21 世纪高等学校重点课程辅导教材

GAODENG SHUXUE JIAOXUE
TONGBU ZHIDAO YU XUNLIAN

高等数学教学同步指导与训练

■ 喻德生　主编

上

化学工业出版社

21 世纪高等学校重点课程辅导教材

GAODENG SHUXUE JIAOXUE
TONGBU ZHIDAO YU XUNLIAN

高等数学教学
同步指导与训练

■ 喻德生　主编

上

化学工业出版社
·北京·

《高等数学教学同步指导与训练》(上册) 参照同济大学数学系编《高等数学》(上册)(第七版) 的基本内容，以每节两学时的篇幅对高等数学进行教学设计，全书共计 48 节 96 学时. 每节均由教学目标、考点题型、例题分析和课后作业四个部分组成. 教学目标根据高等数学教学大纲的基本要求编写，目的是把教学目标交给学生，使学生了解教学大纲和教师的要求，从而增强学习的主动性和目的性. 考点题型分两级列出考点，并以求解、证明等字眼指出考查考点常见的题型. 例题分析选择、构造一些比较典型的题目，从不同侧面阐述解题的思路、方法和技巧，每个题均按照"例题＋分析＋解或证明＋思考"的模式编写，运用变式、引申等方式，突出题目的重点，揭示解题方法的本质，从而把"师生对话"的机制融入解题的过程中，使"教、学、思"融于一体，使举一反三成为可能，进而提高学生分析问题和解决问题的能力. 课后作业以每次课配置一次练习的原则进行编写. 每次作业均包含 3 种题型 7 个题目，其中填空题 2 个，选择题 2 个，解答、证明题 3 个. 各题后均留有空白处，用于书写解答的过程. 每次练习均印刷在一页的正、反面上，完成作业后即可将其撕下上交，方便使用.

《高等数学教学同步指导与训练》(上册) 是高等数学教学的同步教材，对高等数学每堂课的教学都具有较强的指导性、针对性和即时性，可作为理工科高等数学教学的指导书和练习册，供教师和学生使用.

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学教学同步指导与训练. 上/喻德生主编. —北京：化学工业出版社，2017.9

21 世纪高等学校重点课程辅导教材

ISBN 978-7-122-30300-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①喻… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 174374 号

责任编辑：唐旭华 尉迟梦迪　　装帧设计：史利平

责任校对：王素芹

出版发行：化学工业出版社 (北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011)

印　　刷：北京永鑫印刷有限责任公司

装　　订：三河市宇新装订厂

787mm×1092mm 1/16 印张 14½ 字数 383 千字 2017 年 9 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888 (传真：010-64519686)　　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：29.80 元

前　　言

本书根据高等学校理工科高等数学课程教学的基本要求，结合当前高等数学教学改革和学生学习的实际需要，组织教学经验比较丰富的教师编写．本书是高等数学教学的同步教材，对高等数学每堂课的教学都具有较强的指导性、针对性和即时性，可作为理工科高等数学教学的指导书和练习册，供教师和学生使用．

本书根据本科院校高等数学课程教学的基本要求和教学时数，参照同济大学数学系编《高等数学》（上册）（第七版）的基本内容，合理地分割每次课（2 学时）的教学内容，并以每次课配置一次作业的原则进行编写. 每节均包括教学目标、考点题型、例题分析和课后作业四个部分，各部分编写说明如下．

① 教学目标　根据高等数学教学大纲的基本要求，以知道、了解、理解或掌握、熟练掌握、会求等分层次进行编写. 目的是把教学目标交给学生，使学生了解教学大纲的精神和教师的要求，从而增强学习的主动性和目的性．

② 考点题型　分两级列出考点，其中打“*”号的表示一级考点，否则为二级考点；并以求解、证明等字眼指出考查考点常见的题型.

③ 例题分析　围绕每次课教学内容的重点、难点，按每次课 6 个例题的篇幅选择一些比较典型的例题，从不同侧面阐述解题的思路、方法与技巧. 每个题均按照“例题＋分析＋解或证明＋思考”的模式编写，广泛运用变式、引申等方式，突出题目的重点，揭示解题方法的本质. 从而在解题的过程中，运用“师生对话”的机制，使“教、学、思”融于一体，使举一反三成为可能，提高学生分析问题和解决问题的能力．

④ 课后作业　每次练习均包含 3 种题型 7 个题目，其中填空题 2 个，选择题 2 个，解答、证明题 3 个. 各题后均留有空白处，用于书写解答的过程. 每次练习均印刷在同一页的正、反面上，完成作业后即可将其撕下上交，方便使用．

本书是在我校近 20 年来编写使用的教学指导书和练习册、是在南昌航空大学数学教学组的高数相关教材、教辅的基础上编写而成的．

本书由喻德生教授主编，参加本书及练习册答案部分内容编写的老师有：李昆、邹群、明万元、黄香蕉、王卫东、程筠、杨就意、胡结梅、徐伟、陈菱蕙、毕公平、漆志鹏、熊归凤、魏贵珍、李园庭、鲁力、王利魁、赵刚等. 本次修订定稿由喻德生完成参与本书打印稿校阅的老师有：杨就意、鲁力、潘兴侠．

