学府考研
十年专注·只做考研

理工社®

2018 考研数学
强化夺冠经典600题（数学一）

◎主编 张同斌 策划 考研数学命题研究组

数学全程答疑

下载答疑APP

600道好题精做·考研第二轮复习经典题库

《考研数学基础通关经典1000题》+《考研数学强化夺冠经典600题》完美搭配

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

学府考研
十年专注·只做考研

理工社®

2018考研数学
强化夺冠经典
600题（数学一）

◎主编　张同斌　　策划　考研数学命题研究组

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学强化夺冠经典 600 题．数学一 / 张同斌主编．—北京：北京理工大学出版社，2017.3
ISBN 978-7-5682-3817-5

Ⅰ.①考…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－习题集　Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 050457 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 陕西思维印务有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 29
字　　数 / 668 千字
版　　次 / 2017 年 3 月第 1 版　2017 年 3 月第 1 次印刷
定　　价 / 56.80 元

责任编辑 / 钟　博
文案编辑 / 钟　博
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

致学府图书用户

亲爱的学府图书用户：

您好！欢迎您选择学府图书，感谢您信任学府！

“学府图书”是学府考研旗下专业从事考研教辅图书研发和出版的图书公司！

为了更好地为您提供“优质教学、始终如一”的服务，对于您所提出的宝贵意见与建议，我们向您深表感谢！

若我们的图书质量或服务未达到您的期望，敬请您通过以下联系方式进行告知。我们珍视并诚挚的感谢您的反馈，谢谢您！

在此祝您学习愉快！

学府图书全国统一客服电话：400-090-8961

学府图书质量及服务监督电话：15829918816

学府图书总经理投诉电话：张城 18681885291 投诉必复！

您也可将信件投入此邮箱：34456215@qq.com 来信必回！

图书微博

图书微信

图书微店

学府图书——张同斌考研数学书系使用说明

数学是工学类、经济学类和管理学类硕士研究生入学考试的必考科目，分为数学一、数学二、数学三，满分为150分，但从历年考生的成绩来看，并不理想，成绩分化比较严重. 其原因有三点：其一是考生对基本概念、基本理论以及基本方法掌握得不扎实；其二是数学命题的特点是综合性比较强，几乎每道题都是二到五个知识点的综合运用；其三是考生对与考研题目特点、难度相当的题目训练不够. **为帮助考生弥补这些短板，拥有31年高校执教经历、26载考研数学辅导经验的张同斌教授亲自精心编写了本系列图书，目的在于帮助考生有计划、有步骤、科学合理地完成考研数学复习，从基本概念、基本理论、基本方法，到对其进行熟练运用，循序渐进，提高客观题与解答题的解题能力；通过做历年真题，最后把综合解题能力浓缩到《考研数学全真模拟冲刺6套卷》与《考研数学考前热身密押3套卷》当中，力助考生取得优异成绩.**

需要指出的是，考研数学复习应从大三第二学期开始，这一时期考生应结合《考研数学复习指导全书》将《高等数学》《线性代数》《概率论与数理统计》（数学一、数学三）课本过一遍，并至少完成一半以上的课后习题，然后按下面的时间规划系统复习.

图书	复习任务及时间规划	阶段目标
《考研数学复习指导全书》 （数学一） （数学二） （数学三）	按照考研大纲的要求复习章节的基本概念、基本理论、基本方法，同时将知识连成网、织成片，找出不同章节内容的链接点，提高综合分析解决问题的能力. 通过例题把握每一章节常考题型及解题方法 **时间：1月1日—4月30日**	1. 熟记概念、定理、公式； 2. 理解基本概念、基本理论，掌握基本方法的内涵与外延； 3. 掌握常用知识点不同命题形式的解题方法； 4. 完成同步训练
《考研数学真题分类详解》 （数学一） （数学二） （数学三）	将历年真题按考点进行归纳分类，在基础复习的同时，掌握考研真题的出题形式，了解知识点的综合技巧，认真做题训练，建议至少完成两遍，以达到熟能生巧的目的 **时间：2月1日—5月1日；** **10月20日—11月30日**	1. 通过真题的训练，查漏补缺； 2. 将考研数学的知识点与解题方法串起来，形成体系； 3. 在冲刺阶段对真题题型及难度得心应手，巩固基础及提高复习阶段所掌握的解题方法

