同济大学本科教材出版基金资助

微积分简明教程

同济大学数学科学学院 兰 辉 刘庆生 主编

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

同济数学系列丛书

TONGJISHUXUEXILIECONGSHU

微积分简明教程

同济大学数学科学学院　兰　辉　刘庆生　主编

同濟大學出版社

TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是同济大学数学科学学院承担高等数学课程的骨干教师，在借鉴了同济大学相关优秀教材的基础上编写而成的，内容包括一元及多元函数微积分理论和应用. 全书通过探讨数学思想的本质阐述数学理论，避免过多的数学公式和繁琐的计算技巧，注重数学理论与实际生活的联系；并通过巧妙地使用数学史、科学家文献中的原始论述等，使历史背景与理论知识无缝对接，延伸了知识点的内涵.

本书直观易懂、深入浅出，符合文科学生的学习特点，可供高等院校文科专业的学生使用，也可供相关人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

微积分简明教程 / 同济大学数学科学学院，兰辉，刘庆生主编. — 上海：同济大学出版社，2017. 8

ISBN 978-7-5608-7214-8

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①同… ②兰… ③刘… Ⅲ. ①微积分—高等学校—教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 168570 号

同济数学系列丛书

微积分简明教程

同济大学数学科学学院　兰　辉　刘庆生　主编

责任编辑 张　莉　**责任校对** 徐春莲　**封面设计** 陈益平

出版发行　同济大学出版社　www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路 1239 号　邮编：200092　电话：021-65985622)

经　销　全国各地新华书店

印　刷　上海同济印刷厂有限公司

开　本　787 mm×960 mm　1/16

印　张　17.5

印　数　1—3 100

字　数　350 000

版　次　2017 年 8 月第 1 版　2017 年 8 月第 1 次印刷

书　号　ISBN 978-7-5608-7214-8

定　价　39.00 元

前　言

同济大学数学系于2011年进行了"'文科高等数学'教学方法的改革与实践"的探索，以部分语言类专业学生作为试点班，开展教学内容、教学方法、成绩评定等系列改革，目的是为高校更好地培养文科交叉型人才做有益的探索。在此背景下，同济大学数学系编写了《文科高等数学讲义》，并在试点班使用了三年，本书正是在该讲义的基础上修改定稿的.

对于理工科专业的学生来说，高等数学是思想，也是工具. 教师可以在教学中结合数学经典理论与专业应用案例培养学生的创造性思维能力、抽象概括能力、逻辑推理能力、自学能力以及分析问题和解决问题的能力，使学生进一步体会到大学数学在专业能力拓展中的基础核心价值，从而提升学生的学习积极性，完善教学成果. 与之相对应，文科高等数学的教学却呈现低效、难教的状态. 学生反映数学内容抽象，与未来的职业规划脱节，无法认同学习高等数学的必要性及重要性，而教师拘泥于过于数学专业化的教材，很难设计与文科专业相关的应用实例，从而很难调动学生的主观能动性. 另一方面，数字化的大时代又使得文科专业的学生在未来的职场生活中不可避免地会面对和使用数学的概念和词汇，因此，根据文科专业特点编写合适的高等数学教材是有必要的.

本书主要供高等院校文科专业的学生使用，内容包括一元及多元函数微积分理论和应用. 本书有以下几方面的特点：①参与编写的人员都是同济大学数学科学学院承担高等数学课程的骨干教师，有丰富的教学经验，并在编写过程中借鉴了同济大学相关优秀教材的精华；②全书用论述性探讨数学思想本质的语言阐述数学理论，避免过多的数学公式，繁琐的计算技巧，注重数学理论与实际生活的联系，直观易懂，深入浅出，符合文科学生的学习特点；③本教材巧妙地使用了数学史，使历史背景与理论知识无缝对接，在知识点的引入部分，教材使用了相关科学

家文献中的原始论述，使读者了解问题产生的背景，数学巨匠研究的初衷，在阐述理论的正文中插入“广角镜”，介绍数学理论与实际生活的联系，延伸知识点的内涵，在每一章的结尾补充总结性、概述性的数学史话，介绍数学家的贡献，微积分的发展历程以及数学家的创新精神；④在每一章的结束都编写寄语，自然引出下章的核心问题，与下一章开始的综述遥相呼应，使得内容环环相扣，自成体系；⑤每章配有难易程度适中的习题和测试题，方便读者巩固、加强对知识点的理解；⑥教材根据文科专业所需数学程度不同把较难内容用“*”标出，任课老师可以依据学时和学生基础删减或增加.

