余篇. 研究成果获省级自然科学奖一等奖、原冶金部科技进步奖三等奖和陕西省教育厅科技进步奖二等奖等.

序

任学明教授是我的学生, 也是多年来我的学术研究合作者之一. 我十分乐意为他的专著《广义正则半群》作此序. 由于时间仓促, 我只匆匆翻阅, 但其鲜明的特色和严肃的撰著, 给我留下了深刻的印象.

与同类著作相比, 该书有许多令人眼前一亮的特点.

特点一, 内容崭新. 该书是国内外较为全面系统地介绍广义正则半群研究 (直至最新研究成果) 的首部著作. 至今已经问世的国内外有关半群理论的专著, 绝对占优地集中在正则半群范围内, 而该书则着眼于正则半群的若干广义, 立足于最重要最常见的几类, 诸如, 拟正则半群; 借助格林关系的层层推广, 从富足半群、r-宽大半群、宽大半群, 到主右投射半群 (简称 rpp 半群) 的系列广义; 以及横向的, 由 $E(S)$ 代之以子集 U 的所谓 U-富足半群等. 详尽地介绍了它们的代数理论, 在经由严密的逻辑推理构建抽象理论的过程中, 大量构作性证明, 注重给出具体实例, 以诠释这些构作技巧.

特点二, 侧重鲜明. 该书在处理各种广义正则半群时, 自始至终沿着代数结构件以同余方法的途径展开.

特点三, 国内工作的展示较为全面. 本书较系统地收集、汇总和整理了近三十年国内关于广义正则半群研究的若干重要研究成果. 从该书的内容和参考文献中, 总体上大致可看出国内广义正则半群研究的发展历程, 同时也折射出作者力图使该书实现 "系统性、前沿性和高水平" 的基本理念, 这在该书的第二部分, 富足半群、r-宽大半群、主右投射半群, 以及第三部分, U-富足半群的阐述中, 表现尤为突出.

总之, 该书的出版无论是对于半群代数理论领域的人才培养, 还是学术研究, 都是十分及时并有价值的. 该书是一本可供代数专业研究生的 "半群理论" 课程使用的有特色的教材或参考书.

郭聿琦

2017 年 7 月于兰州大学

前　　言

在数学发展史上, “半群” 的研究虽然可追溯到 1904 年, 但其系统的研究却始于 20 世纪 50 年代, 可谓一比较年轻的代数学科了. 由于数学诸学科 (包括分析学科和代数学科)、信息科学、自动机、形式语言、符号动力学、图论、密码学等学科对各种类型半群的广泛应用, 以及计算机科学的巨大推动, 时至今日半群代数理论已经成为基础数学的一个重要分支.

回顾半群的发展历程, 正则半群是半群代数理论的主流领域. 20 世纪 70 年代末以来, 以正则半群为出发点, 在各种意义下向非正则半群范围推广得来的各种广义正则半群, 包括拟正则 (或 π-正则、毕竟正则、幂正则) 半群, 主右投射 (或 rpp) 半群, 富足半群, U-富足半群等, 也已形成半群研究的十分活跃的领域, 著名半群专家 S. Bogdanovic 的 *Semigroups with System of Subsemigroups* 就是关于拟正则半群的第一本专著. 实际上, 目前国际上广义正则半群理论呈现出空前的迅猛发展情势. 然而, 与此不相适应的是国内涉及该领域研究生教材极为匮乏, 迄今仍无相关领域的教材或适当的参考读物. 本书的初衷就是介绍近几十年来, 广义正则半群代数理论的最新研究成果, 希望代数专业的研究生和具有较好代数基础的高年级本科生能够使用而从中受益.

