

CFD

计算基础 ④ 技能提高

薛永飞 赵伟国 ④ 著



中南大学出版社
www.csupress.com.cn

CFD

计算基础与技能提高



赵伟国◎著



中南大学出版社

www.csupress.com.cn

·长沙·

图书在版编目(CIP)数据

CFD 计算基础与技能提高 / 薛永飞, 赵伟国著. --长沙: 中南大学出版社, 2017.9

ISBN 978-7-5487-3016-3

I. ①C… II. ①薛… ②赵… III. ①计算流体力学—高等学校—教材 IV. ①O35

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第236604号

CFD 计算基础与技能提高
CFD JISUAN JICHU YU JINENG TIGAO

薛永飞 赵伟国 著

-
- 责任编辑 刘锦伟
 责任印制 易红卫
 出版发行 中南大学出版社
社址: 长沙市麓山南路 邮编: 410083
发行科电话: 0731-88876770 传真: 0731-88710482
 印 装 长沙雅鑫印务有限公司
-

- 开 本 720×1000 1/16 印张 14 字数 278 千字
 版 次 2017年9月第1版 2017年9月第1次印刷
 书 号 ISBN 978-7-5487-3016-3
 定 价 58.00 元
-

图书出现印装问题, 请与经销商调换

内容提要

全书内容主要包括计算流体力学基础、仿真计算基础、管道流动模拟详细操作、房间空调流动模拟、贯流风机分析、基于 Workbench 的建模分析、水泵流动分析、空化流动分析、气液两相流动分析等，以及 CFD(计算流体力学)技能与提高。本书内容由简单到复杂，一步步展示 CFD 技术的魅力，通过实例展示了 CFD 技术在建筑环境与能源应用工程及相近专业的应用。全书的目标是提高本科生创新创业技能，可把实际产品流动进行数值可视化，进而推动相关产品的升级换代。

本书适用于建筑环境与能源应用工程、热能工程和相近专业本科生教学，作为第二课堂提高学生的创新创业技能，也可作为相近专业研究生学习辅助资料，当然也可作为 Ansys fluent 和 CFX 自学者提高与进阶的入门宝典。

作者简介



薛永飞 河南工程学院土木工程学院副教授，华中科技大学流体机械及工程专业博士，现从事建筑环境与能源应用工程专业教学，多次获得教学质量优秀奖。研究方向主要有流体机械、气动声学、暖通空调系统和工程研究等。2011年获得青年骨干教师称号。发表论文50余篇，其中被EI、SCI收录10余篇，参编教材、著作5部，主持、参与省级以上项目10项，获省部级奖5项。

赵伟国 兰州理工大学副教授，硕士生导师。2006年获华中科技大学机械及工程专业硕士学位，2012年获浙江大学流体力学专业博士学位。*Journal of Energy Engineering*、*Advances in Mechanical Engineering*、《排灌机械工程学报》等杂志审稿专家。主要研究方向为水力机械优化设计及空化多相流。目前主持国家自然科学基金项目一项，主持省级项目多项，参加国家“973”项目、国家科技支撑计划及国家自然科学基金重点项目多项。已在国际、国内会议及行业权威刊物上发表了论文40余篇，其中被EI、SCI收录10余篇。

前 言

自然界存在着大量复杂的流动现象，仅仅凭借简单的流体知识不能很好地应用这些流动现象，这促使人们不断研究、开发新的技术。计算流体力学(CFD)是数值数学和计算机科学结合的产物，它以电子计算机为工具，应用各种离散化的数学方法，对流体力学的各类问题进行数值实验、计算机模拟和分析研究，以解决各种实际问题。它从基本物理定理出发，在很大程度上替代了耗资巨大的流体力学实验设备，在科学研究和工程技术中产生巨大的影响。

CFD 兴起于 20 世纪 60 年代，随着 20 世纪 90 年代后期计算机的迅猛发展，CFD 得到了飞速发展，逐渐与实验流体力学一起成为产品开发中的重要手段。CFD 是目前国际上一个重要的研究领域，是进行传热、传质、动量传递及燃烧、多相流和化学反应研究的核心和重要技术，广泛应用于航天设计、汽车设计、化工处理工业、HVAC&R 等工程领域。计算流体力学的原理是用数值方法求解非线性联立的质量、能量、组分、动量和自定义的标量的微分方程组，求解结果能预报流动、传热、传质、燃烧等过程的细节，并成为过程装置优化和放大定量设计的有力工具。