本书最初的讲义第一章、第二章由兰辉执笔，第三章由方小春、刘庆生执笔，第五章、第六章由张华隆、李少华、兰辉执笔.讲义完成后，兰辉老师使用该讲义作为文科类学生的高等数学教材，在使用过程中不断总结调整，使得该讲义不断完善，最终由兰辉统稿，刘庆生审稿形成本书.

在本书的编写过程中，得到了数学科学学院全体教师的鼓励和支持，特别是徐建平老师、殷俊锋老师、梁进老师，他们都为编者提供了新的视角和思路.

本书的出版得到了同济大学出版社的大力支持，在此向他们表示感谢！

对于热情接受本书的文科相关专业的学生和老师们，我们也表示由衷的感谢！

限于学识和阅历，本书难免有不当和疏漏之处，敬请读者批评、指正.

编　者

2017 年 5 月

目　录

前言

第 1 章　预备知识 ………………………………………………… 1
1.1　解析几何 ………………………………………………… 2
1.1.1　向量与空间直角坐标系 ……………………………… 2
1.1.2　曲面、曲线的方程 …………………………………… 7
习题 1.1 ………………………………………………………… 11
1.2　函数的概念 ……………………………………………… 12
1.2.1　函数的发展历程 ……………………………………… 13
1.2.2　集合 …………………………………………………… 15
1.2.3　函数的基本概念 ……………………………………… 18
1.2.4　函数的几种特性 ……………………………………… 21
1.2.5　函数的运算 …………………………………………… 23
习题 1.2 ………………………………………………………… 25
1.3　初等函数 ………………………………………………… 26
1.3.1　五种基本初等函数 …………………………………… 26
1.3.2　初等函数 ……………………………………………… 33
1.3.3　多元函数 ……………………………………………… 34
习题 1.3 ………………………………………………………… 36
1.4　极限思想萌芽 …………………………………………… 37
1.5　数学方法 ………………………………………………… 41
下章寄语 ………………………………………………………… 46
本章测试题 ……………………………………………………… 46

第 2 章　极限与连续 …… 49
2.1　函数极限 …… 50
2.1.1　数列极限的定义 …… 50
2.1.2　$x \to \infty$时的函数极限 …… 54
2.1.3　$x \to x_0$ 时的函数极限 …… 56
习题 2.1 …… 61
2.2　无穷小与无穷大 …… 62
2.2.1　无穷小 …… 62
2.2.2　无穷大 …… 63
习题 2.2 …… 65
2.3　极限的运算规则 …… 65
2.3.1　极限的四则运算法则 …… 65
2.3.2　复合函数的极限运算法则 …… 69
2.3.3　夹逼准则 …… 70
2.3.4　单调有界准则 …… 72
习题 2.3 …… 73
2.4　无穷小的比较 …… 74
2.4.1　无穷小的比较 …… 75
2.4.2　等价无穷小的替换定理 …… 77
习题 2.4 …… 78
2.5　连续性 …… 79
2.5.1　连续的定义及性质 …… 79
2.5.2　闭区间连续函数的性质 …… 83
习题 2.5 …… 85
2.6　重极限 …… 86
2.6.1　二重极限的定义 …… 86
2.6.2　多元函数的连续性 …… 88
习题 2.6 …… 89
2.7　级数 …… 90
2.7.1　级数 …… 91
2.7.2　正项级数 …… 93
2.7.3　交错级数 …… 97
2.7.4*　幂级数 …… 99

