北大燕园

2019年 李正元·范培华

考研数学②

数学 数学二

历年试题解析

主编 北京大学 李正元
北京大学 尤承业

中国政法大学出版社

北大燕园
2019年李正元·范培华考研数学②

数学
数学二

历年试题解析

主编 北 京 大 学 李正元
北 京 大 学 尤承业

中国政法大学出版社
2018 · 北京

图书在版编目（CIP）数据

2019年李正元·范培华考研数学数学历年试题解析. 数学二/李正元，尤承业主编. —北京：中国政法大学出版社，2018.1
ISBN 978-7-5620-7965-1

Ⅰ. ①2… Ⅱ. ①李… ②尤… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 Ⅳ. ①013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第324882号

出版者　中国政法大学出版社
地　　址　北京市海淀区西土城路25号
邮寄地址　北京100088信箱8034分箱　邮编100088
网　　址　http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）
电　　话　010-58908285(总编室) 58908433（编辑部）58908334(邮购部)
承　　印　三河市人民印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　19.875
字　　数　480千字
版　　次　2018年1月第1版
印　　次　2018年1月第1次印刷
定　　价　61.80元

前　言

（一）

对于数学考试而言，试卷本身就是一份量表，它是《数学考试大纲》规定的考试内容和考试要求的具体体现。全国硕士研究生数学招生考试统考试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料。每一道试题，既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势，因此，对照《数学考试大纲》分析、研究这些试题不仅可以展示出统考以来数学考试的全貌，便于广大考生了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，而且通过反复做历年试题，发现问题，找出差距，以便广大考生能及时查漏补缺，通过研究历年试题，也便于广大考生明确复习方向，从而从容应考，轻取高分。

（二）

本书汇集了 2004 年 ~2018 年全国硕士研究生招生统考数学二试题，而且对所有试题均给出了详细解答，并尽量做到一题多解。有很多试题的解法是我们几位编者从事教学和考研辅导研究总结出来的，具有独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更省时省力。本书在对历年考研数学试题逐题解答的基础上，每题都给出了分析或评注，不仅对每题所考知识点或难点进行了分析，而且对各种题型的解法进行了归纳总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过具体试题，指出了考生在解题过程中出现的有关问题和典型错误，并点评错因，提醒考生引以为戒。

本书把历年考研数学二试题依据考试大纲的顺序，按试题考查内容分章，这样与考生复习数学的顺序保持一致，便于考生系统复习使用。每章按以下内容编写：

编者按——总体说明历年试题在本章所考查的重要知识点、常考题型及所占总分比例，便于考生在宏观上把握重点。

题型分类解析——将历年同一内容的试题归纳在一起，并进行详细解答。这样便于考生复习该部分内容时了解到：该内容考过什么样的题目，是从哪个角度来命制题的，并常与哪些知识点联系起来命题等等，从而能让广大考生掌握考研数学试题的广度和深度，并

在复习时能明确目标，做到心中有数。同时把历年同一内容的试题放在一起，能让广大考生抓住近几年考题与往年考题的某种特殊联系（类似或雷同），并且能清楚地查出哪些知识点还未命题考查。另外，为了帮助考数学二的考生更全更好地了解相关内容的命题情况，**本书精选了数学一、三以及原数学四相关内容的典型考题（含解答），同时也精选了2001年（含）以前数学二相关内容的典型考题（含解答）**，供将要备考数学二的考生参考并复习之用。因此本书这种独特编排体例有助于广大考生科学备考。

综述——每种题型后都归纳总结该题型解题思路、方法和技巧，并举例说明。

（三）

本书给准备报考研究生的考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会。编者建议准备报考研究生的考生在阅读本书时，应先看《数学考试大纲》，以便明确考试的有关要求，接着去认真阅读有关教材和参考书（推荐考生认真阅读由中国政法大学出版社出版的《**考研数学复习全书（数学二）**》，该书对考试大纲中所要求的基本概念、基本公式、基本定理讲解详细，各类题型的解题思路、方法和技巧归纳到位，与考研命题思路较吻合），复习完后，再来看本书的试题，以检验自己的水平。在看本书试题时，应该先自己动手做题，然后将自己所得的结果与本书的解法加以比较，看哪些自己做对了，哪些自己做错了，为什么会做错，可以与你的同学、同事和老师研讨。建议考生把本书中的全部试题做2~3遍，直到对所有的题目一见到就能够熟练地、正确地解答出来的程度。