作者在 20 年的一线教学过程中发现，一些学生往往苦恼于创新的后劲不足，结合当今时代要进一步提高大学本科生的创新创业技能的趋势，作者意识到要培养学生的创新意识，让学生在完成基本知识学习的基础上，掌握 CFD 技能。通过对流体力学及流体机械相关知识的学习，学生可处在简单应用的层次上，部分学生可通过进一步学习及思考获得创新能力。

本书主要内容包括计算流体力学基础、仿真计算基础、管道流动模拟详细操

作、房间空调流动模拟、贯流风机分析、基于 Workbench 的建模分析、水泵流动分析、空化流动分析、气液两相流动分析等以及 CFD 技能提高。学习掌握本书的相关知识后,学生能在计算流体动力学方面有所思考,可以把实际流动进行数值可视化模拟,进一步推动流动相关产品的升级换代,间接掌握流体动力学基础知识,并学会一门研究手段。

本书的算例、示例均为分步说明,语言通俗易懂,学生容易理解。相关计算数据(例如 mesh, jou, case, prt 等)及一些源文件操作代码都已在网上共享,论坛可以作为交流学习的平台(源文件地址: <http://hngcltx.un-it.cn/forum.php?mod=forumdisplay&fid=37>)。

河南工程学院土木工程学院副教授薛永飞承担本书第 1~6 章和第 9~10 章的撰写工作,兰州理工大学副教授赵伟国承担本书第 7、8 章的撰写工作。

本书适用于建筑环境与能源应用工程、热能工程和相近专业本科生教学,作为第二课堂提高学生的创新创业技能,也可作为相近专业的研究生学习辅助资料,当然也可作为 ANSYS fluent 和 CFX 自学者提高与进阶的入门宝典。

在本书的出版过程中,首先要感谢河南工程学院土木工程学院教学同仁的支持,感谢 ANSYS fluent 论坛、流体中文网等媒体,同时,也要感谢河南工程学院博士基金(D2014002)的支持,感谢高建新同志的资助,以及一些同行的支持。

本书成稿仓促,难免存在一些瑕疵,恳请读者批评指正。

作者

2017 年 6 月

目 录

第 1 章 计算流体力学基础	(1)
1.1 流体力学概述	(1)
1.2 CFD 基本方程	(3)
1.2.1 零方程模型	(4)
1.2.2 一方程模型	(6)
1.2.3 两方程模型	(6)
1.2.4 各类模型的特点	(8)
1.3 CFD 的发展与应用	(9)
1.3.1 CFD 的发展	(9)
1.3.2 CFD 的应用软件	(11)
1.4 小结	(14)
第 2 章 仿真计算基础	(15)
2.1 CFD 的求解过程	(15)
2.1.1 建立控制方程	(15)
2.1.2 确定初始条件与边界条件	(15)
2.1.3 划分计算网格	(16)
2.1.4 建立离散方程	(16)
2.1.5 初始条件和边界条件离散化	(16)
2.1.6 给定求解控制参数	(17)
2.1.7 求解离散方程	(17)
2.1.8 判断解的收敛性	(17)
2.1.9 显示和输出计算结果	(17)
2.2 Fluent 软件的应用	(17)

2.3	Gambit 2.4.6 的应用	(31)
2.3.1	Gambit 概述	(31)
2.3.2	创建点	(33)
2.3.3	线的创建(Line)	(34)
2.3.4	面(Face)的创建	(35)
2.3.5	网格的划分	(35)
2.3.6	边界的定义	(40)
2.3.7	保存和输出	(40)
2.3.8	三维建模	(40)
2.4	基础实例演示	(41)
2.4.1	驱动腔网格模型	(42)
2.4.2	Fluent 求解	(46)
2.5	小结	(50)
第3章	管道流动模拟详细操作	(51)
3.1	案例简介与思路分析	(51)
3.2	几何建模	(51)
3.3	网格建模	(56)
3.4	求解过程	(61)
3.5	小结	(67)
第4章	房间空调流动模拟	(68)
4.1	案例简介与思路分析	(68)
4.2	几何与网格建模	(68)
4.3	网格建模	(72)
4.4	一般求解过程	(72)
4.6	空气龄分布计算	(78)
4.5	小结	(80)
第5章	贯流风机分析	(81)
5.1	案例简介与思路分析	(81)
5.2	几何建模	(82)
5.3	网格建模	(84)
5.4	结果与处理	(87)
5.5	小结	(93)