习题 2.7 …… 101
下章寄语 …… 102
本章测试题 …… 102

第 3 章 导数 …… 105
3.1 导数概念 …… 106
3.1.1 函数的变化率 …… 106
3.1.2 导数的定义 …… 108
3.1.3 可导的条件 …… 112
习题 3.1 …… 114
3.2 求导法则 …… 115
3.2.1 求导法则 …… 115
3.2.2 高阶导数 …… 120
习题 3.2 …… 122
3.3 隐函数求导 …… 123
3.3.1 由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数的求导方法 …… 124
3.3.2 由参数方程确定的函数的求导方法 …… 126
习题 3.3 …… 127
3.4 微分 …… 128
3.4.1 微分的定义 …… 129
3.4.2 可微的条件 …… 129
习题 3.4 …… 133
3.5 偏导数与全微分 …… 134
3.5.1 偏导数 …… 134
3.5.2 高阶偏导数 …… 137
3.5.3 全微分 …… 138
习题 3.5 …… 140
下章寄语 …… 141
本章测试题 …… 141
数学史话——微积分创立人之争 …… 142

第 4 章 导数的应用 …… 145
4.1 微分中值定理 …… 146

习题 4.1 …… 150
4.2 洛必达法则 …… 151
4.2.1 $\frac{0}{0}$型未定式 …… 152
4.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$型未定式 …… 154
4.2.3 其他类型的未定式 …… 156
习题 4.2 …… 157
4.3 函数的单调性 …… 157
习题 4.3 …… 161
4.4 极值与最值 …… 162
4.4.1 函数的极值 …… 163
4.4.2 函数的最大值与最小值 …… 165
习题 4.4 …… 167
4.5 函数的凹凸性 …… 168
4.5.1 函数的凹凸性 …… 168
4.5.2 曲率 …… 171
习题 4.5 …… 173
4.6 函数图形的描绘 …… 173
4.6.1 渐近线 …… 173
4.6.2 描绘函数图形 …… 174
习题 4.6 …… 176
4.7* 泰勒公式 …… 177
习题 4.7 …… 183
下章寄语 …… 183
本章测试题 …… 183

第 5 章 不定积分 …… 185
5.1 不定积分 …… 186
5.1.1 原函数 …… 186
5.1.2 不定积分的概念 …… 187
5.1.3 基本积分公式 …… 189
习题 5.1 …… 190

5.2　不定积分的计算方法 …… 191
5.2.1　不定积分的线性性质 …… 191
5.2.2　分部积分法 …… 192
5.2.3　换元法 …… 194
习题 5.2 …… 197
5.3　简单的微分方程 …… 198
5.3.1　微分方程的基本概念 …… 198
5.3.2　常用的一阶微分方程 …… 200
习题 5.3 …… 205
下章寄语 …… 206
本章测试题 …… 206

第 6 章　定积分 …… 207
6.1　定积分的概念 …… 208
6.1.1　曲边梯形的面积 …… 208
6.1.2　定积分定义 …… 211
习题 6.1 …… 213
6.2　微积分基本定理 …… 214
6.2.1　微积分基本定理 …… 215
6.2.2　定积分的换元法 …… 217
6.2.3　定积分的分部积分法 …… 219
习题 6.2 …… 220
6.3　定积分的应用 …… 221
6.3.1　面积 …… 221
6.3.2　已知截面面积的立体体积 …… 223
6.3.3　弧长 …… 225
6.3.4　平均值 …… 226
6.3.5　量的积累 …… 226
习题 6.3 …… 227
6.4　反常积分 …… 228
6.4.1　无穷限反常积分 …… 229
6.4.2　瑕积分 …… 231
习题 6.4 …… 233

6.5 二重积分 …… 234
6.5.1 二重积分的定义 …… 234
6.5.2 二重积分的性质 …… 238
6.5.3 二重积分的计算 …… 240
习题 6.5 …… 243
6.6* 傅里叶级数 …… 244
习题 6.6 …… 250
本章测试题 …… 251
数学史话——巨人的肩膀 …… 254

习题答案提示 …… 256

1.1 解析几何

几何学家惯于在困难的证明中使用达到结论的成长串的简单推理，使我想到，所有人们能够知道的东西，同样是互相联系的.

——笛卡尔 《正确思维和发现科学真理的方法论》

勒内·笛卡尔(Rene Descartes，1596—1650)，法国人，是杰出的近代哲学家，近代生物学的奠基人，是成绩卓著的物理学家、数学家. 他因将几何坐标系公式化被人们尊为“解析几何之父”. 笛卡尔在1637年发表了其最为有名的著作《正确思维和发现科学真理的方法论》，通常简称为《方法论》。文中附有三篇论文，在第三篇论文中，笛卡尔介绍了解析几何.

