



普通高等学校  
电类规划教材  
电气自动化

# 线性系统 理论与设计

©韩敏 编著



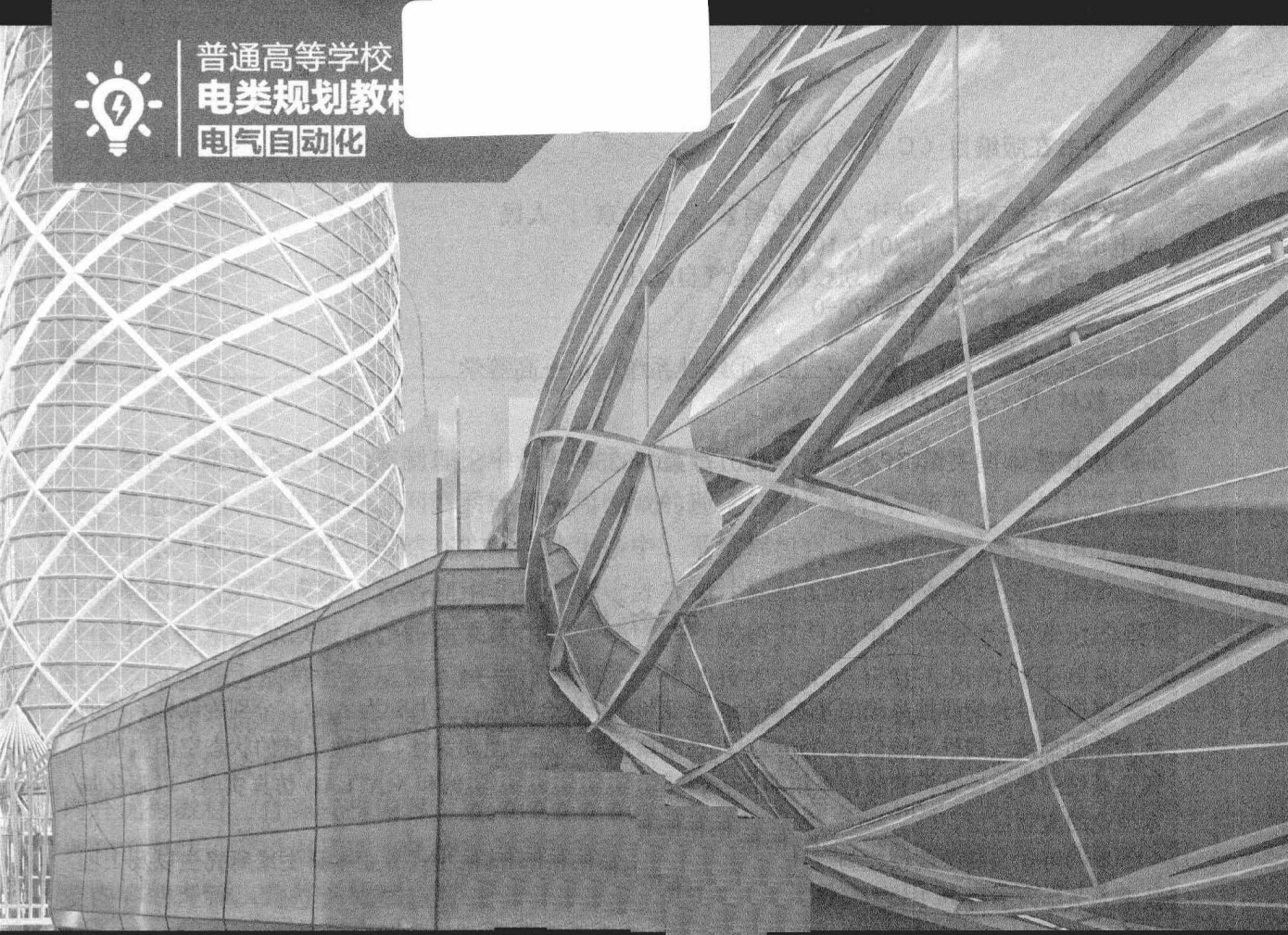
中国工信出版集团



人民邮电出版社  
POSTS & TELECOM PRESS



普通高等学校  
电类规划教材  
电气自动化



# 线性系统 理论与设计



◎韩敏 编著

人民邮电出版社

北京

## 图书在版编目 (C I P) 数据

线性系统理论与设计 / 韩敏编著. — 北京: 人民邮电出版社, 2017. 8(2017. 10重印)  
普通高等学校电类规划教材. 电气自动化  
ISBN 978-7-115-45670-0

I. ①线… II. ①韩… III. ①线性系统理论—高等学校—教材 IV. ①0231.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第096350号

## 内 容 提 要

本书重点介绍线性系统的基本概念、原理和系统综合方法。全书分为6章,分别为线性系统的状态空间描述、线性系统的运动分析、线性系统的能控性和能观测性、线性系统的状态空间实现、线性系统的稳定性分析和线性系统的综合。每章都给出了应用实例和MATLAB仿真实验,以强化基本理论的实际应用。

本书可作为高等院校控制科学与工程专业教材,也可供其他相关专业本科生或研究生以及工程技术人员学习参考。

◆ 编 著 韩 敏  
责任编辑 张 斌  
责任印制 陈 犇

◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市丰台区成寿寺路11号  
邮编 100164 电子邮件 315@ptpress.com.cn  
网址 <http://www.ptpress.com.cn>  
固安县铭成印刷有限公司印刷