广义正则半群代数理论, 就本身而言, 内容深刻丰富, 且面广纷繁, 有关参考文献极其庞大, 想在有限的篇幅内囊括其全部纵然是不可能的事情. 尽管如此, 本书在内容的宏观框架选材上, 秉持 “系统性、前沿性和高水平” 的基本理念, 体现 “少而精”, 增加可读性, 达到由浅入深, 推理详尽, 自成体系, 让读者不必参考更多书籍便可顺利阅读的目的. 本书在内容的微观处理时, 注重讲述各类广义正则半群的代数结构乃至同余理论, 并适当添加了抽象半群的具体实例, 其原因是考虑到任何代数系统总以其对象的代数结构作为其主题.

本书由三部分组成. 第一部分是拟正则半群, 其中包括第 1 章至第 8 章, 介绍了 E-矩形性拟正则半群、E-理想拟正则半群、Clifford 拟正则半群、拟矩形群、左 C-拟正则半群、广义纯正群并半群等半群的特性和代数结构; 第二部分富足半群和 rpp 半群, 包括第 9 章至第 14 章, 介绍了超富足半群、纯正超富足半群、$\mathcal{L}^*$-逆半群、$\mathcal{Q}^*$-逆半群, r-宽大半群等半群的性质、特征、同余理论和结构. 第三部分 U-富足半群, 由第 15 章至 18 章组成, 介绍了 U-纯正半群、U^σ-富足半群、U-超富足半群、U-充足 ω-半群的基本性质和代数结构.

本书得到了国家自然科学基金委面上项目 (11471255) 的资助, 作者在此表示

衷心感谢；同时，向西安建筑科技大学数学系宫春梅副教授、袁莹博士、马思遥副教授、王艳副教授、李顺波副教授、孙燕副教授、殷清燕博士，以及山东科技大学数学与系统科学学院的王艳慧博士致谢，感谢她 (他) 们承担部分章节的编译工作．作者特别要向两位恩师 —— 兰州大学郭聿琦教授和香港中文大学岑嘉评教授表示深深的谢意，感谢他们长期的谆谆教诲和热情帮助．

限于作者的水平，书中难免有缺点和不妥之处，热忱欢迎读者惠予指正．

作　者

2017 年 6 月

目　录

第二部分 富足半群和 rpp 半群

第三部分　U-富足半群

第一部分

拟正则半群

第 1 章　E-矩形性拟正则半群

Von Neumann 意义上的正则性概念于 1936 年在环论中建立 [1] 不久, 平行于这种正则环, 正则半群的研究就开始了, 例如文献 [2]. 正则半群类及其若干子类 (诸如纯整半群类、逆半群类、完全正则半群类等) 的研究已经成为半群代数理论研究中的一个主流方向. 从 20 世纪 70 年代末开始, 为人们所关注的所谓拟正则 (或称幂正则、π-正则) 半群是目前非正则半群研究中的一个很活跃的领域. 本章在 1.1 节中定义了一类拟正则半群, 所谓 E-矩形性拟正则半群, 给出了它的若干特征和特例; 在 1.2 节中, 特别地, 给出了这类半群的 Green (格林) 关系上的特征; 在 1.3 节中讨论了它具左、右 E-矩形性的特殊情形; 最后, 在 1.4 节中建立了它们的结构及同构定理.

1.1　定义, 一般特征与若干特例

半群 S 的元素 a 称为正则的, 如果存在 $x \in S$, 使得 $axa = a$; 半群 S 的元素 a 称为拟正则的, 如果存在 $n \in N$ 使得 a^n 为 S 的正则元; 半群 S 称为正则 (拟正则) 的, 如果 S 的每个元素都正则 (拟正则).

仅含幂等元的半群 S 称为带, 由交换性的两个极端情形

$$(\forall a, b \in S) \quad ab = ba$$

与

$$(\forall a, b \in S) \quad ab = ba \Rightarrow a = b$$

(等价地, $(\forall a, b, c \in S)\ \ abc = ac$, 或 $(\forall a, b \in S)\ \ aba = a$) 定义起来的两类带分别称为交换带 (半格) 和矩形带.

