算子代数上的 Lie映射与Jordan映射

余维燕 著

科学出版社

算子代数上的Lie映射与Jordan映射

余维燕　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是作者近年来的一些研究成果的总结，并以此为主线，系统介绍国内外关于算子代数上的 Lie 映射与 Jordan 映射相关问题的研究成果及进展。共分七章，内容包括预备知识、三角代数上的非线性 Lie 映射、von Neumann 代数上的非线性*-Lie 映射、算子代数上的 Lie 三重映射、算子代数上的 Jordan 映射、套代数上的双导子与可交换映射和 CSL 代数上的局部 Lie 导子等。

本书可供算子代数相关领域的研究人员使用，也适合数学专业的研究生和高年级本科生参阅。

图书在版编目(CIP)数据

算子代数上的 Lie 映射与 Jordan 映射/余维燕著. —北京：科学出版社，2017.9

ISBN 978-7-03-054440-7

I. ①算… II. ①余… III. ①算子代数－映射－研究 IV. ①O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 222227 号

责任编辑：郭勇斌 彭婧煜 / 责任校对：王 瑞
责任印制：张 伟 / 封面设计：蔡美宇

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http：//www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 9 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2017 年 9 月第一次印刷 印张：11
字数：213 000

定价：58.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

算子代数理论产生于20世纪30年代[1-5]，经过几十年的发展，现在这一理论已成为现代数学中的一个热门分支。对于算子代数，其主要的研究课题是探讨代数的结构，利用同态映射研究代数的分类。但是，由于算子代数的结构复杂，即使是结构较好的 von Neumann 代数和 C^*-代数，分类问题也未完全解决。另外，算子代数上的映射与算子代数的某些固有性质有着密切的联系，因此，近年来，国内外许多学者对算子代数上的映射进行了系统而深入的研究[6]，并不断提出新思路，取得了丰富的成果。事实上，这方面的研究不仅丰富了算子代数理论的研究，而且促进了算子代数理论甚至纯代数理论的发展。本书主要对算子代数上的 Lie 映射与 Jordan 映射进行研究，特别对非线性 Lie 映射进行了探讨。本书内容涉及三角代数上的非线性 Lie 导子，三角代数上的非线性保 Lie 积的映射，因子 von Neumann 代数上的非线性$*$-Lie 导子，因子 von Neumann 代数上的非线性保$*$-Lie 积和保 ξ-$*$-Lie 积的映射，CSL 代数上的 Lie 三重导子，三角代数上的 Jordan (θ,ϕ)-导子和完全矩阵代数上的广义 Jordan 导子，等等。

全书共分为7章。第1章是预备知识，简单介绍算子代数方面的基本概念，以及本书后面常用到的一些结论。第2章首先讨论了三角代数上的非线性 Lie 导子，证明了三角代数上的每一个非线性 Lie 导子是一个可加的导子与一个使得换位子的值为零的中心值映射的和；其次讨论了三角代数上的非线性保 Lie 积的映射，作为应用，刻画了块上三角矩阵代数和套代数上的非线性保 Lie 积的映射的形式，讨论了三角代数上的非线性可交换映射–模线性可交换映射，通过刻画此类映射的具体形式，得出了三角代数上模线性可交换映射是真可交换映射的一个充分条件。作为应用，证明了套代数上的每一个模线性可交换映射都是真可交换映射。第3章首先研究了因子 von Neumann 代数上的非线性$*$-Lie 导子，证明了因子 von Neumann 代数上的每一个非线性$*$-Lie 导子都是一个可加的$*$-导子；其次刻画了因子 von Neumann 代数上的非线性保$*$-Lie 积和保 ξ-$*$-Lie 积的映射。第4章首

