普通高等教育精品教材

# 应用线性代数

YINGYONG XIANXING DAISHU

主编 赵晓

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育精品教材

# 应用线性代数

主编 赵晓

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

## 内容提要

本书是以培养应用型本科人才为目标，结合各专业的特点，认真归纳总结而编写的. 本书既注重线性代数的基本概念、基本理论、基本方法等基础理论，也注重应用技能的培养，紧密联系生活实际，针对不同专业选取最新实例进行计算与分析，并配备计算机操作实践和相应的技能训练，培养学生解决问题的能力.

本书共五章，包括线性方程组、矩阵、行列式、特征值与特征向量、二次型.

本书内容翔实，通俗易懂，应用性强，可作为普通高等院校的线性代数教材，也可作为经济、管理、工程等相关从业者的参考用书.


**图书在版编目（CIP）数据**

应用线性代数 / 赵晓主编. -- 上海 : 上海交通大学出版社, 2017
ISBN 978-7-313-17701-8

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①赵… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第183258号

**应用线性代数**

主　　编：赵　晓
出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路951号
邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208
出 版 人：郑益慧
印　　制：北京谊兴印刷有限公司　　经　　销：全国新华书店
开　　本：787mm×1092mm　1/16　　印　　张：10.5　　字　　数：243千字
版　　次：2017年8月第1版　　印　　次：2017年8月第1次印刷
书　　号：ISBN　978-7-313-17701-8/O
定　　价：35.00元

# 前 言

线性代数作为数学的一个重要分支，它的理论知识广泛应用于经济、金融、管理、工程等社会领域，它是高等院校尤其是应用型高等院校经管类、审计学、工程等专业的一门专业必修课．线性代数的研究对象是向量、有限维的向量空间（或称线性空间）、线性变换和线性方程组．近年来，随着高等教育的不断改革和高校向应用型转变的趋势，教材改革也迫在眉睫．

本书具有以下特点：

1．知识结构编排合理．本教材与传统的教材相比，在知识结构上做了较大的调整．本教材以线性方程组求解为主线索展开线性代数课程的学习．随着线性方程组求解的不断深入，逐渐引出矩阵、行列式等内容，从而构建线性方程组理论和解法的知识体系．在此基础上，进一步学习特征值和特征向量以及二次型．

2．强化应用，培养学生的创新意识．本教材每章都增加了 MATLAB 实验部分以及应用案例部分，以便于提高学生的实际应用能力．

3．便于学生自学．本教材本着学生易于理解的宗旨，从简到难，循序渐进．另外，每章都设有总习题以及习题答案，以便于学生自主学习．

本书由赵晓担任主编，陈良钰、施丽娟担任副主编，全书由赵晓统稿．其中，赵晓编写第 1 章、第 2 章及第 3 章的理论与案例部分；陈良钰编写第 4 章、第 5 章的理论与案例部分；施丽娟编写各章 MATLAB 实验部分．

本书在编写过程中，参阅和借鉴了大量的相关资料和教材，在此，特向这些资料和教材的作者表示衷心的感谢．

由于编者水平所限，加之时间仓促，书中错误和疏漏之处在所难免，敬请广大读者批评指正．

另外，本书配有丰富的教学资源包，读者可登录北京金企鹅联合出版中心网站（www.bjjqe.com）下载．

编　者

2017 年 7 月

# 目 录

# 第 1 章

# 线性方程组

线性方程组的理论已经广泛渗透到数学发展的许多分支，除线性问题外，许多非线性问题的处理最后往往也会归结为线性方程组的问题解决．线性方程组已广泛应用于工程技术、空间技术、电子技术和国民经济的许多领域．

线性方程组是线性代数的核心，可以说线性代数是围绕线性方程组展开的．那么，什么是线性方程组呢？初中的时候我们已经接触过线性方程组．例如，看下面几个二元一次方程组：

（1）$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0, \\ -x_1 + x_2 = 1, \end{cases}$ （2）$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1, \\ -2x_1 + 4x_2 = -2, \end{cases}$ （3）$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 = 1. \end{cases}$

这三个常见的二元一次方程组其实代表了三类有唯一解、有无穷多个解和无解的线性方程组．本书以线性方程组为线索，进行线性代数的学习．

## 1.1 线性方程组

### 1.1.1 线性方程组的基本概念

**定义 1** 形如 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = b$ 的方程称为含有 $n$ 个未知量的线性方程，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b$ 均为数，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为未知量．