◆ 开本: 787×1092 1/16  
印张: 15.5 2017年8月第1版  
字数: 365千字 2017年10月河北第2次印刷

定价: 49.80元

读者服务热线: (010) 81055256 印装质量热线: (010) 81055316

反盗版热线: (010) 81055315

广告经营许可证: 京东工商广登字 20170147号

线性系统理论是现代控制理论中最基本、最重要、最成熟的一个分支，是生产过程控制、信息处理、通信系统、网络系统等应用领域的理论基础。线性系统是系统与控制科学领域中基本的研究对象。虽然在实际生产生活中，系统都包含非线性因素，但是由于非线性理论的研究并不成熟，直接利用非线性理论分析和计算可能造成较大的误差。因此，通常使用线性系统加以近似，线性系统由此得到了广泛的研究与应用。线性系统理论的基本概念、原理和方法等，是从事系统与控制相关工作的技术人员、研究人员的理论基础，国内外很多高等院校都将线性系统理论作为控制科学与工程等专业的基础课程。

本书是编者在多年的教学讲义基础上编写的，为适应理工科学生教学的需求，借鉴国内外优秀教材，合理安排内容，重点介绍了线性系统状态空间分析和综合方法。本书的定理和重要结论，给出了适当的推导和证明过程，旨在培养学生的逻辑推理能力，加深对重要内容的理解。此外，每章最后一节介绍常用的 MATLAB 函数，应用 MATLAB R2014a 编写实际系统仿真程序，应用 MATLAB 进行计算机辅助教学，注重理论与实际结合，培养学生分析和解决问题的能力。

全书共分为 6 章：第 1 章介绍线性系统的状态空间描述；第 2 章介绍线性系统的运动分析；第 3 章介绍线性系统的能控性和能观测性；第 4 章介绍线性系统的状态空间实现；第 5 章介绍线性系统的稳定性分析；第 6 章介绍线性系统的综合。附录 A 给出了各章习题参考答案，附录 B 给出了全书主要公式符号对照表。

本书由韩敏编著，第 1、2、3 章由韩敏编写，第 4 章由郑丹晨编写，第 5、6 章由任伟杰编写，全书由韩敏统稿审定。在书稿编写过程中，参编作者多次研究讨论，张淑慧、成小林对书稿和习题解答进行了仔细核对，在此表示感谢。

本书的出版得到了大连理工大学“研究生教学改革与研究基金”（项目编号：jg2014008）的资助。

由于编者水平有限，书中难免存在错误和不足之处，衷心希望读者批评指正。

编者

2016 年 12 月

第 1 章 线性系统的状态空间描述 .....	1	1.9.1 MATLAB 函数简介 .....	36
1.1 状态空间描述 .....	1	1.9.2 MATLAB 仿真实例 .....	38
1.1.1 状态和状态空间 .....	1	习 题 .....	40
1.1.2 线性系统的状态空间描述 .....	2	第 2 章 线性系统的运动分析 .....	42
1.1.3 状态变量图 .....	4	2.1 线性定常系统的齐次解 (自由解)	
1.2 由系统框图建立状态空间描述 .....	6	.....	42
1.3 由系统机理建立状态空间描述 .....	9	2.2 矩阵指数函数 .....	44
1.4 由输入输出建立状态空间描述及标		2.2.1 矩阵指数函数的定义 .....	44
准型实现 .....	11	2.2.2 矩阵指数函数的性质 .....	44
1.4.1 能控标准型实现 .....	12	2.2.3 矩阵指数函数的计算 .....	47
1.4.2 能观测标准型实现 .....	15	2.3 线性定常系统的非齐次解 .....	53
1.4.3 约当标准型实现 .....	16	2.4 线性定常系统的状态转移矩阵 .....	
1.5 由状态空间描述求传递函数 .....	20	.....	55
1.5.1 单输入单输出系统 .....	21	2.4.1 状态转移矩阵的定义 .....	55
1.5.2 多输入多输出系统 .....	21	2.4.2 状态转移矩阵的性质 .....	57
1.6 状态空间的线性变换 .....	22	2.4.3 由状态转移矩阵求系统矩阵	
1.6.1 状态变量的线性变换 .....	22	.....	58
1.6.2 系统特征结构的不变性 .....	23	2.5 线性时变系统的运动分析 .....	60
1.6.3 状态空间描述变换为约		2.5.1 线性时变系统的状态转移	
当标准型 .....	24	矩阵的定义 .....	60
1.7 组合系统的状态空间描述 .....	30	2.5.2 线性时变系统的状态转移	
1.7.1 并联结构的组合系统 .....	30	矩阵的性质 .....	61
1.7.2 串联结构的组合系统 .....	31	2.5.3 线性时变系统状态方程的求解	
1.7.3 反馈结构的组合系统 .....	32	.....	61
1.8 离散时间线性系统的状态空		2.6 线性连续系统的时间离散化 .....	62
间描述 .....	34	2.6.1 线性定常连续系统的离散化	
1.8.1 离散系统状态空间描述		.....	64
的建立 .....	34	2.6.2 线性时变连续系统的离散化	
1.8.2 由状态空间描述求脉冲		.....	65
传递函数矩阵 .....	35	2.7 线性离散系统的运动分析 .....	66
1.9 应用 MATLAB 建立线性系		2.7.1 线性定常离散系统状态方程	
统状态空间描述 .....	36	的求解 .....	66