本书编写得到我校教务处和数学与信息科学学院领导的大力支持，以及化学工业出版社的帮助，在此表示衷心感谢。

由于水平有限，书中难免出现疏漏之处，敬请国内外同仁和读者批评指正．

编者

2017 年 6 月于南昌航空大学

目　　录

第一章　函数与极限同步指导与训练

第一节　函数的概念与性质

一、教学目标

理解函数的概念与性质，了解函数与映射之间的关系．会求函数的定义域、值域以及一些问题的函数表达式；会求解一些有关函数单调性、有界性、奇偶性和周期性的问题．了解复合函数的概念，会求函数的复合函数或将一个函数分解成一些函数的复合．了解反函数的概念，反函数与直接函数之间的关系．会求函数的反函数．了解初等函数的概念与性质，会进行函数的运算．

二、考点题型

函数的定义域*、对应法则*和值域的求解；函数的有界性、单调性*、奇偶性*和周期性的证明或运用；反函数的求解；复合函数的求解*；函数应用题（其中打“*”号的是一级考点，其余是二级考点，以下类同）．

三、例题分析

例 1.1.1　设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D=[0,1]$．(i) 求函数 $f(\sin x)$ 的定义域；(ii) 讨论 a 为何值时，两函数 $f(x+a)$ 和 $f(x-a)$ 可以进行加减运算，并求函数 $f(x+a)\pm f(x-a)$ 的定义域．

分析　这是已知简单函数的定义域，要求复合函数定义域的问题．因此，被复合的中间变量的必须落在简单函数的定义域之内．

解　(i) 因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $D=[0,1]$，故由 $0\leqslant\sin x\leqslant 1$，解得 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，因此 $f(\sin x)$ 的定义域 $D=\{x\,|\,2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$．

(ii) 由 $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}$．于是当 $a\leqslant 1-a$，即 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，不等式组的解为 $a\leqslant x\leqslant 1-a$；当 $1-a<a$，即 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，不等式组 $\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}$ 无解．

于是当 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，两函数 $f(x+a)$ 和 $f(x-a)$ 可以进行加减运算，且函数 $f(x+a)\pm f(x-a)$ 的定义域为 $D=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant 1-a\}$；当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，两函数 $f(x+a)$ 和 $f(x-a)$ 不可以进行加减运算，此时 $f(x+a)\pm f(x-a)$ 无意义．

思考　(i) 求函数 $f(2\sin x)$ 的定义域；(ii) 讨论 a 为何值时，两函数 $f(2x+a)$ 和 $f(a-2x)$ 可以进行加减运算，并求函数 $f(2x+a)\pm f(a-2x)$ 的定义域．

例 1.1.2　已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$．

分析　这是已知复合函数，要求被复合的中间函数的问题．而确定一个函数，只要求出其表达式和定义域．

解　因为 $f[\varphi(x)]=\mathrm{e}^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，所以 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$．由 $\ln(1-x)\geqslant 0$ 得 $1-x\geqslant 1$，所以 $x\leqslant 0$. 故 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，$x\leqslant 0$.

思考 如果 $\varphi(x)\geqslant 1$，结果如何？$\varphi(x)\leqslant 0$ 或 $\varphi(x)\leqslant -1$，结果怎样？

例 1.1.3 设 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$，求 $f[f(x)]$.

分析 把 $f(x)$ 看成 x，代入 $f(x)$ 中，化简即可. 注意，化简过程中不能扩大或缩小 x 的范围.

解 $D_f=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，$R_f=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. 由于 $D_f\cap R_f\neq\varnothing$，所以 $f(x)$ 与 $f(x)$ 可以复合. 于是

$$f[f(x)]=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}=\frac{\dfrac{x-1}{x+1}-1}{\dfrac{x-1}{x+1}+1}=\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)+(x+1)}=-\frac{1}{x},$$

又由 $f(x)$ 的定义域可知 $x\neq -1$；由 $f(x)$ 的值域可有 $f(x)\neq -1$，解得 $x\neq 0$. 故所求复合函数

$$f[f(x)]=-\frac{1}{x}\quad (x\neq 0,-1).$$

注 从本例可以看出，化简所得到的式子，未必就是所求的复合函数. 因为化简未必是恒等变形，它可能改变自变量的取值范围.

例 1.1.4 设 $f(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f[g(x)]$.

分析 先将分段函数 $g(x)$ 看成 x 代入 $f(x)$ 中，得出关于 $g(x)$ 的分段表达式；再将 $g(x)$ 各段的表达式代入，得出各段关于自变量 x 的表达式以及各段上 x 的取值范围. 最后删除可能出现的取值范围为空集的所谓的"多余段".

解 因为

$$f[g(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0\\ 2+f(x), & f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}2-x^2, & x^2\leqslant 0\wedge x<0\\ 2+x^2, & x^2>0\wedge x<0\\ 2-(-x), & -x\leqslant 0\wedge x\geqslant 0\\ 2+(-x), & -x>0\wedge x\geqslant 0\end{cases},$$

解不等式，求出各段中自变量的取值范围，得

$$f[g(x)]=\begin{cases}2-x^2, & x\in\varnothing\\ 2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\\ 2-x, & x\in\varnothing\end{cases},$$

删除多余段，得所求的复合函数

$$f(x)=\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

思考 (i) 求 g 与 f、f 与 f 及 g 与 g 的复合 $g[f(x)]$，$f[f(x)]$，$g[g(x)]$ 以及这两个函数的三重复合；(ii) 分段函数的复合函数一定是分段函数吗？是，说明理由；否，举出反例.