本书在编写、编辑和出版过程中，尽管我们抱着对广大考生认真负责的精神，高质量、严要求，但由于时间紧、任务重，加上我们水平有限，难免有许多不足、不尽人意之处。敬请广大读者和专家同行不吝赐教、批评指正。

祝广大考生复习顺利，考研成功！

编者

2018年1月

目　　录

第一篇　2018 年考研数学二试题及答案与解析

第二篇　2004 ~ 2017 年考研数学二试题

第三篇　2004 ~ 2017 年考研数学二试题分类解析

第一篇　2018 年考研数学二试题及答案与解析

2018 年考研数学二试题

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1$,则

(A) $a=\frac{1}{2},b=-1$.　　(B) $a=-\frac{1}{2},b=-1$.

(C) $a=\frac{1}{2},b=1$.　　(D) $a=-\frac{1}{2},b=1$.　　【　】

(2) 下列函数中,在 $x=0$ 处不可导的是

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$.　　(B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$.

(C) $f(x)=\cos|x|$.　　(D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.　　【　】

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x\geqslant0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}2-ax, & x\leqslant-1\\ x, & -1<x<0\\ x-b, & x\geqslant0\end{cases}$,若 $f(x)+g(x)$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上连续,则

(A) $a=3,b=1$.　　(B) $a=3,b=2$.

(C) $a=-3,b=1$.　　(D) $a=-3,b=2$.　　【　】

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导,且 $\int_0^1 f(x)\,dx=0$,则

(A) 当 $f'(x)<0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.　　(B) 当 $f''(x)<0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

(C) 当 $f'(x)>0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.　　(D) 当 $f''(x)>0$ 时,$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.　　【　】

(5) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$, $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx$, $K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\,dx$,则

(A) $M>N>K$.　　(B) $M>K>N$.

(C) $K>M>N$.　　(D) $K>N>M$.　　【　】

(6) $\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)\,dy+\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{2-x^2}(1-xy)\,dy=$

(A) $\frac{5}{3}$.　　(B) $\frac{5}{6}$.　　(C) $\frac{7}{3}$.　　(D) $\frac{7}{6}$.　　【　】

(7) 下列矩阵中与矩阵 $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ 相似的为

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 【　】

(8) 设 A,B 为 n 阶矩阵,记 $\mathrm{r}(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩,$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 表示分块矩阵,则

(A) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$. (B) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{BA})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

(C) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\max\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}$. (D) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$. 【　】

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=$ ________.

(10) 曲线 $y=x^2+2\ln x$ 的其拐点处的切线方程是________.

(11) $\int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x=$ ________.

(12) 曲线 $\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t \end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 对应点处的曲率为________.

(13) 设函数 $z=(x,y)$ 由方程 $\ln z+\mathrm{e}^{z-1}=xy$ 确定,则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{2})}=$ ________.

(14) 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶矩阵,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的向量组,若 $\boldsymbol{A\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$,$\boldsymbol{A\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,则 $\boldsymbol{A}$ 的实特征值为________.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共94分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(**本题满分 10 分**)

求不定积分 $\int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$.

(16)(**本题满分 10 分**)

已知连续函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^x tf(x-t)\,\mathrm{d}t=ax^2$,

(Ⅰ) 求 $f(x)$;

(Ⅱ) 若 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的平均值为 1,求 a 的值.

(17)(**本题满分 10 分**)

设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t \end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 与 x 轴围成,计算二重分 $\iint\limits_D (x+2y)\,\mathrm{d}\sigma$.

(18)(**本题满分 10 分**)

已知常数 $k\geqslant \ln 2-1$. 证明:$(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)\geqslant 0$.

(19)(**本题满分 10 分**)

将长为2m的铁丝分成三段,依次围成圆、正方形与正三角形,三个图形的面积之和是否存在最小值?若存在,求出最小值.