先研究了 CSL 代数上的 Lie 三重导子；其次讨论了套代数上的 Lie 三重同构，证明了套代数上的每一个 Lie 三重同构 $L:\tau(N)\to\tau(M)$ 都具有形式 $L(x)=\pm\theta(x)+h(x)$，其中 θ 是同构或反同构，h 是 $\tau(N)\to\mathbb{C}I$ 的映射，使得对任意的 $A, B\in\tau(N)$ 有 $h[[A,B],C]=0$。同时，给出了一个是 Lie 三重同构而非 Lie 同构的例子。第 5 章主要刻画了算子代数上的 Jordan 映射，特别是研究了三角代数上的 Jordan 导子，广义 Jordan 导子，以及 Jordan (θ,ϕ)导子，得到了三角代数上的 Jordan 导子是导子；三角代数上的每一个广义 Jordan 导子是导子与广义内导子之和；同时也证明了当代数 A,B 只有平凡幂等元时，三角代数 (A,M,B) 上的每一个 Jordan (θ,ϕ)-导子都是 (θ,ϕ)-导子。第 6 章对套代数上的 σ-双导子和 σ-可交换映射进行了讨论。第 7 章证明了每一个可交换子空间代数上的局部 Lie 导子都是 Lie 导子。

本书的出版得到海南师范大学数学与统计学院及陕西师范大学数学与信息科学学院张建华教授的鼓励和支持。本书所基于的研究工作得到国家自然科学基金项目（11461018）、海南省自然科学基金项目（20151012）、海南省高等学校自然科学基金项目（HNKY2014-34）和海南师范大学学术著作出版基金的资助，在此一并表示衷心的感谢。

由于作者水平有限，加上新成果不断涌现，难以反映该领域的全貌，书中难免有疏漏之处，热忱欢迎读者批评指正。

作　者

2017 年 3 月于海口

海南师范大学

主要符号表

$\mathbb{F}$	实数域或复数域
$\mathbb{C}$	复数域
$\mathbb{R}$	实数域
$\mathbb{N}$	自然数之集
H	Hilbert 空间
X	无限维 Banach 空间
$B(H)$	H 上的有界线性算子
N	H 中的套
$\tau(N)$	与 N 有关的套代数
$E(M)$	套代数上的所有幂等元之集
$\mathrm{Tri}(A,M,B)$	三角代数
I	恒等算子
M_{sa}	自伴算子之集
$\dim H$	表示 H 的维数
L	可交换子空间格
$\mathrm{Alg}L$	可交换子空间格代数
$\sigma(A)$	算子 A 的谱
$M_n(\mathbb{F})$	实数或复数域 $\mathbb{F}$ 上的所有 $n\times n$ 矩阵代数
$\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$	对角线上的元素是 $x_1,\cdots,x_n$ 的对角矩阵
$T_n^{\bar{k}}(R)$	可交换环 R 上的块上三角矩阵代数
$Z_\sigma(A)$	代数 A 的 σ 中心

目　录

核红

第 1 章 预备知识

本章将给出在后面章节中经常用到的有界线性算子、三角代数、von Neumann 代数及套代数等的一些概念和结论。

§1.1 Banach 空间及算子

定义 1.1 设 X 是实或复的线性空间，如果在 X 上定义的非负函数$\|\cdot\|$满足下列条件：

（1）三角不等式，对任意的 $x, y \in X$, $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$；

（2）对任意的 $x \in X$ 和任意的数 a，有 $\|ax\|=|a|\|x\|$；

（3）$\|x\|=0$，当且仅当 $x=0$。

则称 X 为赋范空间。进而，如果还满足：

（4）对 X 中的任意 Cauchy 序列 $\{x_n\}$ (即当 $n, m \to \infty$, $|x_n - x_m| \to 0$)，存在 $x \in X$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x\|=0$，则称 X 是 Banach 空间。

满足（1）～（3）的非负函数$\|\cdot\|$称为 X 上的范数。满足（1）～（2）的非负函数$\|\cdot\|$称为 X 上的半范数。

设 f 为 X 上的线性泛函，如果 $\|f\|=\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}|f(x)|<\infty$，称 f 为 X 上的有界线性泛函。记 Banach 空间 X 上的有界线性泛函全体为 X^*，则 X^* 按通常函数的加法和数乘法成为线性空间。$(X^*, \|\cdot\|)$ 也是 Banach 空间，称此空间为 X 的共轭空间。