例 1.1.5 证明：函数

$$f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$$

在 $x=0$ 的任意邻域 $U^0(0,\delta)$ 内是无界的.

分析　根据定义，对任给的 $M>0$，找出某 $x_0\in U^0(0,\delta)$，使 $|f(x_0)|>M$ 即可.

证明　任给 $M>0$，要 $|f(x)|=\left|\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}\right|>M$，必要 $\left|\dfrac{1}{x}\right|>M$，即 $|x|<\dfrac{1}{M}$. 令 $\delta=\dfrac{1}{M}$，取充分大的正整数 n，使 $x_0=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}\in U^0(0,\delta)$，则有 $|f(x_0)|>M$ 成立. 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 的任意邻域 $U^0(0,\delta)$ 内是无界的.

思考　若 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$，如何证明？$f(x)=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ 或 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$ 呢？

例 1.1.6　设 $f(x)$ 是定义在 $(-l,l)$ $(l>0)$ 上的奇函数. 若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内是单调增加的，证明：$f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也是单调增加的.

分析　根据定义，只需证明，对任意的 x_1，$x_2\in(-l,0)$ 且 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$.

证明　对任意的 $x_1,x_2\in(-l,0)$ 且 $x_1<x_2$，有 $-x_1,-x_2\in(0,l)$ 且 $-x_1>-x_2$. 因为 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 是单调增加的，故有

$$f(-x_1)>f(-x_2).$$

又因为 $f(x)$ 是定义在 $(-l,l)$ $(l>0)$ 上的奇函数，所以 $f(-x_1)=-f(x_1)$，$f(-x_2)=-f(x_2)$，代入上式并在不等式两边乘以 -1，得

$$f(x_1)<f(x_2),$$

因此 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也是单调增加的.

思考　若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 是单调减少的，结论如何？若 $f(x)$ 为偶函数，在 $(0,l)$ 内是单调增加的或 $f(x)$ 为偶函数且在 $(0,l)$ 内是单调减少的，结论分别是什么？并证明结论.

第二节　数列的极限

一、教学目标

理解数列极限的概念、数列极限的几何意义，会用数列的 ε-N 定义证明一些简单数列的极限. 了解数列极限的唯一性，收敛数列的有界性、保号性，收敛数列与其子列之间的关系.

二、常见考点

数列通项公式的求解；简单的数列极限的证明；应用收敛数列与其子列之间的关系，证明某些数列的极限存在或不存在*.

三、例题分析

例 1.2.1　已知 $x_n=\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}$，用列举方式写出该数列，并用 -1 的幂表示其通项.

分析　把 $x_n=\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}$ 看成是 n 的函数，求出其前面若干项的函数值并依次列出，再按要求用另一种方式写出其通项.

解 $x_1=\cos\frac{\pi}{2}=0$，$x_2=\frac{1}{2}\cos\pi=-\frac{1}{2}$，$x_3=\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}=0$，$x_4=\frac{1}{4}\cos 2\pi=\frac{1}{4}$，…，故数列为

$$0,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ -\frac{1}{6},\ 0,\ \frac{1}{8},\ \cdots,$$

其通项为 $x_n=(-1)^{n-1}\frac{1+(-1)^n}{2n}$，即 $x_n=\frac{(-1)^{n-1}-1}{2n}$.

思考 若数列的通项为 $x_n=\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$，结果如何?

例 1.2.2 对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$ 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的（　　）.

A. 充分条件但非必要条件；　　B. 必要条件但非充分条件；

C. 充分必要条件；　　D. 既非充分条件也非必要条件.

分析 根据数列收敛的定义，选择一个最可能正确的项，直接来证明. 若可行即为所选项.

解 选 C. 因为 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$，显然对任意的 $\varepsilon\geqslant 1$，上述结论亦成立. 故该结论对任意的 $\varepsilon>0$ 成立.

于是对 $\forall\varepsilon_1>0$，取 $\varepsilon_1>2\varepsilon$，$N_1>N$，存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$. 从而存在正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时恒有 $|x_n-a|<\varepsilon_1$，即数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a.

例 1.2.3 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

分析 给定 $\varepsilon>0$，根据不等式 $\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$ 倒推，分情况找出其成立的充分条件或充分必要条件 $n>N(\varepsilon)$，必要时可以适当地放大.

证明 当 $a=0$ 时，$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=0$. 显然，对 $\forall\varepsilon>0$，任取正整数 N，则当 $n>N$ 时，恒有 $\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

当 $a\neq 0$ 时，因为 $\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{n}$. 对 $\forall\varepsilon>0$，要 $\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，只要 $\frac{a^2}{n}<\varepsilon$，即要 $n>\frac{a^2}{\varepsilon}$. 取 $N=\left[\frac{a^2}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，恒有 $\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

思考 (i) 可否用 $n(\sqrt{n^2+a^2}+n)>n^2$ 或 $n(\sqrt{n^2+a^2}+n)>2n^2$ 对 $\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|$ 进行放大? 若可以，写出相应的证明过程；(ii) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{bn^2+a^2}}{n}=\sqrt{b}$ ($b\in\boldsymbol{R}^+$).

