普通高等教育"十三五"规划教材

应用型本科院校大学数学公共基础平台课系列教材

复变函数与积分变换

王芬玲　罗吉贵　马翠云　主编

科学出版社

普通高等教育"十三五"规划教材

应用型本科院校大学数学公共基础平台课系列教材

复变函数与积分变换

王芬玲　罗吉贵　马翠云　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是普通高等教育“十三五”规划教材，涵盖了教育部指定的大学本科复变函数与积分变换教学基本要求的内容，全书共分 19 个模块. 主要内容为复数及其几何表示、复平面上的点集、复变函数、解析函数、初等函数、复变函数的积分、柯西积分定理、柯西积分公式、复级数及其性质、泰勒级数、洛朗级数、孤立奇点的类型、留数、留数在计算实积分上的应用、共形映射的概念、分式线性映射、三个重要的分式线性映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换. 本书内容深入浅出、条理清楚，体系新颖，例题典型，方便理工科学生阅读. 每个模块都配有不同类型的习题，本书最后附有总自测题，以便读者自学时检查自己对所学内容的掌握情况.

本书可以作为高等学校理工科非数学专业本科生的教材，也可供自学者或有关教师作为教学参考书使用.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/王芬玲，罗吉贵，马翠云主编. —北京：科学出版社，2017. 9

普通高等教育“十三五”规划教材

应用型本科院校大学数学公共基础平台课系列教材

ISBN 978-7-03-054404-9

I. ①复… II. ①王…②罗… ③马… III. ①复变函数-高等学校-教材 ②积分变换-高等学校-教材 IV. ①O174.5 ②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 218361 号

责任编辑：张中兴 梁 清 / 责任校对：张凤琴

责任印制：霍 兵 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 9 月第 一 版 开本：787 × 1092 1/16

2017 年 9 月第一次印刷 印张：9 3/4

字数：231 000

定价：29.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

丛书序言

Preface to the series

本系列教材参照教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会制定的非数学类专业公共数学系列课程教学基本要求，结合编者多年来教学实践中的经验和体会，在对已有教材进行认真改进的基础上编写而成，其目的是为应用型高等学校非数学类各专业学生提供比较适合的教材或学习参考书.

本系列教材包括:《高等数学 (理工类)(上、下册)》《线性代数 (理工类)》《概率论与数理统计 (理工类)》《高等数学 (文科类)》《大学数学 (经济管理类)(Ⅰ高等数学、Ⅱ线性代数、Ⅲ概率论与数理统计)》《复变函数与积分变换》.

我们知道，高等学校公共数学课程原来仅是非数学的理工科各专业的基础课程，随着现代科学技术的迅猛发展，特别是计算机和信息技术的发展，近年来高等数学几乎普及到了经济管理类、外语类、艺术类等所有专业，而不同科类的专业讲授的课时以及内容又千差万别. 目前，关于公共数学课程系列教材或教科书已非常多，这类教材主要以经典数学的理论为基础，讲述其理论、方法与例题分析，目的是帮助读者理解和掌握基本的数学概念和方法. 但是，这类教材中的例题和习题几乎全部是数学类的，这对于非数学类专业学生学习数学课程来说不能够很好地将其理论、方法应用于本专业. 另外，这类教材几乎通用于所有的非数学类专业，而不同的专业很难有针对性地选择本专业所学习的内容. 为此，本系列教材力求在以下六个方面做一些尝试:

(1) 以数学的基本理论和方法为基础;

(2) 尽量与现代科学技术，特别是信息技术发展相适应，强调应用性、实效性;

(3) 教学内容模块化，将系列课程的每门教材的内容划分为多个模块，不同的专业可根据本专业培养方案的要求，从中选取相应的模块，使教学内容对专业更具有针对性;

(4) 改变传统教材太数学化的现象，根据各个学科专业的特点，针对不同专业配备相应的例题、练习题和习题，以突出教学内容的应用性，使教学内容更适应于应用型本科院校学生的需求;

(5) 有一定的可塑性，能广泛适用于非数学类各专业的学生，可根据其特点和需要选择教学内容和习题;

(6) 深入浅出，易教易学，突出重点，强调案例式教学方法.

当然，上述想法只是编者编写本系列教材的希望或初衷，本系列教材距这样的目标还有一定的距离.

由于编者水平有限, 系列教材中难免有缺点和错误, 敬请读者批评指正.