半群 S 的元素 a 称为挠 (周期) 的, 如果存在 $n \in N$ 使得 a^n 为 S 的幂等元 (即 $|\langle a \rangle| < \infty$, 其中 $\langle a \rangle$ 表示 a 生成的单演 (循环) 半群); 仅含挠元的半群称为挠 (周期) 半群; 半群 S 称为 Archimedes 的, 如果关于任意 $a, b \in S$, 存在 $n \in N$, 使得 $a^n \in SbS$.

半群 S 的非空子集 I(子半群 B) 称为 S 的理想 (双理想), 如果 $SI \cup IS \subseteq I$ $(BSB \subseteq B)$.

定理 1.1　令 S 为半群, E 为其幂等元集. 则下列诸款等价:

(i) $E \neq \varnothing$, 且 S 为强 Archimedes 的, 即

$$(\forall a, b \in S)(\exists n \in N) \quad a^n \in \langle a \rangle b \langle a \rangle;$$

(ii) S 为挠的, 且

$$(\forall e \in E)(\forall x \in S) \quad exe = e;$$

(iii) S 为挠的, E 为 S 的单子半群, 且存在 $e \in E$ 使得 $\{e\}$ 为 S 的双理想;

(iv) S 为挠的, 且

$$(\forall f, g \in E)(\forall x \in S) \quad fxg = fg;$$

(v) S 为挠的, E 为矩形带, 且 E 为 S 的双理想;

(vi) S 为挠的, E 为矩形带, 且 E 为 S 的理想;

(vii) $(\forall a \in S)(\exists m \in N)(\forall x \in S) \quad a^m x a^m = a^m$;

(viii) $(\forall a \in S)(\exists i, j, k \in N)(\forall x \in S) \quad a^i x a^j = a^k$.

证明　若 S 为强 Archimedes 的, 则关于所有 $e \in E, x \in S$, 有 $exe = e$, 从而 $xe, ex \in E$, 即 E 为 S 的理想. 又由 S 的强 Archimedes 性, 关于所有 $a \in S$, 存在 $k \in N$, 使得 $a^k \in \langle a \rangle e \langle a \rangle$, 由 E 为 S 的理想知 $a^k \in E$, 即 a 为挠元, 从而 S 为挠半群. 这证明了 (i)⇒(ii).

若挠半群 S 满足

$$(\forall e \in E)(\forall x \in S) \quad exe = e,$$

则 E 的每一单元集为 S 的双理想, 而且取所有 $x \in E$ 时, 可知 E 为矩形带, 因此 E 为 S 的单子半群. 这就证明了 (ii)⇒(iii).

若在挠半群 S 中, 存在 $e \in E$, 使得 $\{e\}$ 为 S 的双理想, 则 $\{e\}$ 显然为极小双理想, 因此关于 S 中任意 $u, v, \{uev\}$ 都是 S 的极小双理想 [8], 但 E 为单半群, 从而 $E = EeE \subseteq SeS$, 于是 E 中元都构成单元双理想, 即关于所有 $e' \in E, x \in S$, 有 $e'xe' = e'$, 因此关于所有 $f, g \in E, x \in S$ 有

$$fxg = fx(gfg) = (fxgf)g = fg.$$

这证明了 (iii)⇒(iv).

若在挠半群 S 中, 关于所有 $f, g \in E, x \in S$, 有 $fxg = fg$, 则, 特别地, 取 $x = gf$ 时, 有 $(fg)^2 = fg$, 因此, E 为带而且显然为矩形带, 由 $ESE \subseteq E^2 = E$, E 为 S 的双理想. 这证明了 (iv)⇒(v).

若 E 为挠半群 S 的双理想, 即关于所有 $e, f \in E, x \in S$, 存在 $g \in E$, 使得 $exf = g$, 特别地, 当 $e = f$ 时, 有

$$exe = e^2xe^2 = ege = e.$$

后一等号用到带 E 的矩形性. 于是 $ex, xe \in E$, 即 E 为理想. 这证明了 (v)⇒(vi).