注 证明过程中，不等式成立的充分条件用“只要……”表达，充分必要条件用“即要……”表达.

由于 $\frac{a^2}{\varepsilon}$ 未必是正整数，因此不能直接取 $N=\frac{a^2}{\varepsilon}$. 此外，尽管 $\left[\frac{a^2}{\varepsilon}\right]\leqslant\frac{a^2}{\varepsilon}$，但由于 $\left[\frac{a^2}{\varepsilon}\right]$ 是

不超过$\dfrac{a^2}{\varepsilon}$的最大整数，故由$n>N=\left[\dfrac{a^2}{\varepsilon}\right]$可以推出$n>\dfrac{a^2}{\varepsilon}$.

例 1.2.4　已知$x_n=2^{1/n}$，根据指数函数的性质，观察数列$\{x_n\}$的极限，并给出极限的证明.

分析　指数函数$y=2^x$在定义域$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的，且当$x=0$时，$y=2^0=1$，因此，当$n\to\infty$时，$1/n\to 0$，因此$2^{1/n}\to 2^0=1$.

解　根据指数函数$y=2^x$，可知$\lim\limits_{n\to\infty}2^{1/n}=1$. 现证明如下：对任意给定的$\varepsilon>0$，要$|2^{1/n}-1|<\varepsilon$，并注意到$2^{1/n}>1$，只要$1<2^{1/n}<1+\varepsilon$，即要$0<1/n<\log_2^{1+\varepsilon}$，即要$n>1/\log_2^{1+\varepsilon}$. 取$N=[1/\log_2^{1+\varepsilon}]$时，则当$n>N$时，恒有$|2^{1/n}-1|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}2^{1/n}=1$.

思考　(i) 若$x_n=3^{1/n}$，结果如何？$x_n=a^{1/n}$ $(a>1)$呢？(ii) 当$x_n=a^{1/n}$ $(0<a<1)$时，是否有类似于$x_n=a^{1/n}$ $(a>1)$的结果？

例 1.2.5　设$|q|<1$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}n^2q^n=0$.

分析　因为$\lim\limits_{n\to\infty}n^2=\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，因此该极限是无穷大与无穷小乘积极限的证明，应设法转化成无穷大与无穷大之比极限的证明.

证明　当$q=0$时，因为$n^2q^n=n^2 0^n=n^2 0=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}n^2q^n=0$显然成立.

当$q\neq 0$时，不妨设$n>4$，于是$n-2>\dfrac{n}{2}$. 令$|q|=\dfrac{1}{1+h}$，$h>0$，则

$$|n^2q^n-0|=\frac{n^2}{(1+h)^n}=\frac{n^2}{C_n^0+C_n^1h+C_n^2h^2+C_n^3h^3+\cdots+C_n^nh^n}<\frac{n^2}{C_n^3h^3}$$
$$=\frac{6n^2}{n(n-1)(n-2)h^3}=\frac{6n}{(n-1)(n-2)h^3}<\frac{12n}{(n-1)nh^3}=\frac{12}{(n-1)h^3}.$$

故对$\forall\varepsilon>0$，要$|n^2q^n-0|<\varepsilon$，只要$\dfrac{12}{(n-1)h^3}<\varepsilon$，即要$n-1>\dfrac{12}{\varepsilon h^3}$，即要$n>\dfrac{12}{\varepsilon h^3}+1$. 取$N=\left[\dfrac{12}{\varepsilon h^3}\right]+1$，则当$n>N$时，恒有$|n^2q^n-0|<\varepsilon$，故$\lim\limits_{n\to\infty}n^2q^n=0$.

思考　(i) 对$\forall k\in\mathbf{Z}^+$，$\left[\dfrac{12}{\varepsilon h^3}+k\right]$与$\left[\dfrac{12}{\varepsilon h^3}\right]+k$是否相等？对$\forall k\in\boldsymbol{R}^+$呢？(ii) 设$|q|<1$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}n^kq^n=0$ $(k\in\mathbf{N})$；(iii) 设$0<q<1$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}n^\alpha q^n=0$ $(\alpha\geqslant 1)$.

注　适当地放缩是证明极限重要的技巧之一. 从例 1.2.5 可以看出，将“适当地”放缩成$|x_n-A|<\varphi(n)$，一是指放缩的结果$\varphi(n)$仍为$n\to\infty$时的正无穷小量；二是指通过$\varphi(n)<\varepsilon$容易求出$n>n(\varepsilon)$.

例 1.2.6　对于数列$\{x_n\}$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的充要条件是$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=a$，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$.

分析　$\{x_{2k}\}$和$\{x_{2k-1}\}$是$\{x_n\}$的两个子列. 对$\forall\varepsilon>0$，由存在使$|x_n-a|<\varepsilon$恒成立的正整数，找出使$|x_{2k}-a|<\varepsilon$和$|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$同时恒成立的正整数，证明必要性；反之，根据两子列的极限，通过取大函数证明充分性.