(20)(**本题满分 11 分**)

已知曲线 $L: y=\frac{4}{9}x^2(x\geqslant 0)$,点 $O(0,0)$,点 $A(0,1)$. 设 P 是 L 上的动点,S 是直线 OA 与直线 AP 及曲线 L 所围成图形的面积,若 P 运动到点 $(3,4)$ 时沿 x 轴正向的速度是 4,求此时 S 关于时间 t 的变化率.

(21)(**本题满分 11 分**)

设数列 $\{x_n\}$ 满足:$x_1>0, x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$,证明 $\{x_n\}$ 收敛,并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(22)(**本题满分 11 分**)

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$,其中 a 是参数.

(Ⅰ)求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解;

(Ⅱ)求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形.

(23)(**本题满分 11 分**)

已知 a 是常数,且矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{bmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$.

(Ⅰ)求 a;

(Ⅱ)求满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

2018 年考研数学二试题答案与解析

一、选择题

(1)【分析】 $\lim\limits_{x\to0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}\ln(1+e^x+ax^2+bx+1)}=e^A$.

其中
$$A=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln(1+ax^2+e^x+bx-1)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}(ax^2+e^x+bx-1)$$
$$=a+\lim_{x\to0}\frac{e^x-1+bx}{x^2}=a+\lim_{x\to0}\frac{e^x+b}{2x}$$
$$\xlongequal{b=-1}a+\lim_{x\to0}\frac{e^x}{2}=a+\frac{1}{2}$$

由 $e^A=1\Rightarrow A=0\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$. 因此 $a=-\frac{1}{2}, b=-1$.

选(B).

评注 用泰勒公式 $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)(x\to0)$

$$A=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}(ax^2+e^x+bx-1)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left(ax^2+1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)+bx-1\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left(a+\frac{1}{2}+\frac{(b+1)x}{x^2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right)=\begin{cases}a+\frac{1}{2} & (b=-1)\\ \infty & (b\neq-1)\end{cases}$$

因此得 $b=-1, a=-\frac{1}{2}$.

(2)【分析】 按定义考察 $f(x)$ 在 $x=0$ 的可导性,即考察 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ 是否存在.

方法一 考察(D).

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}|x|}{x}\text{ 不 ∃}$$

因为 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{-\frac{1}{2}|x|}{x}=-\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{-\frac{1}{2}|x|}{x}=\dfrac{1}{2}$, $f'_+(0)\neq f'_-(0)$. $f'(0)$ 不 ∃.

因此选(D).

方法二 考察(A),(B),(C).

(A): $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|\sin|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x}=0$

(B): $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|\sin\sqrt{|x|}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{|x|}{x}\cdot\sin\sqrt{|x|}\right)=0$

(C): $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos|x|-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x}=0$

因此选(D).

---

(3)【分析】 对 ∀ 的 $a,b,x\neq0,x\neq-1$ 时 $f(x),g(x)$ 均连续,所以 $f(x)+g(x)$ 连续.

只须再注意 $x=0$ 与 $x=-1$ 处.

$$\lim_{x\to-1-0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to-1-0}(-1)+\lim_{x\to-1-0}(2-ax)=-1+2+a=a+1,$$
$$\lim_{x\to-1+0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to-1+0}(-1)+\lim_{x\to-1+0}x=-1+(-1)=-2$$

由 $a+1=-2=f(1)+g(1)\Rightarrow a=-3$.

又
$$\lim_{x\to0-}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to0-}(-1)+\lim_{x\to0-}x=-1$$
$$\lim_{x\to0+}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to0+}(1)+\lim_{x\to0+}(x-b)=1-b$$

由 $1-b=-1=f(0)+g(0)\Rightarrow b=2$

因此若 $f(x)+g(x)$ 处处连续,则 $a=-3,b=2$.

选(D).

---

(4)【分析一】 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导,有泰勒公式

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\ (x\in[0,1])$$

其中 ξ 在 x 与 $\dfrac{1}{2}$ 之间. 在 $[0,1]$ 上取积分得

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_0^1 f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1 f''(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow\quad 0=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 f''(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\int_0^1 f''(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x$$

当 $f''(x)>0(x\in[0,0])\Rightarrow f''(\xi)>0\Rightarrow f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$

因此选(D).

【分析二】 令$f(x)=2x-1$,则$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1(2x-1)\,dx=0$, $f'(x)=2>0$,但$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$,于是排除(C).