第 6 章 基于 Workbench 的建模分析	(94)
6.1 案例简介与思路分析	(94)
6.2 几何与网格建模	(94)
6.3 基于 Workbench 的流场计算	(97)
6.4 CFD - POST 多模型处理	(101)
6.5 小结	(104)
第 7 章 水泵流动分析	(105)
7.1 案例与思路分析	(105)
7.2 几何建模	(105)
7.3 网格建模	(105)
7.3.1 运行 ICEM CFD 软件	(105)
7.3.2 设置工作目录	(106)
7.3.3 导入离心泵水体文件	(107)
7.3.4 网格划分	(107)
7.4 CFX 的设置及计算	(127)
7.5 求解过程	(141)
7.6 结果与处理	(142)
7.7 小结	(147)
第 8 章 空化流动分析	(148)
8.1 案例与思路分析	(148)
8.2 几何建模	(149)
8.3 网格划分	(151)
8.4 求解过程	(157)
8.4.1 空化流初始场求解	(157)
8.4.2 空化流求解	(165)
8.5 结果与处理	(167)
8.6 小结	(171)
第 9 章 其他案例分析	(172)
9.1 气液两相流动分析	(172)
9.1.1 多相流基础	(172)
9.1.2 案例分析	(172)

9.2 燃烧分析	(179)
9.2.1 燃烧基础	(179)
9.2.2 燃烧案例	(181)
9.3 噪声分析	(184)
9.3.1 流动与声	(184)
9.3.2 ANSYS Fluent 流噪声计算方法	(186)
9.3.3 噪声案例	(190)
9.4 小结	(194)
第 10 章 CFD 技能提高	(195)
10.1 Fluent 在 Workbench 平台下的优化分析	(195)
10.1.1 Workbench Design Explorer 介绍	(195)
10.1.2 三通合流优化案例	(196)
10.2 Tecplot 分析技术	(201)
10.2.1 Fluent 动画	(202)
10.2.2 Q 准则	(204)
10.3 网格建模进阶	(205)
10.4 小结	(209)
参考文献	(210)

第1章 计算流体力学基础

计算流体力学(computational fluid dynamics, CFD)是20世纪60年代以来,随着计算机的发展而产生的一个介于数学、流体力学和计算机之间的交叉学科,主要研究内容是通过计算机和数值方法来求解流体力学的控制方程,对流体力学问题进行模拟和分析。

1.1 流体力学概述

流体力学作为一门独立的学科,开始于伯努利(1700—1783)和欧拉(1707—1783)所处的18世纪。伯努利首先采用了流体动力学这个术语(并将流体静力学和水力学包含在这门科学之内),并且他还发现了边界层表面效应,由此得出以他的名字命名的伯努利方程。欧拉提出了理想流体的运动方程,并且发展了有关数学理论。19世纪初期和中期,纳维尔(1785—1836)和斯托克斯(1819—1903)分别导出了黏性流体的运动方程,即Navier-Stokes(N-S)方程,并且,斯托克斯被看作是近代流体力学理论的奠基人。20世纪以后,儒可夫斯基(1847—1921)发展了机翼外力理论,对机翼设计作出了杰出的贡献。普朗特(1875—1953)在1904年提出了划时代的边界层理论,从而使黏性流体和无黏性流体的概念协调起来。并且,由于升力理论和边界层理论的建立,流体力学脱离了纯理论的研究而开始了与工程实际相结合的研究。

欧拉在1753年提出了连续介质假设:任何种类的流体,从微观角度看,并不是连续分布的物质,而均是由无数分子组成的。由于分子之间总是存在间隙,故流体的物理量在空间为非连续分布。但是,由于分子与分子之间的距离 l 远比工程中被研究流体所占空间的尺寸 L 小得多(在标准状态下,即 0°C 与一个标准大气压, 1 mm^3 空气含 2.7×10^{16} 个分子),即 $l \ll L$,因此,我们在研究宏观的流体流动时不考虑流体分子之间的间隙,而将流体看作是由无数流体质点连续地、无空隙地充满的介质,这便是连续介质假设(由于实际上流体分子之间是有间隙的,并非连续分布的介质,所以称其为假设)。连续介质假设是流体力学中第一个带

有根本性的假定，正是有了连续介质假设，才可以将一个微观的问题转化为宏观的问题来处理，从而可利用数学分析中连续函数这个工具来研究流体的运动和平衡规律。

当管中流体速度增大到一定程度时，流体在管中的横向运动十分剧烈，流体间产生了强烈的混合作用。流体的层状运动(层流)被彻底打破，流体在向前流动时处于无规则的混乱状态。各流体质点的瞬时速度大小与方向是随时间变化的，各流层质点互相掺混。这就是紊流现象，紊流是绝对的。