《考研数学基础通关经典1000题》 （数学一） （数学二） （数学三）	在掌握基本概念、基本理论、基本方法的基础上，熟悉并掌握所有知识点对应的题型.每天完成30个题目，熟练掌握解答客观题的方法，并为提高解答解答题的能力奠定基础.若有多余时间应将生疏的题目与方法重复训练 **时间：5月1日—6月30日**	1.掌握选择题、填空题常用的解题方法； 2.初步把握解答解答题的方法； 3.拿到一个题，应能判断出是考哪个知识点，解题时应用哪个基本概念、基本理论或基本方法
《考研数学强化夺冠经典600题》 （数学一） （数学二） （数学三）	在掌握基本概念、基本理论、基本方法的基础上，把握每一章节的命题特点，命题点与对应的定理、公式的内在联系.每天完成20个题目，熟练掌握解答解答题的方法，并进一步提高客观题的解题能力.若多余时间应将生疏题目与方法重复训练 **时间：7月1日—8月30日**	1.掌握解答题（包括计算题、证明题）常用的解题方法； 2.加强选择题、填空题的解题能力； 3.把握常见考题与基本概念、基本理论、基本方法的内在联系
《考研数学全真模拟冲刺6套卷》+《考研数学考前热身密押3套卷》 （数学一） （数学二） （数学三）	通过《考研数学全真模拟冲刺6套卷》与《考研数学考前热身密押3套卷》的训练，检验复习效果，凝炼考点，提高解题熟练度.将考研数学的所有考点与知识点形成有机联系，提高综合分析、解决问题的能力 **时间：9月1日—考前**	1.通过难度与真题相近、口味与真题一致的模拟题的训练，积累考试经验； 2.将一年来复习的内容高度凝练，重点题型强化训练，同时梳理基本概念、基本理论、基本方法以及常见考题对应的方法，从容参加考试，超越135分

Preface

前 言

数学是全国硕士研究生入学统一考试工学类考生必考的科目，考试内容包括高等数学（占56%）、线性代数（占22%）和概率论与数理统计（占22%）. 从试卷结构来看共23个题目，其中8个（单项）选择题（共4×8=32分）、6个填空题（共4×6=24分）、9个解答题（共94分），满分为150分. 解答题包括计算题、证明题和应用题等，属于主观题，占到了62.7%，能否快速、准确地解答主观题，是考生取得优异成绩的基础与关键.

主观题主要考查考生在对基本概念、基本理论与基本方法理解与掌握的基础上综合分析、解决问题的能力. 以历年考试成绩统计看，其得分率一般. 基于此，作者编写了符合大纲要求、接近真题难度、体现命题规律的《考研数学强化夺冠经典600题（数学一）》，以期能够通过这些"好题"的训练解决主观题得分率一般的短板. 这本书与《考研数学基础通关经典1000题（数学一）》是姊妹篇，如果说《考研数学基础通关经典1000题（数学一）》对于夯实数学基础、提高客观题的解题能力有较大帮助的话，这本《考研数学强化夺冠经典600题（数学一）》对提高综合分析、解决数学问题的能力起到锦上添花的作用.

本书具有如下特色：

1. 将浩如烟海的数学题目通过600题浓缩在有限的考点中，每个考点给出了题型变化，使考生能够从战略上把握数学的命题方向，从战术上掌握每个考点以不同形式命题时的应对方法，从而使考生从一个较高的角度俯瞰考研数学，把握考研数学全貌，对全面提高数学成绩起到引领作用.

2. 题目的"口味"与真题一致，难度达到或略高于真题，注重数学思维的培养，通过题目的训练，使考生能够在把握数学命题方向的基础上，提高解题的速度与正确率.

3. 题目的选取完全基于最新数学考试大纲并融入近年命题规律，有些题目是编者根据31年的教学经验以及26年考研辅导班的经验有针对性编制而成的，具有较好的前瞻性与预测性，这从

2017 年全国硕士研究生入学考题中已经得到验证．题目虽然是针对主观题设计，对主观题强化提高有较大的促进作用，但对于进一步深化提高解答客观题的能力也有较大的帮助．

4. 每个题目都给出了详细的分析与解题过程，有的给出了一题多解，以提高考生的发散思维能力，同时使考生能够在此基础上选择适合自己的、较简捷的解法，并且规范的解题过程对考生的考试答卷可起到示范作用．