2.7.2 线性时变离散系统状态方程的求解 .....	69	3.7 能控标准型和能观测标准型 .....	108
2.8 应用 MATLAB 进行线性系统的运动分析 .....	70	3.7.1 单输入单输出系统的标准型 .....	109
2.8.1 MATLAB 函数简介 .....	70	3.7.2 多输入多输出系统的标准型 .....	113
2.8.2 MATLAB 仿真实例 .....	71	3.8 连续时间线性定常系统的结构分解 .....	121
习题 .....	73	3.8.1 按能控性的系统结构分解 .....	121
<b>第3章 线性系统的能控性和能观测性</b> .....	<b>76</b>	3.8.2 按能观测性的系统结构分解 .....	124
3.1 能控性和能观测性的直观讨论 .....	76	3.8.3 按能控性和能观测性的系统结构分解 .....	125
3.2 连续时间线性定常系统的能控性判据 .....	77	3.9 应用 MATLAB 分析线性系统能控性和能观测性 .....	129
3.2.1 能控性的定义 .....	77	3.9.1 MATLAB 函数简介 .....	129
3.2.2 格拉姆矩阵判据 .....	78	3.9.2 MATLAB 仿真实例 .....	130
3.2.3 秩判据 .....	79	习题 .....	141
3.2.4 PBH 判据 .....	82	<b>第4章 线性系统的状态空间实现</b> .....	<b>145</b>
3.2.5 约当标准型判据 .....	84	4.1 传递函数实现条件 .....	145
3.3 连续时间线性定常系统的能观测性判据 .....	88	4.2 最小实现及其性质 .....	149
3.3.1 能观测性的定义 .....	88	4.3 最小实现的解法 .....	153
3.3.2 格拉姆矩阵判据 .....	89	4.3.1 降阶法 .....	154
3.3.3 秩判据 .....	90	4.3.2 直接求取约当标准型最小实现的方法 .....	158
3.3.4 PBH 判据 .....	91	4.4 应用 MATLAB 研究线性系统的最小实现 .....	160
3.3.5 约当标准型判据 .....	93	4.4.1 MATLAB 函数简介 .....	160
3.4 离散时间线性定常系统的能控性和能观测性 .....	96	4.4.2 MATLAB 仿真实例 .....	160
3.4.1 能控性的定义和判据 .....	96	习题 .....	162
3.4.2 能观测性的定义和判据 .....	99	<b>第5章 线性系统的稳定性分析</b> .....	<b>164</b>
3.4.3 采样周期对离散时间线性系统能控性和能观测性的影响 .....	102	5.1 李雅普诺夫稳定性的定义 .....	164
3.5 线性系统能控性与能观测性的对偶关系 .....	105	5.1.1 平衡状态和一般状态 .....	164
3.5.1 对偶系统 .....	105	5.1.2 李雅普诺夫意义下的稳定 .....	165
3.5.2 对偶原理 .....	106	5.2 李雅普诺夫第一方法 .....	167
3.6 传递函数中零极点对消与能控性和能观测性的关系 .....	107	5.2.1 线性定常系统的稳定性分析 .....	167

5.2.2 非线性系统的稳定性分析 …	6.1.3 状态反馈对能控性和能观
…………… 169	测性的影响 …………… 197
5.3 李雅普诺夫第二方法 …………… 170	6.2 输出反馈与极点配置 …………… 198
5.3.1 预备知识 …………… 170	6.2.1 输出反馈的系统结构与数
5.3.2 李雅普诺夫第二方法的几	学描述 …………… 199
个定理 …………… 172	6.2.2 输出反馈的极点配置 …… 200
5.4 线性系统稳定性分析 …………… 176	6.2.3 输出反馈对能控性和能观
5.4.1 线性定常连续系统稳定性	测性的影响 …………… 203
分析 …………… 176	6.3 线性系统的镇定问题 …………… 203
5.4.2 线性定常离散系统稳定性	6.4 状态重构与状态观测器的设计 …
分析 …………… 179	…………… 205
5.5 非线性系统李雅普诺夫稳定性	6.4.1 全维状态观测器 …………… 205
分析 …………… 182	6.4.2 降维状态观测器 …………… 208
5.5.1 克拉索夫斯基法 …………… 182	6.4.3 分离定理 …………… 213
5.5.2 变量梯度法 …………… 184	6.5 多变量系统的解耦控制 …………… 214
5.6 应用 MATLAB 分析线性系统稳	6.5.1 解耦的基本思想 …………… 214
定性 …………… 187	6.5.2 常见的解耦方法 …………… 215
5.6.1 MATLAB 函数简介 …………… 187	6.6 应用 MATLAB 实现线性系统综合
5.6.2 MATLAB 仿真实例 …………… 187	…………… 219
习 题 …………… 191	6.6.1 MATLAB 函数简介 …………… 219
<b>第 6 章 线性系统的综合</b> …………… 193	6.6.2 MATLAB 仿真实例 …………… 220
6.1 状态反馈与极点配置 …………… 193	习 题 …………… 224
6.1.1 状态反馈的系统结构与数	附录 A 习题参考答案 …………… 227
学描述 …………… 193	附录 B 主要公式符号对照表 …………… 237
6.1.2 状态反馈的极点配置 …… 194	参考文献 …………… 239