我们有时也用 $\langle x, f\rangle$ 表示泛函 f 在 x 处的值 $f(x)$。

设 X 和 Y 是 Banach 空间，$T: X \to Y$ 是线性映射。如果 $\|T\|=\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}|Tx|<\infty$，称 T 有界。T 是连续的，当且仅当 T 是有界的，$\|T\|$ 称为 T 的范数。

在 Banach 空间及算子理论中，通常认为开映射定理、闭图定理、Hahn-Banach 延拓定理和一致有界原理是最基本的定理，列举如下。

定理 1.1（开映射定理）　设 T 是 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的有界线性算子且 $TX = Y$，则 T 为开映射。

定理 1.2（闭图定理）　设 $T: X \to Y$ 为 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的线性算子，并且 T 的图像 $\{(x,Tx) \mid x \in X\}$ 为 $X \times Y$ 中的闭集，那么 T 是有界的。

定理 1.3（Hahn-Banach 延拓定理）　如果 f 为 X 的闭线性子空间上的有界线性泛函，则 f 可保范地延拓为 X 上的有界线性泛函。

定理 1.4（一致有界原理或共鸣定理）　设 $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 中的一族有界线性算子。如果对任意的 $x \in X$，有

$$\sup\{\| T_\alpha x \| \ \big| \alpha \in \Lambda\} < \infty \text{，那么} \sup\{\| T \| \ \big| \alpha \in \Lambda\} < \infty$$

从 X 到 Y 的所有有界线性算子的集合记为 $B(X,Y)$；如果 $X = Y$，简记为 $B(X)$。赋予算子范数，$B(X,Y)$ 成为 Banach 空间。

设 $T \in B(X,Y)$，符号 $\mathrm{ran}(T)$ 和 $\ker T$ 分别代表 T 的值域和零空间。算子 $T \in B(X,Y)$ 称为有限秩的，如果 T 的值域 $\mathrm{ran}(T)$ 是有限维子空间，$\mathrm{ran}(T)$ 的维数也称为 T 的秩。

定义 1.2　设 H 是线性空间，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是其上的一个二元函数。如果 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 关于第一个变元是线性的而关于第二个变元是共轭线性的，并且满足下列条件：对任意的 $x, y \in H$，有

（1）$\langle x, x \rangle \geqslant 0$，而 $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$；

（2）$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$。

则称 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 H 上的内积。设 H 是 Banach 空间且具有内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$，如果 H 上的范数 $\|\cdot\|$ 由此内积导出，即对任意的 $x \in H$，有 $\| x \| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$，则称 H 是 Hilbert 空间。

设 H 是 Hilbert 空间，如果 $x, y \in H$ 满足 $\langle x, y \rangle = 0$，称 x 与 y 正交。如果 $\{e_i \big| i \in \Lambda\}$ 是 H 中一族相互正交的单位向量，并且其线性张在 H 中稠密，则称它为 H 的一个标准正交基。此时，任意 $x \in H$ 可唯一表示为 $x = \sum\limits_{i\in\Lambda} \langle x, e_i \rangle e_i$，可分 Hilbert 空间存在可数标准正交基。

定义 1.3　设 H 是线性空间，其内积为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$。令 $A \in B(H)$，则存在 $A^* \in B(H)$ 使得对任意的 $x, y \in H$ 都有 $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$ 成立，称 A^* 为 A 的共轭算子或伴随算子。

（1）如果 $A^* = A$，称 A 是自伴算子。

（2）如果 A 自伴且对每个 $x \in H$，都有 $\langle Ax, x \rangle \geqslant 0$，称 A 是正算子。

（3）如果 $A^k = A$，称 A 是 k-阶幂等算子。其中，k 是自然数，2-阶幂等算子称为幂等算子。

（4）如果存在自然数 k 使得 $A^k = 0$，称 A 是幂零算子；如果 $A^k = 0$，但 $A^{k-1} \neq 0$，称 A 是 k-阶幂零算子。

（5）如果 A 是正算子且 A 是2-阶幂等算子，称 A 是投影。

（6）如果 $AA^* = A^*A$，称 A 是正规算子。

（7）如果 $AA^* = A^*A = I$，称 A 是酉算子；如果 $AA^* = I$，称 A 是等距算子；如果 AA^* 和 A^*A 都是投影算子，称 A 是部分等距算子。