令$f(x)=-2x+1$,则$\int_0^1 f(x)\,dx=0$, $f'(x)=-2<0$,但$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$,于是排除(A).

令$f(x)=-3x^2+1$,则$\int_0^1 f(x)\,dx=-x^3\big|_0^1+1=0$, $f''(x)=-6<0$,但$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}+1=\frac{1}{4}>0$,于是排除(B).

因此选(D).

---

(5)【分析】 这是同一区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上比较三个定积分,其被积函数均连续,这只须比较被积函数.

先利用奇偶函数在对称区间上定积分性质,简化

$$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\,dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2x}{1+x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\,dx$$

现只须在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上比较三个函数$1,\ 1+\sqrt{\cos x},\ \frac{1+x}{e^x}$

易知 $1<1+\sqrt{\cos x}\left(x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)\Rightarrow M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\,dx<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\,dx=K$

下面证明:$\frac{1+x}{e^x}<1\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],x\neq 0\right)$.

$\Leftrightarrow e^x>1+x\Leftrightarrow f(x)=e^x-x-1>0$

方法一 令$f(x)=e^x-x-1\Rightarrow f'(x)=e^x-1\Rightarrow f''(x)=e^x>0\Rightarrow f'(x)\begin{cases}<0(x<0)\\=0(x=0)\\>0(x>0)\end{cases}$

$\Rightarrow f(x)>f(0)=0\ (x\neq 0)$.

方法二 令$f(x)=e^x-x-1$,用泰勒公式

$$\Rightarrow\quad f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2,\ (\xi\text{在}0\text{与}x\text{之间})$$

$$=\frac{1}{2}e^{\xi}>0$$

方法三 直接考察$g(x)=\frac{1+x}{e^x}$的单调性.

$$g'(x)=\frac{e^x-(1+x)e^x}{e^{2x}}=\frac{-x}{e^x}\begin{cases}>0\quad(x<0)\\=0\quad(x=0)\\<0\quad(x>0)\end{cases}$$

$\Rightarrow\ g(x)<g(0)=1\ (x\neq 0)$.

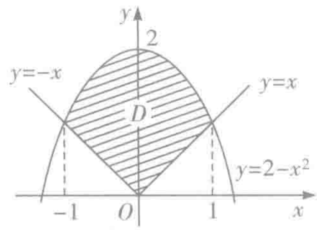
由于$\frac{1+x}{e^x}<1\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],x\neq 0\right)$.

$$\Rightarrow\quad N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\,dx=M$$

因此 $K>M>N$

选(C).

(6)【分析】 原式 $=\iint\limits_D(1-xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 如右图. 由 D 关于 y 轴对称



$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

$$\text{原式}=2\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{2-x^2}1\mathrm{d}y\ (D_1\text{ 是 }D\text{ 的右半平面部分})$$

$$=2\int_0^1(2-x-x^2)\mathrm{d}x=2\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{3}.$$

选(C).

(7)【分析】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$. $\boldsymbol{A}$ 和各选项中的矩阵都不相似于对角矩阵. 对这样的两个矩阵，要判定它们相似没有有效的方法，而判定它们不相似是有办法的. 因此本题采用排除法较好.

工具：相似的矩阵秩相等. 若 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 相似于 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$，从而 $r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})$.

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\ r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2.$$

而当 $\boldsymbol{B}$ 取(B)，(C)，(D) 中的任一矩阵时 $r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=1$. 从而(B)，(C)，(D) 都排除，故选(A).

(8)【分析】 **方法一** 一方面，$\boldsymbol{A}$ 是 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})$ 的子矩阵，因此 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})\geqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

另一方面，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})$ 是 $\boldsymbol{A}$，$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$ 的乘积：$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$

因此 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$，得 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

方法二 矩阵的秩就是其列向量组的秩. 设

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n),\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n).$$

则 $$\boldsymbol{\gamma}_i=\boldsymbol{A\beta}_i=b_{1i}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{2i}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{ni}\boldsymbol{\alpha}_n$$

从而 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$ 可以用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}).$$

选(A).

评注 本题也可用排除法.

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$

若 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$，

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{BA})=\mathrm{r}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}=2>\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\text{，排除(B).}$$

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=2,\max\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}=1\text{，排除(C).}$$

若 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=0$.