所以，由于连续介质假设使流体运动宏观化，且紊流的存在为常态，故每一个质点的运动都是紊乱的，这使研究流体湍流运动较困难。流体力学家们已经有了3种解决流体力学问题的行之有效的工具，这就是理论分析、实验模拟和数值方法。

理论分析的优点在于能迅速地得出封闭形式的解，结果清晰、有普遍性，许多流动的解析解与实验结果一样对于流体力学及其发展是极其珍贵的。但是，对于非线性的情况，只有少数流动才能得到解析结果。

实验模拟的结果一般都比较真实，它是理论分析和数值方法的基础。因此，从原则上来说，实验的重要性不容低估。然而，实验模拟往往受到一定的限制，首先是受模型尺寸的限制，一般实验要模拟几个量纲为一的参数，但往往这些参数不能全部模拟，只能选择主要参数进行模拟，例如，风洞很少能模拟飞机飞行的雷诺数和飞行器周围流场中的温度场等。其次实验还会受到边界的影响，如模拟一架飞机在无限大的空间中飞行，采用风洞模拟这种流动会受到洞壁的干扰，此外，在实验中杂质和测量方法本身都会对所得结果产生影响。

数值方法没有以上带根本性的缺点或限制，但它也有不足之处，其受计算机的运行速度和贮存量的限制。过去，这个限制使我们在求解流体力学问题时不得不对流体力学的 Navier - Stokes 方程作出大胆的简化。近年来，计算机的内存和运行速度大大地提高了，数值方法体现出越来越大的优势。但是，流体力学中对基本物理现象的观察、流体流动机理的研究以及流体的基本物理参数的测量，仍必须依靠实验模拟来完成。

流体力学的数值方法研究，就是计算流体力学的应用。早在20世纪初，理查德就已提出用数值方法来解流体力学问题的思想，但是由于问题本身的复杂性和当时计算工具的落后，这一思想并未引起人们重视。20世纪40年代中期电子计算机问世后，采用电子计算机进行数值模拟和计算才逐渐成为现实。1963年美国 F. H. 哈洛和 J. E. 弗罗姆用当时的 IBM7090 计算机，成功地解决了二维长方形柱体的绕流问题，并给出尾流涡街的形成和演变过程。1965年，哈洛和弗罗姆发表“流体动力学的计算机实验”一文，对计算机在流体力学中的巨大作用进行了介绍，计算流体力学才渐渐引人注目。因此，人们把20世纪60年代中期看成是计

算流体力学兴起的时间，自此，计算流体力学逐渐形成了一门独立的学科。

随着计算机的发展，计算流体力学也得到了迅速的发展。现在所有涉及流体流动、热交换、分子输运等现象的问题几乎都可以通过计算流体力学进行模拟和分析，其应用的领域非常广泛，比如水利工程、土木工程、环境工程、食品工程、海洋工程、工业制造、航空航天、汽车发动机等。图1-1所示为圆柱绕流流动情况的数值解，若不通过数值方式解出，要花费大量的人力和物力才可解出。

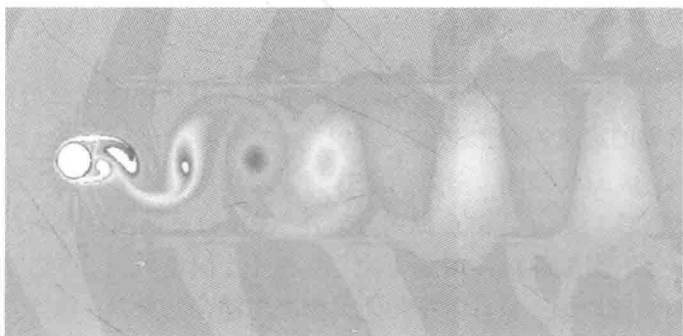


图1-1 圆柱绕流流动情况的数值解

1.2 CFD 基本方程

流体运动遵循着物理学3大守恒定律：质量守恒定律、动量守恒定律和能量守恒定律。这3大守恒定律对流体运动的数学描述构成了N-S方程这一流体力学基本控制方程组，它包括连续性方程、动量方程、能量方程。无论流体运动多么复杂，非稳态的N-S方程对于湍流的瞬时运动总是适用的。