丛书编委会

2016 年 6 月

前　言

Preface

本书是普通高等教育“十三五”规划教材, 为了培养合格高素质应用型人才, 按照《工程数学教学大纲》中复变函数和积分变换部分的要求, 结合多年来教学实践中的经验和应用型人才模式的探讨, 采用模块化的方式编写复变函数与积分变换课程, 其目的是为应用型理工类专业学生提供一本较适合的教材或学习参考书.

复变函数与积分变换是高等数学的后续课程, 我们在编写过程中注意到了与高等数学的衔接, 为了适应新的理工科专业培养计划和课程设置, 便于学生课外学习, 编写中我们尽可能简化繁琐复杂的论证, 同时也保留了一些对培养学生数学思维能力的经典定理的证明, 注意适应理工科专业特点的内容安排, 通过对典型例题的分析总结, 使学生灵活掌握知识的应用, 力求易学易懂.

《复变函数与积分变换》共分 19 个模块, 内容包括为复数及其几何表示、复平面上的点集、复变函数、解析函数、初等函数、复变函数的积分、柯西积分定理、柯西积分公式、复级数及其性质、泰勒级数、洛朗级数、孤立奇点的类型、留数、留数在计算实积分上的应用、共形映射的概念、分式线性映射、三个重要的分式线性映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换.

本书模块 1 到模块 5 由马翠云执笔, 模块 6 到模块 12 由罗吉贵执笔, 模块 13 到模块 19 由王芬玲执笔. 王芬玲、罗吉贵、马翠云负责全书的统稿和定稿.

由于时间仓促, 加之编者水平有限, 书中的缺点和错误在所难免. 恳请广大同行、读者批评指正.

编　者

2017 年 6 月

目　录

Contents

模块1
复数及其几何表示

复变函数就是自变量为复数的函数, 它是本课程的研究对象. 本模块介绍了复数的概念及其表示, 然后介绍了复数的运算与几何意义.

子模块 1　复数的概念和表示形式

初等代数中已经引进记号 i, 代表代数方程 $x^2+1=0$ 的一个根, 其定义是 $\mathrm{i}^2=-1$.

形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 称为**复数**, 其中实数 x,y 称为复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的**实部与虚部**, 记

$$x=\mathrm{Re}z,\quad y=\mathrm{Im}z.$$

设有两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$, 若

$$x_1=x_2,\quad y_1=y_2$$

时, 则 $z_1=z_2$.

一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可以用有序实数对 (x,y) 唯一确定. 如果用平面直角坐标系的横坐标 x、纵坐标 y 所确定的点 (x,y) 表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$(图 1.1), 就建立了平面上的点与复数间的一一对应关系. 由于 x 轴上的点和 y 轴上非原点的点分别对应着实数和纯虚数, 因而通常称 x 轴为**实轴**, 称 y 轴为**虚轴**, 把表示复数 z 的平面称为**复平面**或 z**平面**.

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与从原点到点 z 所引的向量 $\overrightarrow{Oz}$ 也构成一一对应关系. 我们能够借助于点 z 的极坐标 r 和 θ 来确定点 $z=x+\mathrm{i}y$, 向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的长度称为复数 z 的**模**, 记为 $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

向量 $\overrightarrow{Oz}$ 与实轴正向间的夹角 θ 称为复数 z 的**辐角**, 记作 $\theta=\mathrm{Arg}z$.

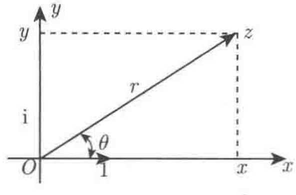

图 1.1

由图 1.1 易见,

$$\tan\theta=\tan(\mathrm{Arg}z)=\frac{y}{x}.$$

显然, 若 $z\neq 0$ 时, z 的辐角存在, 并且有无穷多个, 它们都相差 2π 的整数倍. 通常称 $(-\pi,\pi]$ 间的辐角为**主值**, 记作 $\arg z$, 这样, 任何一个辐角都可以写成

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

辐角的主值 $\arg z\,(z\neq 0)$ 可以由反正切的主值 $\arctan\dfrac{y}{x}\left(-\dfrac{\pi}{2}<\arctan\dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 按下列关系来确定:

当 z 在第一、四象限时, $\arg z=\arctan\dfrac{y}{x}$;

当 z 在第二象限时, $\arg z=\pi+\arctan\dfrac{y}{x}$;

当 z 在第三象限时, $\arg z=-\pi+\arctan\dfrac{y}{x}$;

当 z 在正实轴时, $\arg z=0$;

当 z 在负实轴时, $\arg z=\pi$;

当 z 在正虚轴时, $\arg z=\dfrac{\pi}{2}$;

当 z 在负虚轴时, $\arg z=-\dfrac{\pi}{2}$.