1.1.1 向量与空间直角坐标系

数学留给人的印象往往是抽象、严密、精确的. 抽象性表现为数学善于抛开问题表象因素，抓住问题本质. 例如，面对一个苹果，一支香蕉，一粒葡萄，画家关注的也许是色彩冷暖，光影搭配，生物学家关注的也许是水果的品种分类，地理学家关注的也许是产地流域分布特点，……，数学家关注到的却是具体事物下隐藏的那个小小的“1”. 抽象使得数学便于发现规律，在规律中自行演绎，继而得到更加抽象的结论. 数学的严密性、精确性表现为抽象概念的准确性，推理、计算的逻辑严格性以及由此得到的数学结论的无可争辩性. 数学的这几种特性贯穿于欧几里得几何诞生后的数学研究，培养了一代代的数学家，却让人们渐渐拘泥于数学此种刻板印象，面对数学望而却步.

数学最初的来源是有形的，数学是为了解决实际问题而创造出来的思想方法. 割裂数学方法、理论与有形问题的联系会让数学学习变得枯燥无趣. 17世纪上半叶，法国数学家笛卡尔一直在寻找数学研究中有形与抽象的相互转换. 笛卡

尔一直对几何学中占主导地位的欧氏几何不满，他认为古希腊人的数学是几何式的代数，例如一个变量表示某线段长度，两个变量乘积表示某矩形的面积，三个变量的乘积表示某长方体体积. 三个以上的乘积则无法处理. 定理的证明也过分依赖几何图形，证明方法不具有推广性. 笛卡尔对当时的代数也是诸多批评，认为它完全拘泥于法则和公式，是牵线的木偶，以至于“成为一种充满混杂与晦暗、故意用来阻碍思想的没用的艺术，而不像一门改进思想的科学”①. 笛卡尔一直以来都希望能够撷取代数与几何中最好的东西，互相取长补短：几何图形是直观、易于理解的，而代数方程是比较抽象、富有规则的，能不能把几何图形与代数方程结合起来，也就是说用几何图形来刻画方程，用方程来表示几何图形呢？要想达到这个目的，运动的“点”是关键，如何把组成几何图形的点和满足方程的每一组“数”挂上钩？

契机来自于一只蜘蛛. 据说有一天，笛卡尔生病卧床，这时他看见屋顶上的一只蜘蛛在他上边左右拉丝，在空中结成复杂的迷宫. 动态蜘蛛的“表演”让笛卡尔茅塞顿开. 他终于找到了直观表达函数的方法.

如果把蜘蛛看做一个动点，它的每个位置是否都能用一组数确定下来呢？以地面上的墙角作为起点，把屋子里相邻的两面墙与地面交出来的三条线作为三根数轴(图 1.1)，那么空间中任意一点的位置就可以用这三根数轴找到有顺序的三个数. 反过来，任给一组三个有顺序的数也可以在空间中找出一点 P 与之对应(图 1.1). 同样道理，用一组数 $(x,\ y)$ 可以表示平面上的一个点，平面上的一个点也可以用一组有顺序的两个数来表示，这就是坐标系的雏形(图 1.2).

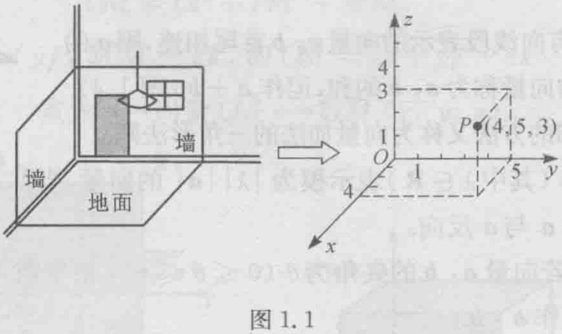

图 1.1

① 选自《方法论》，笛卡尔，1637.