证明　必要性　因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，故对$\forall\varepsilon>0$，$\exists$正整数$N$，使$n>N$时恒有$|x_n-a|<\varepsilon$. 则当$n>N$时，有$2n>N$，$2n-1>N$，故恒有$|x_{2n}-a|<\varepsilon$，$|x_{2n-1}-a|<\varepsilon$. 于是$\lim\limits_{2n\to\infty}x_{2n}=a$，$\lim\limits_{2n-1\to\infty}x_{2n-1}=a$. 又因$2n\to\infty$，$2n-1\to\infty\Rightarrow n\to\infty$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=a$.

充分性　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=a$，故对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 $N_1=2K_1$，$N_2=2K_2-1$（其中 K_1，K_2 为正整数），使 $2n>N_1$，$2n-1>N_2$ 时，恒有 $|x_{2n}-a|<\varepsilon$，$|x_{2n-1}-a|<\varepsilon$. 取 $N=\max\{K_1,K_2\}$，则当 $n>N$ 时，因 $2n>2K_1$，$2n-1>2K_2-1\Leftrightarrow n>\max\{K_1,K_2\}=N$，于是由 $|x_{2n}-a|<\varepsilon$，$|x_{2n-1}-a|<\varepsilon$ 恒成立可以推出 $|x_n-a|<\varepsilon$ 恒成立，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

思考　$\lim\limits_{k\to\infty}x_{3k-2}=a$，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{3k-1}=a$，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{3k}=a$ 是否是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的充要条件？是，给出证明；否，给出反例.

第三节　函数的极限

一、教学目标

了解当自变量趋于无穷大时函数极限的概念及其几何意义，了解水平渐近线的定义. 了解当自变量趋于有限值时函数极限的概念及其几何意义，会用 δ-ε 定义验证一些简单函数的极限. 了解单侧极限的概念，理解函数极限存在的充分必要条件，会用单则极限讨论分段函数在分段点处的极限. 了解函数极限的唯一性、函数极限的局部有界性和局部保号性，理解函数极限与数列极限之间的关系.

二、考点题型

简单的函数极限的证明；分段函数在分段点处的极限，函数极限存在的充分必要条件*；应用函数极限与数列极限的关系，证明一些函数极限不存在*.

三、例题分析

例 1.3.1　证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

分析　利用正弦函数的有界性 $|\sin x|\leqslant 1$，将 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|$ 放大成 x 的幂函数，找 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$ 恒成立的充分条件.

证明　因为 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|=\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\right|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. 故对 $\forall\varepsilon>0$，要 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$，即要 $x>\dfrac{1}{\varepsilon^2}$. 取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$，则当 $x>X$ 时，恒有 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

思考　证明：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

例 1.3.2　证明：$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

分析　因为 $x\to-\dfrac{1}{2}$ 意味着 $x\neq-\dfrac{1}{2}$，故可以通过约分将 $\left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|$ 化成 $2x+1$ 的幂函数，找出 $\left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|<\varepsilon$ 恒成立的充要条件.

证明　因为 $\left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|=\left|\dfrac{1-4x^2-4x-2}{2x+1}\right|=|2x+1|$．故对 $\forall\varepsilon>0$，要 $\left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|<\varepsilon$，即要 $|2x+1|<\varepsilon$，即要 $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，则当 $0<\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\delta$ 时，恒有 $\left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

思考　证明：$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x-1}=-2$.

例 1.3.3　证明：$\lim\limits_{x\to1}(x^2+x-1)=1$.

分析　由于 $|(x^2+x-1)-1|=|(x+2)(x-1)|$ 与函数 $x+2$ 有关，不能直接得到 $x-1$ 的幂函数，因此必须在一定条件下，将函数 $x+2$ 进行放缩成常数．

证明　因为 $x\to1$，因此不妨设 $|x-1|<1$，于是 $0<x<2\Rightarrow2<x+2<4$. 故对 $\forall\varepsilon>0$，要 $|(x^2+x-1)-1|=|(x+2)(x-1)|<\varepsilon$，只要 $4|x-1|<\varepsilon$，只要 $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{4}$. 取 $\delta=\min\left\{1,\ \dfrac{\varepsilon}{4}\right\}$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，$|x-1|<1$ 和 $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{4}$ 同时成立，于是恒有 $|(x^2+x-1)-1|<\varepsilon$ 成立，故 $\lim\limits_{x\to1}(x^2+x-1)=1$.

思考　在假定 $|x-1|<0.5$ 和 $|x-1|<2$ 的前提下，分别给出本题的证明．

例 1.3.4　当 $x\to2$ 时，函数 $y=x^2+1\to5$. 问 δ 等于多少时，使当 $0<|x-2|<\delta$ 时，恒有 $|y-5|<0.001$?

分析　这是对给定的 ε，反过来找 δ 的问题．此时，δ 通常不是唯一的，一般找出最大可能的 δ 即可．

解　因为 $x\to2$，因此不妨设 $|x-2|<1$（即不妨设一个 $\delta<1$），即 $1<x<3$. 要使 $|y-5|=|x^2-4|=|x+2||x-2|\leqslant5|x-2|<0.001$，只要 $|x-2|<0.0002$，故取 $\delta=0.0002$，则当 $0<|x-2|<\delta$ 时，恒有 $|y-5|<0.001$.

思考　在假定 $|x-2|<0.5$ 和 $|x-2|<2$ 的前提下，分别求出相应的 δ.