当 $z=0$ 时, $|z|=0$, 而 z 的辐角不确定.

由图 1.1, 不难得到

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta).\tag{1.1}$$

式 (1.1) 称为**复数 z 的三角形式**.

通过欧拉 (Euler) 公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$$

可得

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.\tag{1.2}$$

式 (1.2) 称为**复数 z 的指数形式**.

例 1.1　求复数 $w=\dfrac{1+z}{1-z}\,(z\neq 1)$ 的实部、虚部和模.

解　设 $z=x+\mathrm{i}y$, 则

$$w=\frac{1+z}{1-z}=\frac{(1+x)+\mathrm{i}y}{(1-x)-\mathrm{i}y}=\frac{\left(1-x^2-y^2\right)+2y\mathrm{i}}{(1-x)^2+y^2},$$

故

$$\mathrm{Re}w=\frac{1-x^2-y^2}{(1-x)^2+y^2},\quad \mathrm{Im}w=\frac{2y}{(1-x)^2+y^2},$$

$$|w|=\frac{1}{(1-x)^2+y^2}\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^2+1-2\left(x^2-y^2\right)}.$$

例 1.2　将下列复数化为三角形式.

(1) $z=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$;　(2) $z=\sin\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{5}$.

解　(1) z 的模 $|z|=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2$, 因为复数 z 所对应的点在第二象限, $\tan\theta=\dfrac{y}{x}=-\sqrt{3}$, 所以,

$$\theta=\arg z=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}.$$

因此, z 的三角形式为

$$\theta = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

(2) 复数 z 虽然是三角函数形式, 但与复数的三角形式不同. 由于 z 的模 $|z| = \sqrt{\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)^2 + \left(\cos\frac{\pi}{5}\right)^2} = 1$, 而

$$\sin\frac{\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{3\pi}{10}, \quad \cos\frac{\pi}{5} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{3\pi}{10},$$

所以, z 的三角形式为

$$z = \cos\frac{3\pi}{10} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{10}.$$

子模块 2　复数的代数运算

对于任意两个复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$, 其加法与减法定义如下:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2).$$

容易验证复数的加法与减法满足与实数的加法与减法相应的运算规律.

复数加法与减法的几何意义

设 z_1, z_2 是两个复数, 它们的加法、减法的几何意义是向量相加减. 由复数加法与减法的几何意义以及图 1.2 可见, 关于两个复数的和与差的模, 有以下不等式:

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \quad (三角不等式);$$

$$|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||.$$

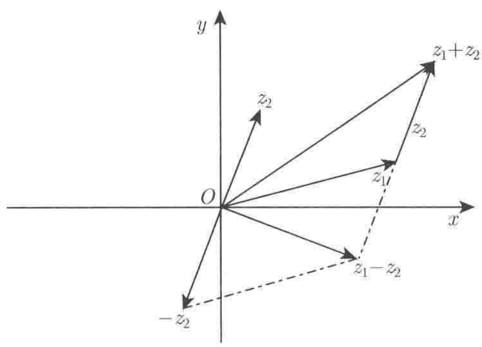

图 1.2

称复数 $x - \mathrm{i}y$ 为 $z = x + \mathrm{i}y$ 的**共轭复数**, 记为 $\bar{z}$, 即 $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$. 容易得到

(1) $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$;

(2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;

(3) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$;

(4) $\overline{\overline{z}} = z$;

(5) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}z$, $z - \overline{z} = 2\mathrm{i} \cdot \mathrm{Im}z$.

必须特别提出的是, 与实数不同, 复数是不能比较大小的.

子模块 3　复数的乘法与除法

对于任意两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$, 其乘法与除法定义如下:

$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad (z_2\neq 0).$$

容易验证复数的乘法与除法满足与实数的乘法与除法相应的运算规律.