对 Banach 空间情形同样可定义幂零算子、k-阶幂零算子、k-阶幂等算子的概念。

定义 1.4 设 $A \in B(X)$ 且 $M \subset X$ 是闭线性子空间。如果对任意的 $x \in M$，有 $Ax \in M$，称 M 是 A 的不变子空间。Lat$A$ 表示 A 在 X 中的所有不变子空间的集合。如果 $L \subset B(X)$，则 $\operatorname{Lat} L = \bigcap_{A\in L} \operatorname{Lat} A$。

命题 1.1 设 H 是线性空间，如果 $A, P \in B(H)$ 且 P 是 H 到 H 的子空间 M 上的投影，则 $M \in \operatorname{Lat}A$，当且仅当 $AP = PAP$。

§1.2 C^*-代数和von Neumann代数

本节将分别介绍 Banach 代数、C^*-代数和 von Neumann 代数的概念，有关结论及证明的详细讨论参见文献[7-9]。

定义 1.5 设 $\mathbf{A}$ 是一个代数，$\|\cdot\|$ 是 $\mathbf{A}$ 上的范数。如果 $\mathbf{A}$ 按此范数成为 Banach 空间且满足：

$$\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|, \quad \forall A, B \in \mathbf{A}$$

则称 $\mathbf{A}$ 为 Banach 代数。

定义 1.6 设 $\mathbf{A}$ 是 Banach 代数。如果 $\mathbf{A}$ 中具有对合运算 $*: \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ 且满足下面4个条件，称 $\mathbf{A}$ 是 C^*-代数。

（1）$(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$；

（2）$(AB)^* = B^* A^*$；

（3）$(A^*)^* = A$；

（4）$\| A^*A \| = \| A \|^2$。

定义 1.7 设 $\mathbf{A}$ 是 C^*-代数且 $A, B \in \mathbf{A}$。

（1）如果 $A^* = A$，称 A 是自伴元。

（2）如果 A 自伴且 A 的谱是正的，称 A 是正元。

（3）如果 $A^2 = A$，称 A 是幂等元。

（4）如果 A 是正幂等元，称 A 是投影。

（5）如果 A 和 B 是投影且 $AB = 0$，称 A 和 B 正交。

（6）如果 $A^*A = AA^*$，称 A 是正规元。

类似于定义 1.3 也可定义 C^*-代数上的酉元等。

设 M 是一个 von Neumann 代数，M' 表示它的一次换位，M'' 表示它的二次换位。

定义 1.8 一个 H 上的 von Neumann 代数 M 是 $B(H)$的一个$*$-子代数，满足 $M = M''$。

$B(H)$是一个 von Neumann 代数，数乘恒等算子 $\mathbb{C}I$ 是一个 von Neumann 代数，H 上的每一个 von Neumann 代数都包含数乘恒等算子。

定义 1.9 如果一个 von Neumann 代数的中心只包含数乘恒等算子 $\mathbb{C}I$，则称这个 von Neumann 代数是因子 von Neumann 代数。

一个 von Neumann 代数 M 是因子 von Neumann 代数等价于 M' 是一个因子 von Neumann 代数，或者等价于由 M 和 M' 生成的 von Neumann 代数是 $B(H)$。

§1.3 三 角 代 数

本节将介绍三角代数的概念及在后面章节中经常用到的基本结论，有关证明及详细讨论参见文献[10]、[11]。

设 R 是具有单位元的可交换环。A 和 B 是环 R 上的代数，M 是非零的(A, B)-双边模。考虑集合：

$$\mathfrak{A} = \mathrm{Tri}(A, M, B) = \left\{ \begin{pmatrix} a & m \\ 0 & b \end{pmatrix} : a \in A, m \in M, b \in B \right\}$$