例 1.3.5　当 $x\to0$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是（　　）．

A. 无穷小；B. 无穷大；C. 有界但不是无穷小量；D. 无界但不是无穷大量．

分析　根据无穷小与无穷大、有界与无界的定义，选择较为明显的错误的项，一个一个地排除，最后所剩的选项就是应选项．

解　选 D. 取 $x\to0$ 时的两个子列 $\{x'_n\}$，$\{x''_n\}$，其中 $x'_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，$x''_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，于是

$$\lim_{n\to\infty}f(x'_n)=\lim_{n\to\infty}(2n\pi)^2\sin(2n\pi)=\lim_{n\to\infty}(2n\pi)^2\times0=\lim_{n\to\infty}0=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}f(x''_n)=\lim_{n\to\infty}\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot1=\infty,$$

因此，可以排除 A、B、C，从而选择 D.

思考　若所论及的函数为 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$，结果如何？$f(x)=\dfrac{1}{x^2}\tan\dfrac{1}{x}$ 呢？

例 1.3.6 设函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0\\ x, & 0\leqslant x<1\\ 2-x, & x\geqslant 1\end{cases}$，证明：$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$，但$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在．

分析 先求出函数左，右极限，再根据极限存在充要条件证明．

证明 因为 $f(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2-x)=2-1=1$，$f(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x=1$，所以 $f(1^+)=f(1^-)$，于是$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$；

又 $f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$，$f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$，所以 $f(0^+)\neq f(0^-)$，从而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在．

思考 若所论及的函数为 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ x, & 0\leqslant x<1\\ 2-x, & x\geqslant 1\end{cases}$，是否有相同的结论？$f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ x, & 0\leqslant x<1\\ 3-2x, & x\geqslant 1\end{cases}$呢？

第四节　无穷大与无穷小　极限运算法则

一、教学目标

理解无穷小的概念，无穷小与函数极限之间的关系．了解无穷大概念，无穷大与无穷小之间的关系．了解水平渐近线和铅直渐近线的定义，会求函数的水平渐近线和铅直渐近线．理解有限个无穷小的和、有界函数与无穷小的积为无穷小，但无限个无穷小的和、无限个无穷小的积未必为无穷小．掌握函数极限的四则运算法则和复合函数的极限法则，能熟练运用这些法则解题．

二、常见考点

无穷小与无穷大的简单证明；无穷小与无穷大，无穷小与极限之间的关系在证明或解题中的应用；函数，特别是复合函数极限的求解——极限运算法则的运用*．

三、例题分析

例 1.4.1 证明：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x^2-1}=\infty$.

分析 根据无穷大的定义，对任意给定 $M>0$，找出相应的 $\delta>0$，使 $0<|x-1|<\delta$ 时，恒有 $\left|\dfrac{1}{x^2-1}\right|>M$ 即可．

证明 不妨设 $|x-1|<1$，则 $0<x<2$. 于是对任意给定 $M>0$，要 $\left|\dfrac{1}{x^2-1}\right|>M$，只要 $\left|\dfrac{1}{x^2-1}\right|=\dfrac{1}{|x-1||x+1|}>\dfrac{1}{2|x-1|}>M$，只要 $|x-1|<\dfrac{1}{2M}$. 取 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{1}{2M}\right\}$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，$|x-1|<1$ 和 $|x-1|<\dfrac{1}{2M}$ 同时成立，从而 $\left|\dfrac{1}{x^2-1}\right|>M$ 恒成立，即

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x^2-1}=\infty$.

例 1.4.2　求极限 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2-x-2}$.

分析　这是两个多项式之比的 $\dfrac{0}{0}$ 型的极限．由于分母的极限为零，不能直接应用商的极限法则，而应通过分解因式，消除分子分母中的零因子 $x+1$，再用极限运算法则计算．

解　原式 $=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{2}{3}$.

思考　(i) 若 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^n-1}{x^2-x-2}=2$，则 n 为多少？(ii) 若 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-x+c}=2$，则 c 为多少？

例 1.4.3　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{2+e^{\frac{1}{x}}}$.

分析　注意到分子是一个无穷小，分母是大于 2，因此考虑利用无穷小的性质来解题．

解　由 $e^{\frac{1}{x}}>0$ 得 $2+e^{\frac{1}{x}}>2$，于是 $0<\dfrac{1}{2+e^{\frac{1}{x}}}<\dfrac{1}{2}$，即 $\dfrac{1}{2+e^{\frac{1}{x}}}$ 为有界函数．又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\tan x=0$，故根据无穷小与有界函数的乘积为无穷小，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{2+e^{\frac{1}{x}}}=0$.