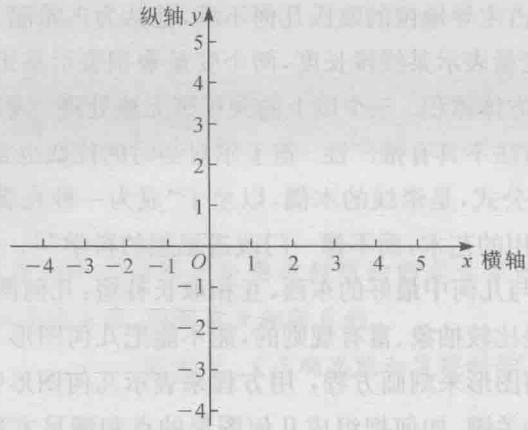

图 1.2

要实现笛卡尔的初衷，即点与坐标的一一对应，还需借助于向量. 起源于自然界的向量意为有大小有方向的量，如力，位移等. 向量通常用带箭头的线段表示，线段长度表示向量的大小，箭头表示方向，记作 $\overrightarrow{AB}$，$\vec{a}$ 或 $\boldsymbol{a}$（图 1.3）. 向量可自由平移. 向量的大小称为向量的模，记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$.

图 1.3

模为 0 的向量称为零向量，模为 1 的向量称为单位向量. 模相等，方向相同的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 称为相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 方向相同或相反的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 称为平行向量，记作 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$. 零向量可以认为与任意向量平行.

向量不能像数量那样直接比较大小，但它也有自己的运算.

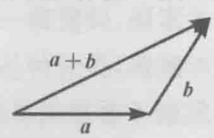

图 1.4

（1）**加法**：将有向线段表示的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 首尾相连，则 $\boldsymbol{a}$ 的起点指向 $\boldsymbol{b}$ 终点的向量称为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图 1.4）. 此种定义向量之和的方法又称为向量加法的三角形法则.

（2）**数乘**：$\lambda\boldsymbol{a}$（其中 $\lambda\in\mathbf{R}$）表示模为 $|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|$ 的向量，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向.

（3）**数量积**：若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ（$0\leqslant\theta\leqslant\pi$），则常数 $|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 称为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的数量积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

特别地，若向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$，则称 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 此时 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

向量具有两个基本的简单性质，这两个性质是实现笛卡尔理想的基础.

性质1　对于任一向量$\boldsymbol{a}$，都有$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$，其中$\boldsymbol{e}_a$表示与$\boldsymbol{a}$同向的单位向量. 说明向量可以由模及单位向量刻画.

性质2　设$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}$充分必要条件为存在唯一的实数$\lambda$，使得$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 说明平行向量存在等量关系.

由此，我们可以在代数和几何之间架起了一座桥梁：

给定一个点，一个方向，一个单位长度，则可以确定一个数轴使得数轴上任一点P有唯一的实数x与之对应.

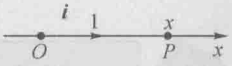

图 1.5

由点O、指定方向及单位长度，我们可以确定单位向量$\boldsymbol{i}$，构造一个数轴(图 1.5)，数轴上任一点P，对应向量$\overrightarrow{OP}$，由于$\overrightarrow{OP}\parallel\boldsymbol{i}$，则存在唯一实数$x$使得$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，于是

$$\text{点 } P\longleftrightarrow\text{向量 }\overrightarrow{OP}\longleftrightarrow\text{ 实数 } x,$$

实数x成为刻画点的重要指标，称其为点P在数轴上的坐标.

空间中的点也可以类似表示.

空间取一点O和三个两两垂直的单位向量$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，我们可以确定三个坐标轴x轴、y轴及z轴，它们的正向满足右手法则(图 1.6)，即右手抓住z轴，四指从x轴正向绕到y轴正向，称这样的结构为**空间直角坐标系**. 三个坐标轴构成三个坐标平面，分别记作xOy面，yOz面及xOz面. 空间被三个坐标面分割为八个卦限(图 1.7).