系统的数学模型是分析与综合系统的基础。在经典控制理论中,通常采用高阶常微分方程或传递函数作为描述系统的数学模型,它们能够反映系统输入与输出之间的关系,但不能反映系统内部变量的变化,称为系统的“外部描述”,一般只能用于处理单输入单输出系统。

现代控制理论引入了状态空间的概念,采用由状态变量构成的一阶微分方程组作为描述系统的数学模型,它能够反映系统内部变量的变化,从而描述了系统内部变量、输入变量与输出变量之间的关系,既揭示了系统内部的运动规律,又反映了系统的外部特性,称为系统的“内部描述”,能够用于处理多输入多输出系统。因此,建立线性系统的状态空间描述,即状态空间中的数学模型,是对线性系统进行分析和综合的前提。

本章主要介绍线性定常连续系统的状态空间描述及其线性变换、线性定常离散系统的状态空间描述、线性定常系统状态空间描述的 MATLAB 实现等。

## 1.1 状态空间描述

在现代控制理论中,采用状态空间表达式作为系统的数学模型。“状态”“状态空间”以及“状态空间描述”等基本概念是线性系统分析的基础。因此,本节主要介绍状态空间描述的基本概念。

### 1.1.1 状态和状态空间

状态和状态空间不是一组新的概念,它们已经广泛应用于质点和刚体运动学中。随着将状态和状态空间引入到控制理论中,并应用于描述一般意义下系统的动态过程,状态空间的研究具有更为一般的含义。

#### 1. 状态和状态变量

状态是指描述系统过去、现在和将来行为的变量。状态变量是指能够完全描述系统运动状态的数量最少的一组变量。如果一个动态系统可以用  $n$  阶微分方程进行描述,则该系统具有  $n$  个状态变量。系统的运动状态可以由这  $n$  个状态变量进行表征,当这  $n$  个状态变量的时间响应都求得时,就可以清楚地揭示系统的运动状态。对于系统的状态变量有以下说明:

(1) 状态变量完全描述系统运动状态,减少其中任何一个变量都将破坏描述系统运动状态的完整性。如果给定这组变量在  $t = t_0$  时刻的值和  $t \geq t_0$  时的输入信号,则系统在  $t \geq t_0$  的任何瞬时行为就可以完全确定。

(2) 状态变量是相互独立的,即在能完全描述系统运动状态的变量组中变量个数最少,增加任何一个其他变量都是描述系统运动状态所不需要的。

(3) 状态变量个数与微分方程的阶数相同,对于物理系统而言,其状态变量的个数等于系统中独立储能元件的个数。



(4)对于同一系统,状态变量选取不是唯一的。可以有多组状态变量的选取,只要保证它们是能够完全描述系统运动状态的最少的一组变量。

## 2. 状态向量和状态空间

如果系统的  $n$  个状态变量表示为  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , 则以状态变量为分量组成的向量称为系统的状态向量, 记为

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \cdots \quad x_n(t)]^T \quad (1.1)$$

以系统的  $n$  个状态变量  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  为坐标轴构成的  $n$  维欧氏空间称为状态空间, 记为  $\mathbf{R}^n$ 。状态空间中每一点都表示状态变量的一组特定值, 即系统的一个特定状态。若初始时刻  $t_0$  的状态向量  $\mathbf{x}(t_0)$  为状态空间的初始点, 则随着时间  $t$  的延伸, 当  $t \geq t_0$  时,  $\mathbf{x}(t)$  在状态空间中的发展轨迹称为状态轨迹, 如图 1.1 所示。状态轨迹的形状, 完全由系统在  $t_0$  时刻的初始状态和  $t \geq t_0$  时的输入以及系统的动力学特性唯一决定。

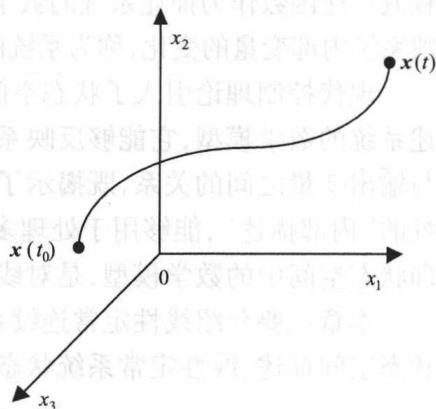


图 1.1 状态空间与状态轨迹

### 1.1.2 线性系统的状态空间描述

对于一般系统, 状态空间可以用状态变量构成的输入、输出与状态之间的关系方程组进行描述, 记为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (1.2)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (1.3)$$

其中,  $\mathbf{x}$  为  $n$  维状态向量,  $\mathbf{u}$  为  $p$  维输入向量,  $\mathbf{y}$  为  $q$  维输出向量,  $\mathbf{f}(\cdot)$  和  $\mathbf{g}(\cdot)$  分别表示  $n$  维和  $q$  维的任意向量函数。通常, 式(1.2)称为状态方程, 式(1.3)称为输出方程。状态方程和输出方程构成了系统的状态空间描述, 或称为状态空间表达式。如果向量函数  $\mathbf{f}(\cdot)$  和  $\mathbf{g}(\cdot)$  的所有元素都是状态变量和输入变量的线性函数, 则称系统为线性系统, 否则为非线性系统。如果向量函数  $\mathbf{f}(\cdot)$  和  $\mathbf{g}(\cdot)$  中不显含时间变量  $t$ , 则称系统为定常系统, 否则为时变系统。