思考　(i) 能用商的极限运算法则求解吗？为什么？(ii) 能用单侧极限和商的极限运算法则求解吗？能，写出解答过程；不能，说明理由．

例 1.4.4　求曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\operatorname{arccot}\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 的铅直渐近线和水平渐近线．

分析　根据两种渐近线的定义，只要考察 $x\to\infty$ 时 y 的极限是否存在及 $x\to x_0$ 时 y 的极限是否为无穷大，而 x_0 只能可能是函数 y 的无定义的点．

解　函数 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\operatorname{arccot}\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 在 $x=-2,0,1$ 处无定义．因为

$$\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}}\operatorname{arccot}\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}=-\operatorname{arccot}\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}}=\infty,$$

所以 $x=0$ 是曲线的铅直渐近线．

$$\lim_{x\to 1^+}y=\lim_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{x^2}}\operatorname{arccot}\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1^+}e^{\frac{1}{x^2}}\lim_{x\to 1^+}\operatorname{arccot}\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}=e\cdot 0=0\neq\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^-}y=\lim_{x\to 1^-}e^{\frac{1}{x^2}}\operatorname{arccot}\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1^-}e^{\frac{1}{x^2}}\lim_{x\to 1^-}\operatorname{arccot}\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}=\pi e\neq\infty,$$

所以 $x=1$ 不是曲线的铅直渐近线．

同理，$x=-2$ 不是曲线的铅直渐近线．

又因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}y&=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x^2}}\operatorname{arccot}\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}\\&=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\lim_{x\to\infty}\operatorname{arccot}\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}=e^0\operatorname{arccot}1=\frac{\pi}{4},\end{aligned}$$

所以 $y=\dfrac{\pi}{4}$ 是曲线的水平渐近线．

思考　若将曲线改为 $y=e^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$，结果如何？

例 1.4.5 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]$.

分析 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\ln(x+1)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\ln x$ 都不存在（振荡），所以不能使用极限运算法则，也不能断言原极限一定不存在，如果利用三角变换"和差化积"，则有可能求解．

解
$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}2\cos\frac{\ln(x+1)+\ln x}{2}\sin\frac{\ln(x+1)-\ln x}{2}$$
$$=2\lim_{x\to+\infty}\cos\frac{\ln x(x+1)}{2}\sin\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{2},$$

因为 $\left|\cos\dfrac{\ln x(x+1)}{2}\right|\leqslant1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{2}=\sin0=0$，所以根据无穷小量与有界变量的乘积仍是无穷小量，得
$$\lim_{x\to+\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]=0.$$

思考 (i) 当 $x\to0^+$ 时，函数的极限如何？(ii) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}]$.

例 1.4.6 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(6x+1)^{50}}$.

分析 这是 $x\to\infty$ 时，分式函数的极限问题，因此要消除分子分母的无穷因子，往往用分式中的最高次项去除分式的每一项．

解
$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2-\dfrac{3}{x}\right)^{20}\left(3+\dfrac{2}{x}\right)^{30}}{\left(6+\dfrac{1}{x}\right)^{50}}=\frac{2^{20}\times3^{30}}{6^{50}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{30}.$$

思考 若求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{\alpha}(3x+2)^{\beta}}{(6x+1)^{50}}$，其中 $\alpha+\beta=50$；$\alpha,\beta\in\boldsymbol{R}$，结果如何？

第五节 习题课一

例 1.5.1 设 $f(x)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上有定义，且对任意的 x，y 恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，证明：$F(x)=\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)f(x)$ $(a>0，a\neq1)$ 为偶函数．

分析 $F(x)$ 可以看成是两个函数的乘积，只需证明这两个函数均为奇函数．

证明 令 $\varphi(x)=\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$，于是
$$\varphi(-x)=\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}=\frac{a^x}{1-a^x}+\frac{1}{2}=\frac{1}{1-a^x}-1+\frac{1}{2}=-\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)=-\varphi(x),$$
所以 $\varphi(x)$ 为奇函数．

又依题设，$f(x)=f(x+0)=f(x)+f(0)$，因此 $f(0)=0$. 于是
$$0=f(0)=f(x-x)=f(x)+f(-x),$$
所以 $f(-x)=-f(x)$，即 $f(x)$ 为奇函数．

因此 $F(-x)=\varphi(-x)f(-x)=\varphi(x)f(x)=F(x)$，即 $F(x)$ 为偶函数．

思考 若 $F(x)=\left(\dfrac{1}{1-a^x}-\dfrac{1}{2}\right)f(x)$ $(a>0，a\neq1)$，结果如何？

例 1.5.2 求函数 $y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$在$|x|\geqslant 1$ 上的反函数 $y=\varphi(x)$，并判断 $\varphi(x)$ 的奇偶性.

分析 求一个函数的反函数，一是要用函数表示自变量，即把函数看成是关于自变量的方程并解出自变量，从而确定反函数的表达式；二是要确定反函数的定义域，即函数的值域.

解 因为$|x|\geqslant 1 \Leftrightarrow x\geqslant 1 \vee x\leqslant -1$. 当 $x\geqslant 1$ 时，$y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\geqslant\sqrt{x\frac{1}{x}}=1$；当 $x\leqslant -1$ 时，$-y=\frac{1}{2}\left(-x-\frac{1}{x}\right)\geqslant\sqrt{(-x)\left(-\frac{1}{x}\right)}=1\Rightarrow y\leqslant -1$. 把函数 $y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$看成是关于自变量$x$ 的方程，即

$$x^2-2yx+1=0,$$

其解为

$$x=y\pm\sqrt{y^2-1},\quad |y|\geqslant 1,$$

故当 $y\geqslant 1$ 时，$x=y+\sqrt{y^2-1}\geqslant 1$；当 $y\leqslant -1$ 时，$x=y-\sqrt{y^2-1}\leqslant -1$. 故所求反函数为

$$\varphi(x)=\begin{cases}x+\sqrt{x^2-1}, & x\geqslant 1\\ x-\sqrt{x^2-1}, & x\leqslant -1\end{cases}.$$