本书适合数学一的考生使用，对数学二、数学三的考生也有较高的参考价值，书中收录了适量真题，对于真题，在题后以“年份[卷种]”的形式表示，如 121.（2013[1]）表示 121 题选自 2013 年数学一真题，218.（2014[2][3]）表示 218 题选自 2014 年数学二与数学三真题，以便于读者识别．

在本书的编写过程中，作者参考了国内外许多著作与教材，谨向有关作者表示衷心的感谢！

限于作者水平，书中的疏漏与错误之处在所难免，恳请读者和同行批评指正．

编　者

2017 年 1 月

Contents

目录

第一部分　精编解答题

高 等 数 学

【考点 1】求函数极限.

【题型变化】(1)利用洛必达法则求未定式("$\frac{0}{0}$""$\frac{\infty}{\infty}$""$\infty-\infty$""$0\cdot\infty$""1^{∞}""0^{0}""∞^{0}")的极限.

(2)已知一个极限求与其相关的另一个极限.

(3)已知极限求参数.

(4)求分段函数在分段点的极限.

1. 设 $f(x)=e^x$,且 $\int_0^x f(t)dt=xf[xu(x)]$,求 $\lim\limits_{x\to 0}u(x)$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{\tan x-x}$.

3. (2016[2][3])求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\frac{\sin t}{t}dt\right]du}{x\ln(1-x^2)}$.

5. (2004[3])求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

6. (2014[1][2][3])求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

7. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\sin x)]}{\tan^4 x}$.

8. 已知 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{ax^2+bx+1}+2x)=3$,求常数 a,b.

9. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

10. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{x^3}$.

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos x)^x-1}{x(e^{x^2}-1)}$.

12. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0,\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{1-\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x}, & x>0,\end{cases}$ 问当 a 为何值时，极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在.

13. 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{2}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}-\dfrac{\sin(x-1)}{|x-1|}\right]$.

14. (2005[3])求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$.

15. 设 $f(x)$ 是连续函数，$\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{f(x)}{2^x-1}\right]^{\frac{1}{\ln\cos 2x}}=8$，求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

16. 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x+f(x)}{x^3}=2$，求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

17. 设函数 $f(x)$ 具有一阶连续导数，且 $f(0)=0,f'(0)\neq0$，求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}f(x^2-t)\mathrm{d}t}{x^3\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t}$.

18. 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+xe^{\frac{1}{x}})$.

19. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\sin x-x-x^2}{(e^x-1)\sin^2 x}$.

【考点 2】 求数列极限.

【题型变化】(1)利用函数极限求数列极限.

(2)利用夹逼定理求数列极限(函数极限).

(3)利用单调增(减)有上界(下界)数列必收敛求数列极限.

20. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

21. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某一邻域内可导，且 $f(0)=1,f'(0)=-1$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[n(e^{\frac{1}{n}}-1)]^{\frac{1}{1-f(\frac{1}{n})}}$.

22. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1>0,x_{n+1}=\ln(1+x_n)(n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ)证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限；

(Ⅱ)计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{x_n}-\dfrac{1}{x_{n+1}}\right)$；

(Ⅲ)计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}}$.

23. (Ⅰ)设 $\{x_n\}$ 是单调递减数列，$\{y_n\}$ 是单调递增数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$.

证明：数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 都收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$；

(Ⅱ)证明:数列 $x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ 收敛.

24. 设有数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$,其中 $a_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{i}$,$b_n=\int_0^n\sqrt{x}\,\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ)求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^{\frac{3}{2}}}$;

(Ⅱ)证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{\sqrt{n}}$存在,并求该极限.

25. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\mathrm{e}^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

26. 设数列$\{x_n\}$满足 $x_1=\frac{1}{2}$,$x_{n+1}=x_n^2+x_n(n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ)证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}$存在,并求该极限;

(Ⅱ)计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\cdots+\frac{1}{x_n+1}\right)$.

27. 设数列$\{x_n\}$满足 $x_1=1$,$x_{n+1}=\frac{1+2x_n}{1+x_n}(n=1,2,\cdots)$. 证明:数列$\{x_n\}$收敛,并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【考点3】无穷小的比较.

【题型变化】(1)比较两个或三个无穷小的大小(主要考客观题).

(2)已知两个无穷小的比较,求参数.