若干有限个这样的线性方程组合在一起构成线性方程组．

**定义 2** 含有 $m$ 个方程和 $n$ 个未知量的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1-1}$$

其中 $a_{ij}(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$ 为系数，$b_1, b_2, \cdots, b_m$ 为常数项．式（1-1）称为 $m \times n$ 的线性方程组，这里 $m$ 与 $n$ 不一定相等．当常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 不全为零时，该方程组称为非齐次线性方程组；当常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 全为零时，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{1-2}$$

式（1-2）称为齐次线性方程组．线性方程组的一组解是一组数 $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$，用这组数分别代替方程组中的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 时，所有方程的两边相等，即

$$\begin{cases} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \cdots + a_{1n}s_n = 0, \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \cdots + a_{2n}s_n = 0, \\ \cdots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \cdots + a_{mn}s_n = 0. \end{cases}$$

方程组所有可能的解的集合称为线性方程组的解集．若两个方程组有相同的解集，则称这两个线性方程组为同解方程组．

在本节前面部分列举的三个初中学过的二元一次线性方程组就是非齐次线性方程组．对这三个方程组求解，会发现它的解的情况分别是：唯一解、无穷多解、无解．在平面几何上，它们分别表示为两条直线相交于一点，两条直线重合和两条直线平行．对于一般的线性方程组，常常要讨论它们的解的问题．为此，我们先引入矩阵记号．

### 1.1.2 矩阵记号

一个线性方程组包含的主要信息可以用一个称为矩阵的紧凑的矩形阵列表示．把方程组（1-1）的每一个变量的系数按下面的整齐行列阵排列，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称这个阵为方程组（1-1）的系数矩阵，记作 $\boldsymbol{A}$，而

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

称为方程组（1-1）的增广矩阵，记作 $\tilde{\boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A} \ \ \boldsymbol{b})$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵，$\boldsymbol{b}$ 为由 $b_1, b_2, \cdots, b_m$

组成的常数项矩阵，即 $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

矩阵的维数说明它包含的行数和列数. 上述系数矩阵有 $m$ 行 $n$ 列，而增广矩阵有 $m$ 行 $n+1$ 列. 一般地，我们将具有 $m$ 行 $n$ 列的矩阵称为 $m\times n$ 矩阵，记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}$，其中 $a_{ij}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列元素，$i$ 称为行标，$j$ 称为列标. 这里 $m$ 与 $n$ 不一定相等，当 $m=n$ 时，我们称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为方阵或 $n$ 阶方阵；当方阵 $\boldsymbol{A}$ 中的元素满足 $a_{ii}=1, a_{ij}=0\,(i\neq j)$ 时，称方阵 $\boldsymbol{A}$ 为单位矩阵，单位矩阵常用 $\boldsymbol{E}$ 来表示，$n$ 阶单位矩阵记为 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{E}_n$，即

$$\boldsymbol{E}_n=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

其中，1 在第 $i$ 行第 $i$ 列位置上，$i=1,2,\cdots,n$，而没有写出来的数均为 0；当 $m=1$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 只有一行，即 $\boldsymbol{A}=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$，称为行矩阵或行向量；$n=1$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 只有一列，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},$$

称为列矩阵或列向量；当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中所有的元素都为零，即所有 $a_{ij}=0$ 时，称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为零矩阵，这时也简记为 $\boldsymbol{O}$. 矩阵记号可为解线性方程组带来方便.

下面为考察线性方程组与矩阵的关系，我们先引入矩阵乘法的概念.

**定义 3** 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积矩阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{m\times n}$，其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum\limits_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$.

**注意**

从定义 3 中我们可以看出，两个矩阵要相乘，必须满足前面矩阵的列数和后面矩阵的行数相等. 观察中还会发现前面矩阵的行数决定乘积矩阵的行数，后面矩阵的列数决定乘积矩阵的列数.

例 1　已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & 5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4 & -1 & 3\\ -3 & 0 & -2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ .

解　$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1 & 3\\ -3 & 0 & -2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1\times4+2\times(-3) & 1\times(-1)+2\times0 & 1\times3+2\times(-2)\\ (-4)\times4+5\times(-3) & (-4)\times(-1)+5\times0 & (-4)\times3+5\times(-2)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-2 & -1 & -1\\ -31 & 4 & -22\end{pmatrix}.$$

因此，线性方程组（1-1）可以写成矩阵形式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵，$\boldsymbol{x}$ 为未知量列矩阵，$\boldsymbol{b}$ 为常数项列矩阵．当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时称为非齐次线性方程组；当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时称为齐次线性方程组．