排除(D).

二.填空题

(9)【分析一】 对 $f(t)=\arctan t$ 在 $[x,x+1]$ 用拉格朗日中值定理得

$$\arctan(x+1)-\arctan x=f(x+1)-f(x)=f'(\xi)$$

$$=\frac{1}{1+\xi^2},\text{其中 } x<\xi<x+1$$

于是
$$\frac{x^2}{1+(x+1)^2}\leqslant x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]\leqslant\frac{x^2}{1+x^2}$$

又
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+(x+1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1$$

因此由夹逼定理得

$$\lim_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=1.$$

【分析二】 这是 $\infty\cdot 0$ 型极限,转化为$\frac{0}{0}$型极限后用洛必达法则得

$$\lim_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan(x+1)-\arctan x}{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+(x+1)^2}-\frac{1}{1+x^2}}{-2/x^3}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3[x^2-(x+1)^2]}{-2(1+(x+1)^2)(1+x^2)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3(2x+1)}{-2[1+(x+1)^2](1+x^2)}=1.$$

---

(10)【分析】 先求拐点.

$$y=x^2+2\ln x\ (x>0)$$

$$y'=2x+\frac{2}{x},\ y''=2-\frac{2}{x^2}=\frac{2(x^2-1)}{x^2}$$

由此得唯一拐点(1,1).

当 $x=1$ 时 $y'(1)=4$,于是拐点处切线方程为

$$y=1+4(x-1)$$

即
$$y=4x-3.$$

---

(11)【分析】 $$\int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2-4x+3}\mathrm{d}x=\int_5^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x-3)}=\frac{1}{2}\int_5^{+\infty}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{x-3}{x-1}\Bigg|_5^{+\infty}=\frac{1}{2}\left[\ln 1-\ln\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}\ln 2$$

---

(12)【分析】 曲线表为 $y=y(x)$,先用参数求导法求出

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{3\sin^2t\cos t}{-3\cos^2t\sin t}=-\tan t,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{t=\frac{\pi}{4}}=-1,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=(-\tan t)'\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{\cos^2t}\cdot\frac{1}{-3\cos^2t\sin t},$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{3}\sqrt{2}^5=\frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

按曲率公式,$t=\frac{\pi}{4}$对应点的曲率

$$K=\left.\frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{4}{3}\sqrt{2}}{2^{3/2}}=\frac{2}{3}$$

---

(13)【分析一】 由方程 $\ln z+e^{z-1}=xy$

确定 $z=z(x,y)$. 先求 $z\left(2,\frac{1}{2}\right)$:由

$$\ln z+e^{z-1}=2\times\frac{1}{2}=1,$$

得 $z=1$(令 $f(z)=\ln z+e^{z-1}-1\Rightarrow f'(z)=\frac{1}{z}+e^{z-1}>0(z>0)\Rightarrow f(z)$ $(0,+\infty)$ 单调上升,有唯一零点 $z=1$).

因此 $z\left(2,\frac{1}{2}\right)=1$.

将方程两边对 x 求导得

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+e^{z-1}\frac{\partial z}{\partial x}=y$$

令 $x=2,y=\frac{1}{2},z=1$ 得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{2})}=\frac{1}{4}.$$

【分析二】 记 $F(x,y,z)=\ln z+e^{z-1}-xy$. $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定. 同前求得 $z\left(2,\frac{1}{2}\right)=1$.

代公式得 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{-y}{\frac{1}{z}+e^{z-1}}.$$

$$\Rightarrow\qquad\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{2})}=\frac{\frac{1}{2}}{1+1}=\frac{1}{4}.$$

---

(14)【分析】 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&2&1\end{bmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,所以 $\boldsymbol{P}$ 可逆. 于是

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&2&1\end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{A}\sim\begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&2&1\end{bmatrix}$,有相同的特征值.

$$\left|\lambda E-\begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&2&1\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\-1&\lambda-1&1\\-1&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+3)$$

其实根只有2一个.