28. (2006[2])试确定常数 A,B,C 的值,使得

$$\mathrm{e}^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3),$$

其中 $o(x^3)$是当 $x\to0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

29. 设 $f(x)$是满足$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{\ln(1+x^2)}=2$ 的连续函数,且当 $x\to0$ 时,$\int_0^{\sin^2x}f(t)\mathrm{d}t$ 是关于 x 的 n 阶无穷小,求 n.

30. 设 $f(x)$为连续函数,且$\lim\limits_{x\to0}\frac{xf(x)-\sin x}{x^3}=1$,$F(x)=\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t$,当 $x\to0$ 时,$F(x)-\frac{1}{2}x^2$ 与 ax^k 为等价无穷小,其中 a 为非零常数,k 为正整数.

(Ⅰ)求 a 与 k 的值及 $f(0)$;

(Ⅱ)证明:$f(x)$在点 $x=0$ 处可导,并求 $f'(0)$.

【考点4】函数的连续性与间断点的类型及判断.

31. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax+2x}{e^x-1}, & x<0,\\ b, & x=0,\\ \dfrac{e^x-\sin x-1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{2}x^2\right)}, & x>0\end{cases}$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,求常数 a,b.

32. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)}, & \dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,\\ a & x=1,\\ \dfrac{e^{\frac{1}{\pi}(x-1)}-1}{x-1}, & x>1.\end{cases}$

(Ⅰ)当 a 满足什么条件时,$x=1$ 是 $f(x)$的可去间断点?

(Ⅱ)当 a 为何值时,$f(x)$在$\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$是连续函数?

33. 设函数 $f(x)=x^{\sin x}$,$x\in(0,1]$,对于其他 x,$f(x)$满足 $3f(x+1)-f(x)=k$,其中 k 为常数.

(Ⅰ)写出 $f(x)$在$(-1,0]$上的表达式;

(Ⅱ)问 k 为何值时,$f(x)$在点 $x=0$ 处连续.

34. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}-ax^2+bx}{x^{2n}+1}$是连续函数,求常数 a,b.

35. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\tan t}{\tan x}\right)^{\frac{x}{\tan t-\tan x}}$,求 $f(x)$的间断点并判断其类型.

36. 设函数 $f(x)=e^{\frac{1}{x-1}}\dfrac{\ln|x+2|}{x^2+x-6}$,求 $f(x)$的间断点并判断其类型.

【考点5】闭区间上连续函数的性质.

【题型变化】(1)利用零点定理证明函数零点(方程根)的存在性.

(2)利用最值定理与介值定型(推论)证明存在一点 ξ,使得 $f(\xi)=C$.

37.(Ⅰ)证明:方程 $x^n+nx=2$ 存在唯一的正实根 a_n(其中 n 为正整数);

(Ⅱ)计算$\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^{-2n}$.

38. 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$,证明:在(a,b)内至少存在一点 ξ,使得

$$f(\xi)=\frac{2[f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+nf(x_n)]}{n(n+1)}.$$

39. 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,且 $f(a)=f(b)$,证明:至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=f\left(\xi+\dfrac{b-a}{2}\right)$.

【考点 6】导数的概念.

【题型变化】(1)利用导数定义求某些函数在特殊点的导数.

(2)利用导数定义或左、右导数讨论分段函数在分段点的可导性.

(3)求隐函数、参数方程所确定的函数、积分上限函数对应曲线上某点处的切线与法线方程.

(4)已知一个极限,求函数在某点处的导数.

(5)已知函数在某点可导,求极限.

(6)曲线 $y=f(x)$ 与 $y=f'(x)$ 及 $y=f''(x)$ 之间的关系.

40. 设 $f(x)=(x^2-1)\arctan\sqrt{\dfrac{3-x}{x+1}}$,求 $f'(1)$.

41. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$是区间$(-\infty,+\infty)$内的可导函数,试确定常数 a,b.

42. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数,且在点 $x=1$ 处连续,$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln[f(x)+3]}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}=2$,求曲线 $y=f(x)$ 在$(-1,f(-1))$点的切线方程.

43. 已知函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,且对任意 x,y 都有 $f(x+y)=e^xf(y)+e^yf(x)$,$f'(0)=e$,求 $f(x)$的表达式.

44. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq0,\\ a, & x=0,\end{cases}$其中 $\varphi(x)$具有二阶导数,且 $\varphi(0)=1,\varphi'(0)=-1$.