反函数的定义域为 $D_\varphi=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. 显然，当 $x\in D_\varphi$ 时，有 $-x\in D_\varphi$，且

$$\varphi(-x)=\begin{cases}-x+\sqrt{(-x)^2-1}, & -x\geqslant 1\\ -x-\sqrt{(-x)^2-1}, & -x\leqslant -1\end{cases}=\begin{cases}-x+\sqrt{x^2-1}, & x\leqslant -1\\ -x-\sqrt{x^2-1}, & x\geqslant 1\end{cases}$$

$$=-\begin{cases}x-\sqrt{x^2-1}, & x\leqslant -1\\ x+\sqrt{x^2-1}, & x\geqslant 1\end{cases}=-\varphi(x),$$

因此，$\varphi(x)$ 为奇函数.

思考 显然，函数 $y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$也是奇函数. 因此，自然会问：有反函数的奇函数的反函数都是奇函数吗？是，给出证明；不是，举出反例.

例 1.5.3 设 $F(x)$ 是在 $\boldsymbol{R}$ 上有定义的以 4 为周期的周期函数，且当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，$F(x)=x^2-2x$. 若 $F(x)$ 为奇函数，求 $F(x)$ 的表达式.

分析 先根据奇偶性，求函数 $F(x)$ 在一个周期上的表达式；再根据周期性，将该表达式延拓到整个定义域上.

解 当$-2\leqslant x\leqslant 0$ 时，$0\leqslant -x\leqslant 2$. 因为 $F(x)$ 为奇函数，所以

$$F(x)=-F(-x)=-[(-x)^2-2(-x)]=-x^2-2x.$$

从而 $F(x)$ 在一个周期上的表达式为

$$F(x)=\begin{cases}x^2-2x, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ -x^2-2x, & -2\leqslant x<0\end{cases}.$$

又对 $\forall x\in\boldsymbol{R}$，$\exists k\in\boldsymbol{Z}$，使 $4k\leqslant x\leqslant 4k+2$ 或 $4k+2\leqslant x\leqslant 4(k+1)$，于是 $0\leqslant x-4k\leqslant 2$ 或$-2\leqslant x-4(k+1)<0$.

由于 $F(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，所以当 $4k\leqslant x\leqslant 4k+2$ 时，

$$F(x)=F(x-4k)=(x-4k)^2-2(x-4k)=x^2-2(4k+1)x+8k(2k+1);$$

当 $4k+2\leqslant x\leqslant 4(k+1)$ 时，

$F(x)=F[x-4(k+1)]=-[x-4(k+1)]^2-2[x-4(k+1)]=-x^2+2(4k+3)x-8(k+1)(2k+1)$.

综合得

$$F(x)=\begin{cases}x^2-2(4k+1)x+8k(2k+1), & 4k\leqslant x\leqslant 4k+2\\ -x^2+2(4k+3)x-8(k+1)(2k+1), & 4k+2\leqslant x\leqslant 4(k+1)\end{cases}\quad (k\in\mathbf{Z}).$$

思考 若 $F(x)$ 为偶函数，结果怎样？

注 这种方法称为对函数 $f(x)=x^2-2x$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上的奇偶延拓，在傅里叶级数的理论中常用．

例 1.5.4 求极限 $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{\sin^2(\pi-\arccos x)}{1+x}$.

分析 这是 $\dfrac{0}{0}$ 型极限，不可直接用商的极限运算法则．作替换将反三角函数的极限转化成三角函数的极限，可简化极限的计算．

解 令 $\pi-\arccos x=t$，则 $\arccos x=\pi-t$，$x=\cos(\pi-t)=-\cos t$，且当 $x\to -1^+$ 时，$t\to 0^+$．于是

$$原式=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin^2 t}{1-\cos t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1-\cos^2 t}{1-\cos t}=\lim_{t\to 0^+}(1+\cos t)=2.$$

思考 利用替换 $\arccos x=t$ 求解，并将这种解法与上述解法比较．

例 1.5.5 设 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在．若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]$ 不存在；若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在且不为零，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 均不存在．

证明 用反证法．假设 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]$ 存在，由 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在及代数和的极限的运算性质知

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=\pm\lim_{x\to x_0}\{[f(x)\pm g(x)]\pm f(x)\}=\pm\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]\mp\lim_{x\to x_0}f(x)$$

存在，这与 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在相矛盾，故 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]$ 不存在；

又假设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在及商的极限的运算性质知

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)}{f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}$$

存在，这与 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在相矛盾，故 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 不存在．

同理，可以证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 不存在．

思考 (i) 举例说明，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 未必不存在；(ii) 举例说明，当 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 均不存在时，极限 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 均可能存在，也可能不存在．

例 1.5.6 已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+ax^2+bx+c}{1-x^2}=-5$，求常数 a，b，c．

分析 这是已知 $x\to 1$（为有限值）时函数极限，反过来要确定函数的问题．也要用“分析法”求出 a，b，c，但与 $x\to\infty$（无限值）时的情形不同，这里还要用到多项式的因式分解．