在集合 $\mathrm{Tri}(A, M, B)$ 上定义类似于矩阵加法和矩阵乘法的运算如下：对任意的

$a_1, a_2 \in A$，$b_1, b_2 \in B$ 和 $m_1, m_2 \in M$，有

$$\begin{pmatrix} a_1 & m_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & m_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & m_1 + m_2 \\ 0 & b_1 + b_2 \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix} a_1 & m_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & m_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 m_2 + a_2 m_1 \\ 0 & b_1 b_2 \end{pmatrix}$$

直接可验证满足此加法和乘法运算的 $\mathrm{Tri}(A, M, B)$ 是一个代数。为了方便，$\mathrm{Tri}(A, M, B)$ 有时也记为 $\begin{pmatrix} A & M \\ 0 & B \end{pmatrix}$。

定义 1.10 如果 $a \in A$ 且对任意 $m \in M$ 有 $am = 0$ (或 $ma = 0$)蕴含 $a = 0$，则称 M 是一个忠实的左 A-模（或右 A-模）。

定义 1.11 如果 M 既是忠实的左 A-模又是忠实的右 B-模，则称一个(A, B)双边模是忠实的双边模。

定义 1.12 设 A 和 B 是可交换环 R 上的具有单位元的代数，M 是具有单位元的忠实的(A, B)-双边模。则称环 R-代数

$$\mathfrak{A} = \mathrm{Tri}(A, M, B) = \left\{ \begin{pmatrix} a & m \\ 0 & b \end{pmatrix} : a \in A, m \in M, b \in B \right\}$$

为三角代数。最重要的三角代数的例子是上三角矩阵代数、块上三角矩阵代数和套代数。

以下给出两个具体的三角代数的例子。

例 1.1 设 n, k 是自然数，当 $n > 1$ 时，环 R 上的 $n \times n$ 上三角矩阵代数 $T_n(R)$ 是一个三角代数。一般情况下，如果 $n > k$，则有 $\begin{pmatrix} T_{n-k}(R) & R^{n-k,k} \\ 0 & T_k(R) \end{pmatrix}$，其中 $R^{n-k,k}$ 是 R 上的 $(n-k) \times k$ 阶矩阵空间。

例 1.2 设 $A = B = \left\{ \begin{pmatrix} t & a \\ 0 & t \end{pmatrix} : t, a \in R \right\}$ 且 $M = T_2(R)$。则 $\mathrm{Tri}(A, M, B)$ 是一个三角代数。

定义 1.13 设 A 是一个代数，$Z(A)$ 为其中心，表示为集合

$$\{a \in A : ax = xa，对任意的 x \in A\}$$

对于三角代数的中心有以下结论。

定理 1.5 设 $\mathfrak{A}=\mathrm{Tri}(A,M,B)$ 是三角代数，$Z(\mathfrak{A})$ 为其中心。则有

$$Z(\mathfrak{A})=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}: am=mb\text{，对任意的}m\in M\right\}$$

定义两个自然投影 $\pi_A:\mathfrak{A}\to A$ 和 $\pi_B:\mathfrak{A}\to B$ 为

$$\pi_A:\begin{pmatrix} a & m \\ 0 & b \end{pmatrix}\mapsto a\text{ 和 }\pi_B:\begin{pmatrix} a & m \\ 0 & b \end{pmatrix}\mapsto b$$

则 $\pi_A(Z(\mathfrak{A}))\subseteq Z(A)$ 和 $\pi_B(Z(\mathfrak{A}))\subseteq Z(B)$，并且存在一个唯一的代数同构 $\tau:\pi_A(Z(\mathfrak{A}))\to\pi_B(Z(\mathfrak{A}))$，使得对任意的 $m\in M$，有 $am=m\tau(a)$。

§1.4 套 代 数

以下有关套代数的概念、结论及详细讨论见文献[12]。

定义 1.14 设 H 是复的 Hilbert 空间，一个套 $\mathbf{N}$ 是 H 的一个闭子空间之集且满足以下 4 个条件：

（1）$0,H\in\mathbf{N}$;

（2）如果 $N_1,N_2\in\mathbf{N}$，则有 $N_1\subseteq N_2$ 或 $N_2\subseteq N_1$；

（3）如果 $\{N_j\}_{j\in J}\subseteq\mathbf{N}$，则 $\bigcap_{j\in J}N_j\subseteq\mathbf{N}$;