一般情况下, 单输入单输出线性定常系统的状态空间描述形式为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1u \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2u \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_nu \end{cases} \quad (1.4)$$

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + du \quad (1.5)$$

表示为矩阵形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (1.6)$$

$$y = \mathbf{c}\mathbf{x} + du \quad (1.7)$$

其中

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]$$

在上述状态空间描述中,  $\mathbf{A}$  为  $n \times n$  维系统矩阵,  $\mathbf{b}$  为  $n \times 1$  维输入向量或控制向量,  $\mathbf{c}$  为  $1 \times n$  维输出向量,  $d$  为直接传递系数。式(1.4)和式(1.6)称为状态方程,式(1.5)和式(1.7)称为输出方程。状态空间由状态方程和输出方程共同描述,两者缺一不可。

对于多输入多输出线性定常系统,状态空间描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \cdots + b_{1p}u_p \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \cdots + b_{2p}u_p \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \cdots + b_{np}u_p \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + d_{12}u_2 + \cdots + d_{1p}u_p \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n + d_{21}u_1 + d_{22}u_2 + \cdots + d_{2p}u_p \\ \vdots \\ y_q = c_{q1}x_1 + c_{q2}x_2 + \cdots + c_{qn}x_n + d_{q1}u_1 + d_{q2}u_2 + \cdots + d_{qp}u_p \end{cases} \quad (1.9)$$

表示为矩阵形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (1.10)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (1.11)$$

其中

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{q1} & d_{q2} & \cdots & d_{qp} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}$  为  $n \times n$  维系统矩阵,  $\mathbf{B}$  为  $n \times p$  维输入矩阵或控制矩阵,  $\mathbf{C}$  为  $q \times n$  维输出矩阵,  $\mathbf{D}$  为  $q \times p$

维直接传递矩阵。系统的状态空间描述由式(1.10)所示的状态方程和式(1.11)所示的输出方程构成。由于四个参数矩阵描述了状态空间表达式的全部内容,系统特性完全由它们所决定,因此也可以采用 $\Sigma(A, B, C, D)$ 表示线性系统的状态空间描述。

以上分析的对象是线性定常系统,式(1.10)和式(1.11)中的矩阵 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 和 $D$ 的元素既不依赖于输入、输出,也与时间无关。

对于线性时变系统,其状态空间描述为

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (1.12)$$

$$y = C(t)x + D(t)u \quad (1.13)$$

其中

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \cdots & b_{1p}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \cdots & b_{2p}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \cdots & b_{np}(t) \end{bmatrix}$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) & \cdots & c_{1n}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) & \cdots & c_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{q1}(t) & c_{q2}(t) & \cdots & c_{qn}(t) \end{bmatrix}, \quad D(t) = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & d_{12}(t) & \cdots & d_{1p}(t) \\ d_{21}(t) & d_{22}(t) & \cdots & d_{2p}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{q1}(t) & d_{q2}(t) & \cdots & d_{qp}(t) \end{bmatrix}$$

矩阵 $A(t)$ 、 $B(t)$ 、 $C(t)$ 和 $D(t)$ 中的元素部分或全部为时间 $t$ 的函数。

### 1.1.3 状态变量图

在线性系统的状态空间分析中,通常可以借助状态变量图来直观、形象地观察系统输入、输出以及各状态变量之间的信息传递关系。状态变量图包括积分器、加法器和放大器三种基本元件,如图1.2所示。其中,①为积分器,对输入信号进行积分运算;②为加法器,输出是所有输入信号的代数和,本书中为表示简单,通常省略“+”号、保留“-”号;③为放大器,将输入信号放大 $K$ 倍。可以通过以下方法绘制系统的状态变量图。

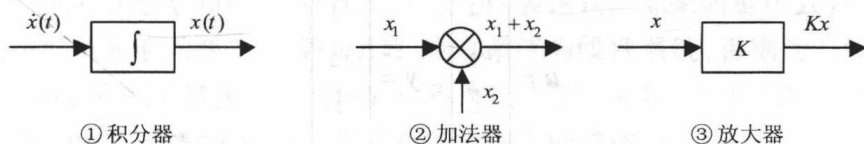


图 1.2 状态变量图的基本元件

(1) 绘制积分器:积分器的数量等于系统状态变量的数量,每个积分器的输出为某个状态变量。根据上述原则在适当的位置绘制出积分器。

(2) 绘制放大器和加法器:根据系统状态方程与输出方程绘制出相应的放大器和加法器。

(3) 元件的连接:用箭头将上述绘制的基本元件连接起来,即可得到系统的状态变量图。

通过上述三种基本元件即可绘制出系统状态空间描述的结构图。对于线性定常系统的状态空间描述

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

其状态变量图如图 1.3 所示。图中双线箭头表示向量信号,状态变量图既表征了输入对系统内部状态的因果关系,又反映了内部状态对输出的影响,因此状态空间描述是对系统的一种完整的描述。