下面利用复数的三角形式讨论复数的乘法与除法. 设

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),\quad z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2),$$

由复数乘法的定义得

$$\begin{aligned}z_1z_2=&r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\=&r_1r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)\right].\end{aligned}$$

因此

$$|z_1z_2|=|z_1|\,|z_2|,\quad \mathrm{Arg}\,(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2.$$

公式可推广到有限个复数的情形.

定理 1.1　两个复数乘积的模等于这两个复数模的乘积, 乘积的辐角等于这两个复数辐角的和.

设

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),\quad z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2),$$

由复数除法的定义得

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}=&\frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)}\\=&\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)\right].\end{aligned}$$

因此

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{r_1}{r_2},\quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2.$$

因此有下面的定理.

定理 1.2　两个复数之商的模等于这两个复数的模之商, 两个复数之商的辐角等于被除数与除数的辐角之差.

例 1.3　设复数 $z_1=5-5\mathrm{i}$, $z_2=-\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$, 求 $z_1\cdot\overline{z_2}$ 和 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解　把 z_2 化成代数形式

$$z_2=-\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=-\frac{-\mathrm{i}}{\mathrm{i}(-\mathrm{i})}-\frac{3\mathrm{i}\,(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})\,(1+\mathrm{i})}=\mathrm{i}-\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

$$z_1 \cdot \overline{z}_2 = (5-5\,\mathrm{i})\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \frac{15}{2}+\frac{5}{2}-\frac{15}{2}\mathrm{i}+\frac{5}{2}\mathrm{i} = 5\,(2-\mathrm{i})\,.$$

因为

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-5\mathrm{i}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}} = \frac{10\,(1-\mathrm{i})}{3-\mathrm{i}} = \frac{10\,(1-\mathrm{i})\,(3+\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})\,(3+\mathrm{i})} = 4-2\mathrm{i},$$

所以

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{4-2\mathrm{i}} = 4+2\mathrm{i}.$$

子模块 4　复数的乘幂与方根

n 个相同复数 z 的连乘, 称为 z 的 n 次幂. 利用复数的三角形式表示, 我们可以考虑复数的乘幂: 设 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, 则

$$z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta).$$

特别地, 当 z 的模 $r=1$ 时, 有

$$z^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta.$$

这就是 De Moivre **公式**.

如果定义 $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$, 则上述公式在 n 为负整数时依然成立.

设有复数 w 和 z, 若 $w^n = z$(n 为整数), 称复数 w 为 z 的 n 次方根. 记为

$$w = \sqrt[n]{z}.$$

若令 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, $w = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, 则利用复数的相等, 可得

$$\rho^n = r, \quad \cos n\varphi = \cos\theta, \quad \sin n\varphi = \sin\theta.$$

即

$$\begin{cases} \rho^n = r, \\ n\varphi = \theta + 2k\pi \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)\,. \end{cases}$$

于是

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r}, \\ \varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)\,. \end{cases}$$

其中 $\sqrt[n]{r}$ 是 n 次算术根, 所以

$$w = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)\,.$$

当 $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ 时, 得到 n 个相异的根.

$$w_0 = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\right);$$

$$w_1 = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right);$$

$$\cdots\cdots$$

$$w_{n-1} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right].$$

当 k 用其他整数代入时, 这些根重复出现, 所以复数 z 的 n 次方根共有 n 个相异的值.

在几何上, 不难看出, $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值就是以原点为中心, $r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点.

例 1.4　若 $(1+\mathrm{i})^n=(1-\mathrm{i})^n$, 试求 n 的值.

解　因为

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right),\quad 1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

所以

$$\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)^n=\left(\sqrt{2}\right)^n\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^n,$$

即

$$\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^n\left[\cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)\right],$$

所以

$$\sin\frac{n}{4}\pi=0.$$

故

$$n=4k,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

例 1.5　求 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$ 的所有值.

解　由于 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$, 所以

$$\sqrt[4]{(1+\mathrm{i})}=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+\mathrm{i}\sin\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right].$$

所以

$$\sqrt[4]{(1+\mathrm{i})}=\sqrt[8]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\right)\right]\quad(k=0,1,2,3).$$

即

$$w_0=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}\right);$$

$$w_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{16}\right);$$

$$w_2=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{16}\right);$$

$$w_3=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16}+\mathrm{i}\sin\frac{25\pi}{16}\right).$$