（4）如果 $\{N_j\}_{j\in J}\subseteq\mathbf{N}$，则 $\bigcup_{j\in J}N_j$ 的线性张的范数闭包也属于 $\mathbf{N}$。

如果 $\mathbf{N}=\{0,H\}$ 则称 $\mathbf{N}$ 是平凡套，否则称为非平凡套；如果对任意的 $N\in\mathbf{N}$ 有 $\inf\{M\in\mathbf{N}:N\subseteq M\}=N$，则称 $\mathbf{N}$ 是连续套。

本书用 $B(H)$ 表示 H 上的有界线性算子。

定义 1.15 与套 $\mathbf{N}$ 对应的套代数定义为

$$\tau(\mathbf{N})=\{T\in B(H):T(N)\subseteq N\text{，对任意的}N\in\mathbf{N}\}$$

即 $\tau(\mathbf{N})$是使得 $\mathbf{N}$ 的所有子空间不变的有界线性算子构成的代数。

如果 $\mathbf{N}$ 是平凡套，则 $\tau(\mathbf{N})=B(H)$。

以下给出几个套代数的例子。

例 1.3 设 $\{e_j:j=1,2,\cdots\}$ 是 H 的一个规范正交基，$N_k=\mathrm{span}\{e_1,\cdots,e_k\}$ 且 $\mathbf{N}=$

$\{N_k : k=1,2,\cdots\}\bigcup\{0,H\}$。则 $\mathbf{N}$ 是一个套，对应的套代数 $\tau(\mathbf{N})$是关于 $\{e_j\}$ 的矩阵，表示的是上三角的所有算子构成的代数。

例 1.4 如果 H 是有限维的，则套代数就是块上三角矩阵代数。因为如果 $\mathbf{N}$ 是有限维空间上的套且 $0\subseteq N_1\subseteq\cdots\subseteq N_k=H$ 是套中的子空间，则可选择 H 的一个规范正交基 $e_1,\cdots,e_n$，使得 $e_{n_1},\cdots,e_{n_k}$ 是 N_J 的一个基。则在 $\tau(\mathbf{N})$中的算子关于这个基的矩阵表示就是块上三角矩阵代数 $T\left(n_1,n_2-n_1,\cdots,n_k-n_{k-1}\right)(\mathbb{C})$。

定理 1.6 如果 $N\in\mathbf{N}\backslash\{0,H\}$，$E$ 是到 N 上的正交投影。则 $E\mathbf{N}$ 和 $(1-E)\mathbf{N}$ 分别是 Hilbert 空间 EH 和 $(1-E)H$ 中的套，并且 $\tau(E\mathbf{N})=E\tau(\mathbf{N})E$，$\tau((1-E)\mathbf{N})=(1-E)\tau(\mathbf{N})$。从而

$$\tau(\mathbf{N})=\begin{pmatrix}\tau(EN) & E\tau(N)(1-E)\\ 0 & \tau((1-E)N)\end{pmatrix}$$

定理 1.7 $Z(\tau(\mathbf{N}))=\mathbb{C}I$。

第 2 章　三角代数上的非线性 Lie 映射

关于算子代数的 Lie 结构一直受到许多学者的关注。本章主要通过研究三角代数上的非线性 Lie 导子、三角代数上的非线性保 Lie 积的映射及三角代数上的非线性可交换映射来探讨算子代数的 Lie 结构。

§2.1　引　　言

设 A 和 B 是可交换环 R 上的具有单位元的代数，M 是具有单位元的 (A,B) -双边模。$\mathfrak{A}=\mathrm{Tri}(A,M,B)$ 为三角代数。