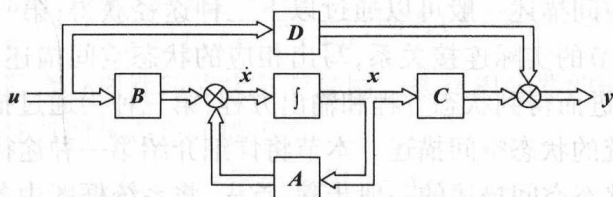


图 1.3 状态空间描述的状态变量图

**例 1.1** 对具有如下状态空间描述的线性定常系统

$$\dot{x} = 2x + 3u$$

$$y = x + u$$

求该系统的状态变量图。

**解** 系统的状态变量图如图 1.4 所示。

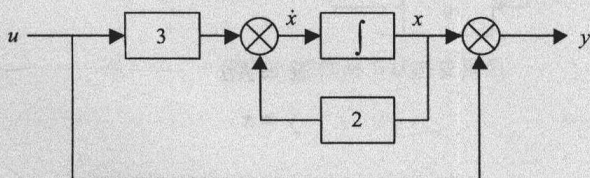


图 1.4 系统的状态变量图

**例 1.2** 已知某系统状态空间描述为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 2]x$$

求该系统的状态变量图。

**解** 系统的状态变量图如图 1.5 所示。

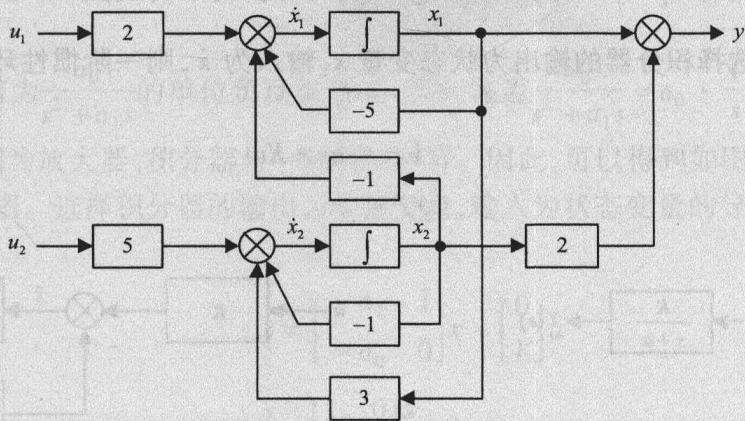


图 1.5 系统的状态变量图

## 1.2 由系统框图建立状态空间描述

线性系统的状态空间描述一般可以通过以下三种途径获得:第一种为通过系统框图建立,即根据系统各个环节的实际连接关系,写出相应的状态空间描述;第二种为通过分析系统的物理或化学机理,进而得到状态方程和输出方程;第三种为通过描述系统的高阶微分方程或传递函数建立系统的状态空间描述。本节将详细介绍第一种途径。

由系统框图建立状态空间描述的一般步骤:首先,将系统框图中各个环节变换成状态变量图,组成系统的状态变量图;然后,将积分器的输出端作为系统的一个状态变量,积分器的输入端为状态变量的导数;最后,根据系统状态变量图的信号传递关系写出系统的状态空间表达式。

下面将介绍由一些基本环节的系统框图建立状态空间描述。

### 1. 积分环节

积分环节的系统框图如图 1.6 所示,将  $K$  作为放大器部分提出,典型积分环节即为放大因子为  $K$  的放大器与积分器的乘积。因此,容易得到如图 1.7 所示的状态变量图。选择积分器的输出为状态变量  $x$ ,则积分器的输入为状态变量的导数  $\dot{x}$ ,积分环节的状态空间描述为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ku \\ y &= x\end{aligned}\quad (1.14)$$

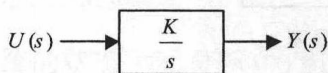


图 1.6 积分环节系统框图

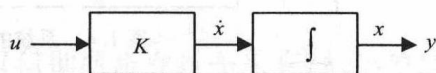


图 1.7 积分环节状态变量图

### 2. 一阶惯性环节

图 1.8 所示的系统为常见的一阶惯性环节,即  $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s+a}$ 。将  $K$  作为放大器部分提出,令  $\frac{Y(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{s+a}$ ,则有  $u_1 = \dot{y} + ay$ ,即  $\dot{y} = u_1 - ay$ 。因此,可以得到图 1.9 所示的一阶惯性环节状态变量图。选择积分器的输出为状态变量  $x$ ,输入为  $\dot{x}$ ,则一阶惯性环节的状态空间描述为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -ax + Ku \\ y &= x\end{aligned}\quad (1.15)$$

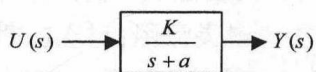


图 1.8 一阶惯性环节系统框图

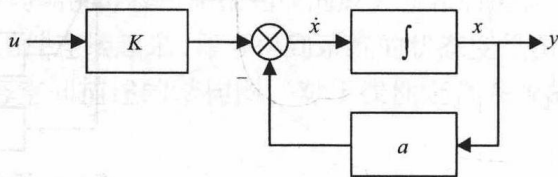


图 1.9 一阶惯性环节状态变量图

### 3. 一阶微分惯性环节

一阶微分惯性环节的系统框图如图 1.10 所示, 即  $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K(s+b)}{s+a}$ 。将  $K$  作为放大器部分提出, 令  $\frac{Y(s)}{U_1(s)} = \frac{s+b}{s+a} = 1 + \frac{b-a}{s+a}$ ,  $\frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = \frac{b-a}{s+a}$ , 则有  $(b-a)u_1 = \dot{y}_1 + ay_1$ 。因此, 可以得到如图 1.11 所示的一阶微分惯性环节状态变量图。选择积分器的输出为状态变量  $x$ , 输入为  $\dot{x}$ , 则一阶微分惯性环节的状态空间描述为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax + K(b-a)u \\ y &= x + Ku \end{aligned} \quad (1.16)$$