为了便于对各控制方程进行分析，并用同一程序对各控制方程进行求解，需建立各基本控制方程的通用形式：

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \text{div}(\rho u\varphi) = \text{div}(\Gamma \text{grad}\varphi) + S \quad (1-1)$$

式中： φ 为通用变量，可以代表 u 、 v 、 w 、 T 等求解变量； Γ 为广义扩散系数； S 为广义源项。

一般的流动问题用质量、动量守恒定律就可以求解，若要求传热问题，则需联立各能量方程求解。对于流动与传热耦合问题（例如，模型中包含依赖于温度的介质属性或浮力），在计算能量方程之前，用户可以首先求解流动方程，获得收敛的流场计算结果之后，再选择能量方程，然后同时求解流动与传热方程，最终获得问题的完整解。

用 Fluent 求解如下的能量方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho E + \nabla \cdot [\mathbf{v}(\rho E + p)] = \nabla \cdot \left[\underbrace{k_{\text{eff}} \nabla T}_{\text{热传导}} - \underbrace{\sum h_j J_j}_{\text{组分扩散}} + \underbrace{(\tau_{\text{eff}} \cdot \mathbf{v})}_{\text{黏性扩散}} \right] + S_h \quad (1-2)$$

式中: \mathbf{v} 为速度矢量; p 为压强; T 为温度; τ_{eff} 为湍流应力张量; S_h 为热源项; k_{eff} 为有效热导率 ($k + k_{\text{eff}}$, 其中, k 为湍流引致的热导率, 由模型中使用的湍流模型确定); J_j 为组分 j 的扩散通量。

$$E = h - \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \quad (1-3)$$

这里显焓 h 的定义(对理想气体)为:

$$h = \sum_j Y_j h_j \quad (1-4)$$

对不可压流体:

$$h = \sum_j Y_j h_j + \frac{p}{\rho} \quad (1-5)$$

式中: Y_j 为组分 j 的质量分数, 而且:

$$h_j = \int_{T_{\text{ref}}}^T c_{p,j} dT \quad (1-6)$$

式中: T_{ref} 为 298.15 K。

CFD 的应用着重在于对湍流的模拟, 其中最基本的方法是在湍流尺度的网格尺寸内求解瞬态的三维 N-S 方程的全模拟方法, 此时无需引进任何模型。然而受计算方法及计算机运算水平的限制, 该方法不易实现。另一种要求稍低的方法是在亚网格尺度度模拟即大涡模拟 (LES), 也是由 N-S 方程出发, 其网格尺寸比湍流尺度大, 可以模拟湍流发展过程的一些细节, 但由于计算量仍然很大, 只能模拟一些简单的情况, 直接应用于实际工程问题也存在很多问题。目前, 数值模拟主要有 3 种方法, 即时均 N-S 方程的求解、大涡模拟 (LES) 和直接数值模拟 (DNS), 使用这 3 种模拟方法的前提是建立合适的湍流模型。

常用的湍流模型有: 零方程模型, 包括由 Cebeci-Smith 提出的 C-S 模型和由 Baldwin-Lomax 提出的 B-L 模型; 一方程模型, 来源有 2 种, 一种从经验和量纲分析出发, 针对简单流动逐步发展起来, 如 Spalart-Allmaras (S-A) 模型, 另一种由两方程模型简化而来, 如 Baldwin-Barth (B-B) 模型; 两方程模型, 应用比较广泛的有 Jones 与 Launder 提出的标准 $k-\epsilon$ 模型以及 $k-\omega$ 模型。

1.2.1 零方程模型

20 世纪 30 年代发展的一系列湍流的半经验理论, 如 Prandtl 的混合长度理

论、Taylor 的涡量输运理论、Von Karman 的相似性理论等，其本质上即是零方程模型。零方程模型直接建立雷诺应力与平均速度之间的代数关系，由于不涉及代数关系故称为零方程模型，方程如下所示：

$$-\rho \overline{u'v'} = \rho \varepsilon_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (1-7)$$

式中： ε_m 称为涡黏系数，它与分子的运动黏性系数 ν 有相同的量级。对于一般的三维情况，式(1-7)可写为：

$$-\rho \overline{u'_i v'_j} = 2\varepsilon_m S_{ij} - \frac{2}{3} K \delta_{ij} \quad (1-8)$$