三、解答题

(15)【分析与求解一】 用分部积分法

$$I=\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx=\frac{1}{2}\int\arctan\sqrt{e^x-1}de^{2x}$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{e^{2x}}{1+(\sqrt{e^x-1})^2}d\sqrt{e^x-1}$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}e^x\sqrt{e^x-1}+\frac{1}{2}\int(e^x-1)^{\frac{1}{2}}d(e^x-1)$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}e^x\sqrt{e^x-1}+\frac{1}{3}\sqrt{e^x-1}^3+c$$

【分析与求解二】 先作变量替换再分部积分.

令 $t=\sqrt{e^x-1}\quad\Rightarrow\quad x=\ln(t^2+1)$

$$I=\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx=\int(t^2+1)^2\arctan t\frac{2t}{1+t^2}dt$$

$$=\int(1+t^2)2t\arctan tdt=\frac{1}{2}\int\arctan td(1+t^2)^2$$

$$=\frac{1}{2}(1+t^2)^2\arctan t-\frac{1}{2}\int(1+t^2)^2\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}(1+t^2)^2\arctan t-\frac{1}{2}t-\frac{1}{6}t^3+c$$

代入 $t=\sqrt{e^x-1}$ 得

$$I=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{6}(\sqrt{e^x-1})^3+c$$

---

(16)【分析与求解】 (Ⅰ)这是求解变限积分方程

$$\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(x-t)dt=ax^2,$$

为了对变限积分求导,对第二个积分先作变量替换

$$\int_0^x tf(x-t)dt\xlongequal{x-t=s}-\int_x^0(x-s)f(s)ds$$

$$=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$$

代入原方程转化为

$$\int_0^x f(t)dt+x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt=ax^2\qquad①$$

两边求导得

$$f(x)+xf(x)+\int_0^x f(t)dt-xf(x)=2ax$$

即

$$f(x)+\int_0^x f(t)dt=2ax\qquad②$$

(在 ① 中令 $x=0$,得 $0=0$),① 与 ② 等价.

再对 ② 求导得

$$f'(x)+f(x)=2a \qquad ③$$

② 中令 $x=0$ 得

$$f(0)=0 \qquad ④$$

② 与 ③ + ④ 等价.

现求解初值问题

$$\begin{cases} y'+y=2a \\ y(0)=0 \end{cases}$$

其中 $y=f(x)$. 两边乘 e^x 得

$$(ye^x)'=2ae^x$$

积分得 $$ye^x=2a\int_0^x e^t\mathrm{d}t=2a(e^x-1)$$

即 $$f(x)=y=2a(1-e^{-x})$$

(Ⅱ)$f(x)$ 在 $[0,1]$ 的平均值是

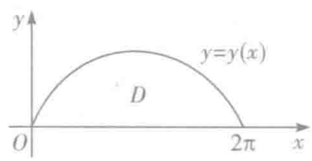
$$\frac{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}{1-0}=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 2a(1-e^{-x})\mathrm{d}x$$

$$=2a\left(1-\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x\right)=2a\left(1+e^{-x}\Big|_0^1\right)=2a/e=1$$

因此 $a=\dfrac{e}{2}$.

---

(17)【分析与求解】 曲线可以表为 y 是 x 的函数 $y=y(x)$. D 的草图如右图.



$$I\xlongequal{\text{记}}\iint_D(x+2y)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{y(x)}(x+2y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}(xy(x)+y^2(x))\mathrm{d}x$$

作变量替换 $x=t-\sin t$,相应地 $y(x)=1-\cos t$,$\mathrm{d}x=(1-\cos t)\mathrm{d}t$,$x\in[0,2\pi]$ 对应 $t\in[0,2\pi]$,于是

$$I=\int_0^{2\pi}[(t-\sin t)(1-\cos t)+(1-\cos t)^2](1-\cos t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)^2\mathrm{d}t+\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{\text{记}}I_1+I_2.$$

$$I_2=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}8\sin^6\frac{t}{2}\mathrm{d}t=16\int_0^{\pi}\sin^6 s\mathrm{d}s$$

$$=32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\mathrm{d}t=32\cdot\frac{5\times3\times1}{6\times4\times2}\cdot\frac{\pi}{2}=5\pi$$

$$I_1=\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}t(1-\cos t)^2\mathrm{d}t-\int_{-\pi}^{\pi}\sin t(1-\cos t)^2\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}t(1-\cos t)^2\mathrm{d}t\text{(周期函数与奇偶函数的积分性质)}$$