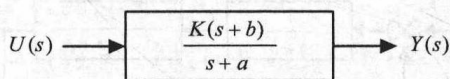


图 1.10 一阶微分惯性环节系统框图

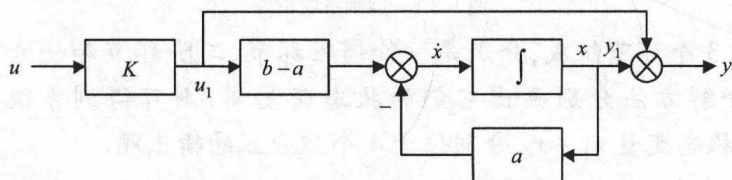


图 1.11 一阶微分惯性环节状态变量图

### 4. 二阶系统

二阶系统的框图如图 1.12 所示, 传递函数为

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s^2 + a_1s + a_0} = \frac{K}{a_0} \cdot \frac{a_0}{s^2 + a_1s + a_0} = \frac{K}{a_0} G_1(s) \quad (1.17)$$

将  $\frac{K}{a_0}$  作为放大器部分提出, 则  $G_1(s)$  可以表示为

$$G_1(s) = \frac{a_0}{s^2 + a_1s + a_0} = \frac{\frac{a_0}{s^2 + a_1s}}{1 + \frac{a_0}{s^2 + a_1s}} \quad (1.18)$$

$G_1(s)$  是前向通道为  $\frac{a_0}{s^2 + a_1s}$  的单位负反馈系统, 前向通道  $\frac{a_0}{s^2 + a_1s} = a_0 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s + a_1}$  可以分解成三个部分, 分别为放大器、积分器与一阶惯性环节。因此, 可以得到如图 1.13 所示的二阶系统的状态变量图。选择积分器的输出为状态变量, 输入为状态变量的导数, 则二阶系统的状态空间描述为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} u \quad (1.19)$$

$$y = [1 \quad 0] \mathbf{x}$$

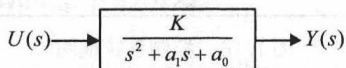


图 1.12 二阶系统的框图

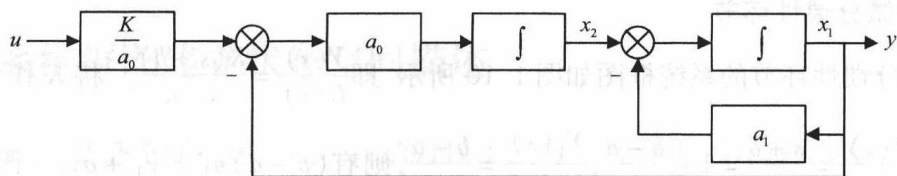


图 1.13 二阶系统的状态变量图

需要注意,上面得到的状态变量图并不是唯一的,其他环节也可以仿照上述方法得到。

**例 1.3** 图 1.14 所示的是一个控制系统的系统框图,试建立其状态空间描述。

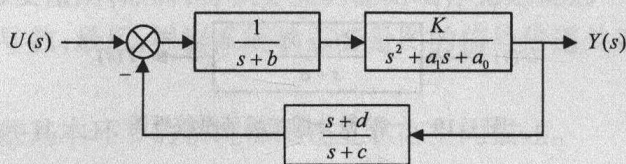


图 1.14 控制系统框图

**解** 该系统由 3 个环节组成,分别是一阶惯性环节、二阶环节和一阶微分惯性环节,按上述典型环节的分解方法分别画出它们的状态变量图,则可得到系统的状态变量图如图 1.15 所示,并设状态变量  $x_1 \sim x_4$  分别位于 4 个积分器的输出端。

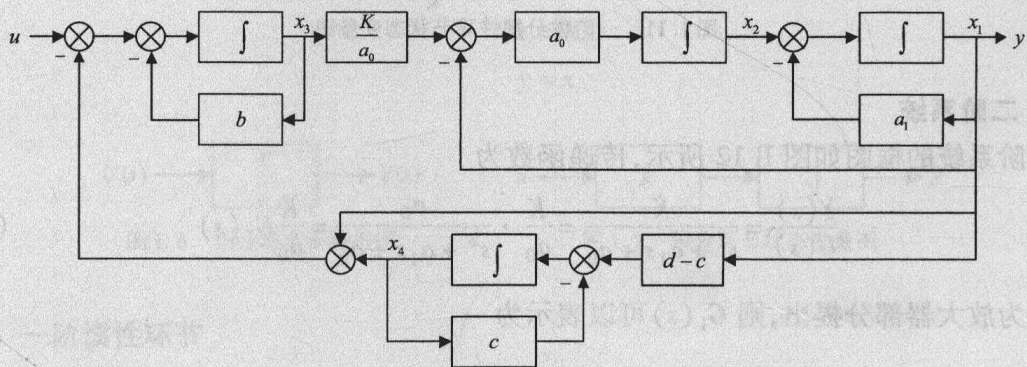


图 1.15 控制系统的状态变量图

根据图 1.15 得出系统状态空间描述为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 \\ -a_0 & 0 & K & 0 \\ -1 & 0 & -b & -1 \\ d-c & 0 & 0 & -c \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{x}$$