式中： K 为单位质量的湍流脉动动能。

为了发展上述方法，需要建立 ε_m 与平均速度之间的关系。1925 年，普朗特在这一方向做了重要工作，他提出了混合长度理论，该理论认为：存在一长度 l ，在此长度内流体质点运动是自由的（不与其他质点相遇），则 l 称为混合长度。由于湍流漩涡的作用，流体微团上下跳动，由于微团的流向速度不会立即改变，当其跳动至新位置后，其速度会低于当地周围的平均速度，此即流向脉动速度 $u' \approx U(y_1) - U(y_0)$ ，显然，此速度差取决于当地的平均速度梯度 $\partial U / \partial y$ 与微团沿 y 向跳动的距离 l ，即：

$$u' \approx l \frac{\partial U}{\partial y}$$

式中： l 称为混合长度。在此混合长度内微团沿 y 向跳动时基本不改变其原有速度。实际测量表明，虽然一般情况下流向的脉动速度的均方根值大于法向值，但它们有相同的量级，因此有：

$$v' \approx l \frac{\partial U}{\partial y}$$

所以有：

$$-\rho \overline{u'_i v'_j} = \rho l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (1-9)$$

由此可算出涡黏性系数为：

$$\varepsilon_m = l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \quad (1-10)$$

由此可见，若假设 l 不随速度变化，则可得湍流切应力与平均速度的平方成正比，这与实验结果是一致的。

混合长度理论已成功地应用于研究多种湍流剪切流，如流管、边界层和各种湍流剪切流。目前应用最广泛的零方程模型是 B-L 模型，该模型对湍流边界层的内层和外层采用不同的混合长度假设，在流体分离不严重的流场计算中结果较好。事实上，零方程模型仅适用于局部平衡状态的湍流流动。

1.2.2 一方程模型

一方程模型一般用于求解湍流动能或涡黏性系数的输运方程，精度较好，鲁棒性也较好，其中 B-B 模型和 S-A 模型是一方程模型中的典型代表。特别是 S-A 模型，从经验和量纲分析出发得出了涡黏性系数的输运方程，采用大量的实验结果标定模型系数，具有良好的鲁棒性和计算精度，目前已经被集成在各种商业软件和科学计算的代码中，在航空航天领域空气动力学计算中得到了十分广泛的应用。

S-A 模型常被认为是 B-L 模型和两方程模型之间的桥梁。由于其容错性能好，处理复杂流动的能力强，S-A 模型已得到广泛应用。S-A 模型与 B-L 模型相比，其湍流涡黏场是连续的。S-A 模型优于 B-L 模型之处在于其容错性好，计算量小。该湍流的原理建立在一个附加的涡黏输运方程的解决上。方程中包含对流项、扩散项和源项，以非守恒形式建立。S-A 模型不同于其他一方程模型，它不是由方程经过简化得到的，而是直接根据经验和量纲分析，从简单流动开始，直接得到最终的控制方程。该模型与两方程模型相比，其计算量小和稳定性好，同时又有较高的精度。由于模型方程的因变量函数在对数律区内与到壁面的距离成线性关系，所以可以使用相对于低雷诺数模型较粗的网格。另外，模型是非当地型的，方程中没有诸如 y^+ 这类当地型的项在内，所以在有多个物理面的复杂流场中不需要进行特殊处理，使用方便。

1.2.3 两方程模型

由于使用的局限性，零方程模型和一方程模型很难应用于工程实际。目前，两方程模型在工程中使用最为广泛，最基本的两方程模型是 $k-\varepsilon$ 模型。

20 世纪 70 年代，Launder 发展的 $k-\varepsilon$ 模型被称为标准 $k-\varepsilon$ 模型，它可求解湍流动能 k 及湍流动能耗散率 ε 的输运方程，能够反映一定的湍流物理量的输运特性，是两方程模型的先驱。之后研究人员又发展了重整化群 $k-\varepsilon$ (RNG $k-\varepsilon$) 模型、可实现性 $k-\varepsilon$ 模型等，进一步强化了 $k-\varepsilon$ 系列模型的计算性能。另外一个系列的两方程模型为 ε 模型系列，其中比较有代表性的有标准 $k-\omega$ 模型和 SST $k-\omega$ 模型。一般来说， $k-\varepsilon$ 模型对高雷诺数充分发展的湍流模拟效果较好，而 $k-\omega$ 模型改进了 $k-\varepsilon$ 模型对受壁面影响湍流模拟的缺陷，对壁面附近的湍流模拟精度较高。

1.2.3.1 $k-\varepsilon$ 模型

$k-\varepsilon$ 模型假定涡黏系数 ν_t 由下式计算：

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (1-11)$$