若 S 为挠半群, 则关于所有 $a \in S$, 存在 $m \in N$, 使得 $a^m \in E$, 再由 E 为 S 的理想, 关于所有 $x \in S$ 有

$$a^m x a^m = e \in E.$$

于是

$$a^m x a^m = (a^m)^2 x (a^m)^2 = a^m e a^m = a^m.$$

最后一个等号用到 E 的矩形性. 这证明了 (vi)⇒(vii).

(vii) ⇒(viii) 是显然的.

若

$$(\forall a \in S)(\exists i, j, k \in N)(\forall x \in S) \quad a^i x a^j = a^k,$$

则 S 为强 Archimedes 的, 而且取 $x = a^l$ 使得 $i + j + l \neq k$ 时, 知单演半群 $\langle a \rangle$ 有限, 即 a 为挠元, 从而 E 不空. 这又证明了 (viii)⇒(i).

由上定理的款 (vii) 知, 这种半群是拟正则的, 款 (iv) 表现了它的 E-矩形性 (半群 S 称为矩形性的, 如果

$$(\forall x, y, z \in S) \quad xyz = xz).$$

于是我们给出如下定义.

定义 1.1 满足定理 1.1 八款中任一款的半群称为 E-矩形性拟正则半群.

推论 1.2 E-矩形性拟正则半群 S 的幂等元集 E 为 S 的核, 即极小理想 (由 E 为矩形带和 E 为 S 的理想可知).

推论 1.3 半群 S 为 E-矩形性拟正则半群, 当且仅当 S 为矩形带的幂零元半群–理想扩张 [8] (幂零元半群是指每一元素都幂零的带零半群).

推论 1.4 E-矩形性拟正则半群 S 是正则的, 当且仅当 S 为矩形带, 且此时, 显然 S 为完全正则的, 即 S 的每一元素属于 S 的一个子群.

推论 1.5 E-矩形性拟正则半群不含非平凡幺半群 (monoid).

推论 1.6 E-矩形性拟正则半群是完全拟正则的, 即它的每一元素都有一个幂属于 S 的一个子群.

推论 1.7 E-矩形性拟正则半群是单演的, 当且仅当 S 为幂零单演半群 (存在 $n \in N$ 使得 $S^n = \{0\}$ 的带零半群 S 称为幂零的).

推论 1.8 E-矩形性拟正则半群是幂零元的, 当且仅当 $|E| = 1$.

双理想是通常诸理想概念的推广, 还可以将双理想再推广到 (m, n)-理想 [8], 其中 $m, n \in N^0$. 半群 S 的子半群 A 称为 S 的一个 (m, n)-理想, $m, n \in N^0$, 如果 $A^m S A^n \subseteq A$. 半群 S 称为 (m, n)-理想半群, 如果 S 的每一个子半群都是 S 的 (m, n)-理想.

定理 1.9 (m,n)-理想半群常为 E-矩形性拟正则半群; 但反之不然.

证明 由[8]知, (m,n)-理想半群是挠的, 其 E 为矩形带, 且为理想. 据定义 1.1 和定理 1.1, S 为 E-矩形性拟正则半群.

反之, 令 $\{S_i|i\in N\}$ 为一族半群, 其中 S_i 为 i 阶幂零单演半群 $\langle a_i\rangle, i\in N$. 令 S 为带零“0”的半群, 同时

$$S\backslash\{0\}=\dot{\bigcup}_{i\in N}S_i\backslash\{0_i\},$$

其中, $\dot{\cup}$ 为无交并, 0_i 为 S_i 的零元, $i\in N$, 且

$$a_i^1=0,\quad i\in N,$$

$$a_i^m a_j^n=a_k^{m+n},\quad k=\min\{i,j\}.$$

易知 S 在上运算下成一交换半群, 且是幂零元的, 因此 S 为一 E-矩形性拟正则半群. 但它关于所有 $m,n\in N$ 都不是 (m,n)-理想半群, 这是因为关于每一对 $m,n\in N$, 取 $i_0>m+n+2$, 便有

$$a_{i_0}^m a_{i_0-1}a_{i_0}^n=a_{i_0-1}^{m+n+1}\in S_{i_0-1}\backslash\{0_{i_0-1}\},$$

因此, 关于作为 S 的子半群的 $\langle a_{i_0}\rangle$, 就有

$$\langle a_{i_0}\rangle^m S\langle a_{i_0}\rangle^n\nsubseteq\langle a_{i_0}\rangle.$$

于是, S 不是 (m,n)-理想半群.