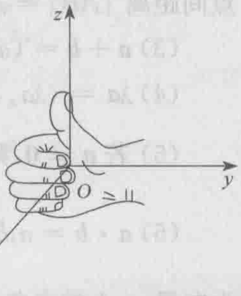

图 1.6

利用向量加法的三角形法则有(图 1.8)，

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM'}+\overrightarrow{M'M},$$

而$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{PM'}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{M'M}=z\boldsymbol{k}$，即$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，于是

$$\text{点 } M\longleftrightarrow\text{向量 }\overrightarrow{OM}\longleftrightarrow\text{数对 }(x,\ y,\ z).$$

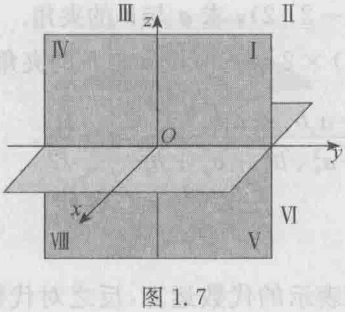

图 1.7

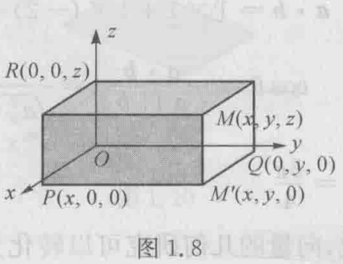

图 1.8

由此空间任一点 M，都有一组有序三数对 (x, y, z) 与之一一对应，称为 M 点的坐标.

三维立体空间我们以后可以用 $\mathbf{R}^3$ 来表示，即

$$\mathbf{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, 3\}.$$

从此向量由几何化表示的量转化为可代数化表示的量，它的运算是否也可以代数化表示？

定理 1 设 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$，$\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$，则

(1) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow a_i = b_i, i = x, y, z$;

(2) $|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$，特别地，若点 $A(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$，则两点间距离 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$;

(3) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$;

(4) $\lambda \boldsymbol{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$，$\lambda \in \mathbf{R}$;

(5) 若 $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{b} \parallel \boldsymbol{a} \Leftrightarrow \dfrac{b_x}{a_x} = \dfrac{b_y}{a_y} = \dfrac{b_z}{a_z}$;

(6) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$，$\cos\theta = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$（这里 θ 为向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角）. 特别地，$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

例 1 设 $\boldsymbol{m} = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{p} = 5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{m} + 3\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p}$.

解

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= 4\boldsymbol{m} + 3\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p} \\ &= 4(3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}) + 3(2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}) - (5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}) \\ &= 13\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 15\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

例 2 已知 $\boldsymbol{a} = (1, 1, -4)$，$\boldsymbol{b} = (1, -2, 2)$，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

解 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1 \times 1 + 1 \times (-2) + (-4) \times 2 = -9$，设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

从而有 $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$.

至此，向量的几何研究可以转化为用数表示的代数运算，反之对代数语言表

达的理论我们可以加以几何解释，从而直观地掌握这些理论的意义，并得到启发提出新的结论. 笛卡尔看似偶然的发现，创造了用代数的方法来研究几何图形的数学分支——解析几何，从此改变了数学的面貌. 事实上，17 世纪以来的数学发展（包括微积分），在很大程度上都应归功于坐标几何的诞生.

1.1.2　曲面、曲线的方程

运动的点可以生成更为复杂的几何图形. 空间曲面在几何上就可以看做是点的运动轨迹.

例 3　建立球心在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，半径为 r 的球面方程.

解　设点 $M(x, y, z)$ 是球面上任意一点，根据题意 $|\overrightarrow{MM_0}| = r$，

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = r,$$

即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = r^2.$$

特别地，当球心是坐标原点时，球面方程为 $x^2+y^2+z^2=r^2$.

如果曲面 S 与三元方程

$$F(x, y, z)=0 \tag{1.1}$$

有下述关系：

(1) 曲面 S 上任一点的坐标都满足方程(1.1)；

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标都不满足方程(1.1)，

那么方程(1.1)就叫做曲面 S 的方程，称曲面 S 为方程(1.1)的图形(图 1.9).

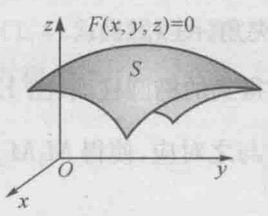

图 1.9

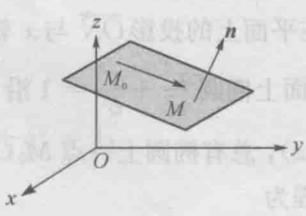

图 1.10