### 1.1.3　线性方程组的一般解法

1．高斯（Gauss）消元法

线性方程组一般解法的基本思路是，用一个更容易的等价方程组（即有相同解集）代替原线性方程组．

简单来说，就是用线性方程组中第一个方程含 $x_1$ 的项消去其他方程中的含 $x_1$ 的项，然后用第二个方程中含 $x_2$ 的项消去其他方程中的含 $x_2$ 的项，以此类推，最后得到一个等价的易于求解的阶梯形的最简方程组．这一求解过程称为高斯（Gauss）消元法．

例 2　解线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=1,\\ \qquad x_2+\ x_3=-2,\\ 2x_1-x_2+2x_3=0.\end{cases} \tag{1-3}$$

解　消去未知数时，同时用方程组及其相应的矩阵形式来表示，以便于比较．

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=1,\\ \qquad x_2+\ x_3=-2,\\ 2x_1-x_2+2x_3=0,\end{cases}\qquad \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 2 & 0\end{pmatrix}. \tag{1-4}$$

保留线性方程组（1-4）的第一个方程中的 $x_1$，把其他方程中的 $x_1$ 消去．为此，将第一个方程的（$-2$）倍加到第三个方程，得

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=1,\\ \qquad x_2+\ x_3=-2,\\ \quad -3x_2-2x_3=-2,\end{cases}\qquad \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & -3 & -2 & -2\end{pmatrix}. \tag{1-5}$$

利用线性方程组（1-5）的第二个方程中的含 $x_2$ 的项消去第三个方程中的含 $x_2$ 的项，即将（1-5）中第二个方程的 3 倍加到第三个方程可得

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=1, \\ \quad\ \ x_2+\ x_3=-2, \\ \qquad\quad\ \ x_3=-8, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{pmatrix}. \tag{1-6}$$

由线性方程组（1-6）的第三个方程可得 $x_3=-8$，分别将第三个方程的（$-2$）倍和（$-1$）倍加到方程组（1-6）的第一个方程和第二个方程，消去含 $x_3$ 的项可得

$$\begin{cases} x_1+x_2 \qquad =17, \\ \quad\ \ x_2 \qquad =6, \\ \qquad\quad\ x_3=-8, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{pmatrix}. \tag{1-7}$$

将线性方程组（1-7）中第二个方程的（$-1$）倍加到第一个方程，消去含 $x_2$ 的项可得

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad =11, \\ \quad x_2 \qquad\ \ =6, \\ \qquad\quad x_3=-8, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{pmatrix}. \tag{1-8}$$

由线性方程组（1-8）可知，原方程组有唯一解 $(11,6,-8)$．上述线性方程组变换的过程就是高斯消元法的过程.

大家思考一下，如果第一个方程中 $x_1$ 的系数为 0，应如何求解？例如，

$$\begin{cases} \qquad x_2+\ x_3=-2, \\ \ x_1+x_2+2x_3=1, \\ 2x_1-x_2+2x_3=0. \end{cases}$$

2．矩阵的初等变换

例 2 的解题过程中，我们发现线性方程组的变化其实就是对应的增广矩阵的行进行的变换．为此，我们给出矩阵的行初等变换的定义.

**定义 4**　设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足下列三个条件之一的变换称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的初等行变换：

（1）互换两行的位置，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$；

（2）用一个非零数乘以某一行，记作 $kr_i\ (k \neq 0)$；

（3）把某一行的倍数加到另一行，记作 $r_i + kr_j$．

其中 $r_i$ 代表矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 行.

将定义 4 中的所有行换成列就可以得到矩阵的初等列变换，因此矩阵的初等列变换也有三种，分别是 $c_i \leftrightarrow c_j$，$kc_i$，$c_i + kc_j$，其中 $c_i$ 表示矩阵的第 $i$ 列．初等行变换和初等列变换统称为矩阵的初等变换.

注 意

（1）矩阵的初等变换均是可逆的，即可还原的．例如，若两行互换，则再次互换它们就会还原回原来的状态．

（2）一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换后变成另外一个矩阵 $\boldsymbol{B}$，称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是等价的，记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$．为了方便看清矩阵的初等变换过程，往往在箭头记号上下加上初等变换说明．如 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_2-2r_1}\boldsymbol{B}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行加上第 1 行的（$-2$）倍．