注解 1.1 E-矩形性拟正则半群类除了以 (m,n)-理想半群类为其真子类外, 据推论又知, 它还以矩形带类和幂零元半群类为其两个极端情形. 因此, 特别地, 它以具理想化子条件的半群[5] 类为其真子类, 实际上这一类型的半群是局部幂零的 (每一有限生成子半群都幂零的带零半群), 从而是幂零元的.

1.2 格林关系上的特征

引理 1.10 令 S 为 E-矩形性拟正则半群, E 为其幂等元集. 则

(i) $\mathcal{L}(S)=\mathcal{L}(E)\cup 1_{\bar{E}}$;

(ii) $\mathcal{R}(S)=\mathcal{R}(E)\cup 1_{\bar{E}}$;

(iii) $\mathcal{H}(S)=1_S$;

(iv) $\mathcal{D}(S)=\mathcal{L}(S)$, 且

$$\mathcal{D}(S)=E\times E\cup 1_{\bar{E}}.$$

实则我们还有如下结论.

定理 1.11 令 S 为半群, E 为其幂等元集. 则 S 为 E-矩形性拟正则半群, 当且仅当

(i) S 为拟正则的, S 含极小双理想, 且 $\mathcal{D}(S)=E\times E\cup 1_{\bar{E}}, \mathcal{L}(S)=\mathcal{L}(E)\cup 1_{\bar{E}}, \mathcal{H}(S)=1_S$.

或,

(ii) S 为拟正则的, S 含极小双理想, 且 $\mathcal{D}(S)=E\times E\cup 1_{\bar{E}}, \mathcal{R}(S)=\mathcal{R}(E)\cup 1_{\bar{E}}, \mathcal{H}(S)=1_S$.

定理 1.12 令 S 为半群, E 为其幂等元集. 则 S 为 E-矩形性拟正则半群, 当且仅当

(i) S 为挠半群, S 的极小左理想是且仅是 $Se, e\in E$, 且 $\mathcal{L}(S)\subseteq E\times E\cup\bar{E}\times\bar{E}$.

或,

(ii) S 为挠半群, S 的极小右理想是且仅是 $eS, e\in E$, 且 $\mathcal{R}(S)\subseteq E\times E\cup\bar{E}\times\bar{E}$.

1.3 左、右 E-矩形性

引理 1.13 若 S 为 E-矩形性拟正则半群, E 为其幂等元集, 则令

$$P(e)=\{x\in S\mid xe=ex=e\},\quad e\in E$$

时, 有

(a) $P(e)$ 为幂零元半群, $e\in E$;

(b) $P(e)\cap P(f)=\varnothing, e, f\in E, e\neq f$;

(c) $S=\bigcup_{e\in E}P(e)$.

注解 1.2 引理 1.13 的反面不真, 即, 半群 S 为幂零元子半群的无交并时, S 未必为 E-矩形性拟正则半群.

例如, $S=\{a,e,0\}$ 为乘法表如下的半群:

$\cdot$	a	e	0
a	e	e	0
e	e	e	0
0	0	0	0

显然 $\{a,e\},\{0\}$ 为 S 的幂零元子半群, 但 $e\cdot 0\cdot e=0\neq e$, 即 S 不是 E-矩形性拟正则的.

注解 1.3 引理 1.13 中 E-矩形性拟正则半群 S 的无交并分解 $S=\bigcup_{e\in E}P(e)$ 中, S 的分划 $\{P(e)\mid e\in E\}$ 所相应的等价关系未必为同余, 即未必关于所有 $e,f\in$