以下首先给出本章所需要的定义、记号。

定义 2.1　设 A 是可交换环 R 上的代数，$\phi: A\to A$ 是一个映射（没有可加性的假设）。若对任意的 $x,y\in A$，有

$$\phi([x,y])=[\phi(x),y]+[x,\phi(y)]$$

则称 ϕ 是一个非线性 Lie 导子。

定义 2.2[13]　设 A 和 B 是可交换环 R 上的代数。$\phi: A\to B$ 是一个映射。如果对任意的 $x,y\in A$，有

$$\phi(x+y)-\phi(x)-\phi(y)\in Z(B)$$

则称 ϕ 是模中心可加的映射。

定义 2.3　设 $\phi: A\to B$ 是一个映射（没有假设可加性）。如果对任意的 $x,y\in A$，有

$$\phi([x,y])=[\phi(x),\phi(y)]$$

其中 $[x,y]=xy-yx$ 是 Lie 积，则称 ϕ 是非线性保 Lie 积的映射。

定义 2.4[14]　设 $\mathfrak{A}=\mathrm{Tri}(A,M,B)$ 是一个三角代数，$Z(\mathfrak{A})$ 是它的中心。如果对任

意的 $a\in A$ 和 $b\in B$，有 $\pi_A(Z(\mathfrak{A}))=Z(A)$，$\pi_B(Z(\mathfrak{A}))=Z(B)$ 和 $aMb=0$ 蕴含 $a=0$ 或 $b=0$，则称 $\mathfrak{A}=\mathrm{Tri}(A,M,B)$ 是一个正规的三角代数。

设 $\mathfrak{A}=\mathrm{Tri}(A,M,B)$ 是三角代数，$Z(\mathfrak{A})$ 为其中心。由定理 1.5 可知，

$$Z(\mathfrak{A})=\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}: am=mb,\ \text{对任意的} m\in M\right\} \tag{2-1}$$

对于自然投影 $\pi_A:\mathfrak{A}\to A$ 和 $\pi_B:\mathfrak{A}\to B$ 为

$$\pi_A:\begin{pmatrix} a & m\\ 0 & b\end{pmatrix}\mapsto a \text{ 和 } \pi_B:\begin{pmatrix} a & m\\ 0 & b\end{pmatrix}\mapsto b$$

有 $\pi_A(Z(\mathfrak{A}))\subseteq Z(A)$ 和 $\pi_B(Z(\mathfrak{A}))\subseteq Z(B)$，并且存在一个唯一的代数同构 τ: $\pi_A(Z(\mathfrak{A}))\to\pi_B(Z(\mathfrak{A}))$ 使得对任意的 $m\in M$，有 $am=m\tau(a)$。

设 1_A 和 1_B 分别为代数 A 和 B 的单位元，1 为三角代数 $\mathfrak{A}$ 的单位元。本章将用以下记号

$$e_1=\begin{pmatrix} 1_A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad e_2=1-e_1=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1_B\end{pmatrix}$$

和

$$\mathfrak{A}_{ij}=e_i\mathfrak{A}e_j(1\leqslant i\leqslant j\leqslant 2)$$

显然三角代数 $\mathfrak{A}$ 可以被表示为

$$\mathfrak{A}=e_1\mathfrak{A}e_1+e_1\mathfrak{A}e_2+e_2\mathfrak{A}e_2=\mathfrak{A}_{11}+\mathfrak{A}_{12}+\mathfrak{A}_{22} \tag{2-2}$$

其中，$\mathfrak{A}_{11}$ 和 $\mathfrak{A}_{22}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的子代数并分别同构于 A 和 B，$\mathfrak{A}_{12}\subseteq\mathfrak{A}$ 是一个($\mathfrak{A}_{11}$，$\mathfrak{A}_{22}$)-双边模且同构于 M。$\pi_A(Z(\mathfrak{A}))$ 和 $\pi_B(Z(\mathfrak{A}))$ 分别同构于 $e_1Z(\mathfrak{A})e_1$ 和 $e_2Z(\mathfrak{A})e_2$。则对任意的 $m\in\mathfrak{A}_{12}$，有一个代数同构 $\sigma: e_1Z(\mathfrak{A})e_1\to e_2Z(\mathfrak{A})e_2$ 使得 $am=m\sigma(a)$。

§2.2 三角代数上的非线性Lie导子[15]

本节将主要证明以下定理。

定理 2.1 设 $\mathfrak{A}=\mathrm{Tri}(A,M,B)$ 是一个三角代数，$\phi:\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$ 是一个非线性 Lie 导