（3）对于线性方程组的求解，我们常用初等行变换来解决，例 2 的解题过程中增广矩阵的变化实际上就是初等行变换的结果．

观察例 2 的解题过程中增广矩阵的变化，我们发现式（1-6）呈现出的是阶梯形状的矩阵．为此，我们给出阶梯形矩阵的定义．

**定义 5** 一个矩阵 $(a_{ij})_{m\times n}$ 称为阶梯形矩阵，若它满足以下两个条件之一：

（1）所有的 $a_{ij}$，当 $i>j$ 时，都有 $a_{ij}=0$；

（2）所有的 $a_{ij}$，当 $i<j$ 时，都有 $a_{ij}=0$．

满足（1）条件的矩阵称为上阶梯形矩阵，也称上三角形矩阵，行阶梯形矩阵；满足（2）条件的称为下阶梯形矩阵，也称下三角形矩阵，列阶梯形矩阵．

习惯上，解线性方程组常用上阶梯形矩阵形式．这种上阶梯形矩阵通常简称为阶梯形矩阵．

若一个阶梯形矩阵还满足下面两个条件，可称为行最简阶梯形矩阵（或行最简形矩阵）：

（1）每一个非零行的第一个非零元都是 1；

（2）每一个非零行的第一个非零元所在列的其他元素全部都是零．

注 意

任何一个矩阵都可以经过有限次初等行变换变成行阶梯形矩阵，进而化为行最简形矩阵．

**例 3** 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\3&0&3&0\\-1&1&0&1\end{pmatrix}$，利用初等行变换把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$，进而化为行最简形矩阵 $\boldsymbol{C}$．

$$\text{解}\quad A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\3&0&3&0\\-1&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4+r_1]{\substack{r_2+r_1\\r_3-3r_1}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&2&1&1\\0&0&0&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&2&1&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&1\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&1\\0&0&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B,$$

$$B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&1\\0&0&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{(-1)r_3}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1-r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=C.$$

例 3 告诉我们，任何一个非零矩阵 $A$ 经过有限次初等行变换都可以化为行阶梯形矩阵 $B$，行阶梯形矩阵 $B$ 再经过有限次初等行变换都可以化为行最简形矩阵 $C$. 那么，对应的初等列变换也具有这样的性质，即非零矩阵经过有限次初等列变换都可以化为列阶梯形矩阵，列阶梯形矩阵再经过有限次初等列变换都可以化为列最简形矩阵.

**定义 6** 若矩阵 $A$ 经过有限次初等变换后化为矩阵 $B$，矩阵 $B$ 既是行最简形矩阵，又是列最简形矩阵，则称矩阵 $B$ 为矩阵 $A$ 的标准形. 一般地，矩阵 $A$ 的标准形 $B$ 具有如下特点：$B$ 的左上角是一个单位矩阵，其余元素全为 0.

例如，将上述例 3 中最简形矩阵 $C=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 再作初等列变换，可得：

$$C\xrightarrow{c_4+c_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_4-c_3}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=D,$$

这里的矩阵 $D$ 就是原矩阵 $A$ 的标准形.

3．用初等行变换求解线性方程组

例 4　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1, \\ 3x_1-x_2=2, \\ -x_1+x_2+2x_3=0. \end{cases}$$

解　利用初等行变换将方程组的增广矩阵化为行最简形矩阵：

$$\tilde{A}=(A\ \ b)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -9 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{8}r_3]{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-5r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

最简形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}, \\ x_2 = -\frac{1}{2}, \\ x_3=\frac{1}{2}, \end{cases}$$

即原方程组有唯一解为

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{2}, \\ x_2=-\frac{1}{2}, \\ x_3=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

例 5　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=1, \\ -x_2+x_3+2x_4=0, \\ 2x_1+2x_2+2x_3-2x_4=2. \end{cases}$$

解　利用初等行变换将方程组的增广矩阵化为行最简形矩阵：

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\boldsymbol{B},$$

最简形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1+2x_3+x_4=1, \\ x_2-x_3-2x_4=0, \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} x_1=-2x_3-x_4+1, \\ x_2=x_3+2x_4. \end{cases}$$

因 $x_1$，$x_2$ 都可以用 $x_3$，$x_4$ 的等式来表示，随着 $x_3$，$x_4$ 取值的不同，$x_1$，$x_2$ 的值也不同. 当 $x_3$，$x_4$ 分别取无穷多个数时 $x_1$，$x_2$ 也随之有无穷多个解，也就是说原方程组有无穷多个解. 因此，原方程组的解的表现形式可以如下.

令 $x_3=c_1$，$x_4=c_2$，则原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=-2c_1-c_2+1, \\ x_2=c_1+2c_2, \\ x_3=c_1, \\ x_4=c_2. \end{cases}$$

其中 $c_1$，$c_2$ 取任意常数.

例 6　解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2, \\ 2x_1-x_2-x_3=1, \\ 3x_1+x_2+2x_3=0. \end{cases}$$