**例 1.4** 已知系统框图如图 1.16 所示,试建立其状态空间描述,并画出状态变量图。

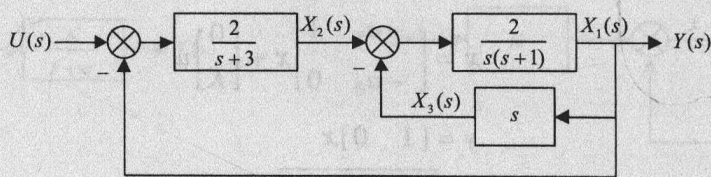


图 1.16 控制系统框图

解 在系统框图中的各个环节后面分别标注出状态变量  $x_1$ 、 $x_2$  和  $x_3$  的拉普拉斯变换式  $X_1(s)$ 、 $X_2(s)$  和  $X_3(s)$ , 如图 1.16 所示。由系统框图可得

$$\begin{cases} X_1(s) = \frac{2}{s(s+1)} [X_2(s) - X_3(s)] \\ X_2(s) = \frac{2}{s+3} [U(s) - X_1(s)] \\ sX_1(s) = X_3(s) \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} s^2 X_1(s) + sX_1(s) = 2X_2(s) - 2X_3(s) \\ sX_2(s) = -2X_1(s) - 3X_2(s) + 2U(s) \\ sX_1(s) = X_3(s) \end{cases}$$

求上述方程组的拉普拉斯反变换, 可得

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \dot{x}_1 = 2x_2 - 2x_3 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + 2u \\ \dot{x}_1 = x_3 \end{cases}$$

整理可得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + 2u \\ \dot{x}_3 = 2x_2 - 3x_3 \end{cases}$$

因此, 系统状态空间描述为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] x$$

进一步得出系统状态变量图如图 1.17 所示。

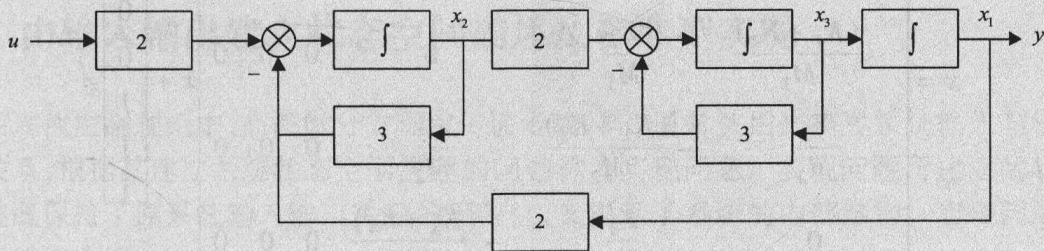


图 1.17 控制系统状态变量图

### 1.3 由系统机理建立状态空间描述

工程领域通常研究的控制系统为机械、热力、机电、电气、液压等物理系统。如果已知系



统的内部结构,则可以根据牛顿定律、基尔霍夫定律、能量守恒定律等物理或化学规律建立其状态空间表达式。

**例 1.5** 给定机械位移系统如图 1.18 所示,试建立其状态空间描述。

**解** 设  $M_1$ 、 $M_2$  和  $M_3$  的位移分别为  $y_1$ 、 $y_2$  和  $y_3$ , 运动速度分别为  $v_1$ 、 $v_2$  和  $v_3$ 。根据牛顿定律,对  $M_1$ 、 $M_2$  和  $M_3$  可写出以下方程:

$$M_1 g - K_1 y_1 - K_2 (y_1 - y_2) = M_1 \frac{dv_1}{dt}$$

$$M_2 g + K_2 (y_1 - y_2) - K_3 (y_2 - y_3) = M_2 \frac{dv_2}{dt}$$

$$M_3 g + K_3 (y_2 - y_3) - K_4 y_3 = M_3 \frac{dv_3}{dt}$$

选取  $y_1$ 、 $y_2$ 、 $y_3$ 、 $v_1$ 、 $v_2$  和  $v_3$  为状态变量,令  $x_1 = y_1$ ,  $x_2 = y_2$ ,  $x_3 = y_3$ ,

$x_4 = v_1 = \frac{dy_1}{dt}$ ,  $x_5 = v_2 = \frac{dy_2}{dt}$ ,  $x_6 = v_3 = \frac{dy_3}{dt}$ , 整理得

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_4 \\ \dot{x}_2 = x_5 \\ \dot{x}_3 = x_6 \\ \dot{x}_4 = -\frac{(K_1 + K_2)}{M_1} x_1 + \frac{K_2}{M_1} x_2 + g \\ \dot{x}_5 = \frac{K_2}{M_2} x_1 - \frac{(K_2 + K_3)}{M_2} x_2 + \frac{K_3}{M_2} x_3 + g \\ \dot{x}_6 = \frac{K_3}{M_3} x_2 - \frac{(K_3 + K_4)}{M_3} x_3 + g \end{cases}$$

因此,系统的状态空间描述为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{(K_1 + K_2)}{M_1} & \frac{K_2}{M_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_2}{M_2} & -\frac{(K_2 + K_3)}{M_2} & \frac{K_3}{M_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_3}{M_3} & -\frac{(K_3 + K_4)}{M_3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} g$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

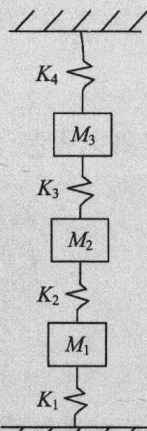


图 1.18 机械位移系统结构图