(Ⅰ)确定常数 a 的值,使得 $f(x)$在点 $x=0$ 处连续;

(Ⅱ)求 $f'(x)$;

(Ⅲ)讨论 $f'(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内的连续性.

45. 设函数 $F(x)=f(x)g(x)$,如果 $f(x)$在 x_0 点可导,$g(x)$在 x_0 点连续但不可导,证明:$F(x)$在 x_0 点可导$\Leftrightarrow f(x_0)=0$.

46. 设曲线 $y=f(x)$与曲线 $\tan\left(x+y+\dfrac{\pi}{4}-1\right)=e^y$ 在点(1,0)处有公共切线.

(Ⅰ)求公共切线方程;

(Ⅱ)计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$.

47. 设 $f(x)$是周期为 3 的连续函数,在点 $x=0$ 的某一邻域内恒有

$$f(1+\tan x)-2f(1-\tan x)=6x+\tan^2x,$$

已知 $f(x)$在点 $x=1$ 处可导,求曲线 $y=f(x)$在点$(10,f(10))$处的切线方程.

48. 设函数 $f(x)$在 $x\leqslant x_0$ 时具有二阶导数,

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\leqslant x_0,\\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c, & x>x_0,\end{cases}$$

试确定常数 a,b,c,使得 $F(x)$在点 x_0 处二阶可导.

49. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,当 $0\leqslant x<1$ 时,$f(x)=x(x^2-1)$,且 $f(x+1)=af(x)$,试确定常数 a 的值,使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导,并求出此导数.

【考点 7】 各种类型函数的求导运算.

【题型变化】(1)求分段函数的导数.

(2)求初等函数的导数.

(3)求隐函数的一阶、二阶导数.

(4)求参数方程所确定的函数的导数.

(5)求幂指函数与连乘积形式函数的导数.

(6)求简单函数的高阶导数.

(7)求积分上限函数的导数.

50. 已知 $y=f\left(\dfrac{\sin x-1}{\sin x+1}\right)$,$f'(x)=\ln(1-x)$,求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

51. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x\left[(t-1)\int_0^{t^2}\varphi(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 其中 $\varphi(x)$ 为连续函数.

(Ⅰ)讨论 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与可导性;

(Ⅱ)求 $f'(x)$.

52. 设 $f(x)$ 为可导函数,且 $f(0)=0$,n 为正整数,$F(x)=\int_x^0 t^{2n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t$,求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^{3n}}$.

53. 设函数 $f(t)=\lim\limits_{x\to 0}t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{xt}$ $(t\neq 0)$.

(Ⅰ)求 $f^{(n)}(t)$;

(Ⅱ)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^{(n)}(t)}{nf(t)}$.

54. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\sin x}$,$g(x)=\begin{cases}x^2\arctan\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \ln(1+x^2), & x>0,\end{cases}$ 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(g(x))]\right|_{x=0}$.

55. (2007[2])已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数,且 $f'(0)=1$,函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-x\mathrm{e}^{y-1}=1$ 所确定,设 $z=f(\ln y-\sin x)$,求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$,$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

56. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$ 所确定.

(Ⅰ)求曲线 $y=y(x)$ 在点(1,0)处的切线方程;

(Ⅱ)求曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的曲率.

57. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x=\int_0^{1-t} e^{-u^2}\,du, \\ y=(2-t^2)e^{-(1-t)^2} \end{cases}$ 所确定,求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}$, $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$.

58. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y} e^{-t^2}\,dt=\int_0^x xe^t\,dt$ 所确定,求 $dy|_{x=0}$, $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

59. 试用变换 $x=\cos t$ 将微分方程 $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=0$ 化为以 t 为自变量的方程,并解方程.

【考点 8】与微分中值定理相关的问题.

【题型变化】(1)与微分中值定值相关的极限计算问题.

(2)利用罗尔定理证明 $f'(\xi)=0$ 或 $f''(\xi)=0$.

(3)利用拉格朗日中值定理、柯西中值定理以及泰勒中值定理证明与 ξ 相关的等式或不等式.

(4)关于两个中值 ξ,η 相关的证明问题.

60. 设 ξ 是函数 $f(x)=\arcsin x$ 在 $[0,x]$ 或 $[x,0]$ 上满足拉格朗日中值定理的中值,其中 $\xi=\theta x(0<\theta<1)$,求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\theta^2$.

61. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{e}{n}-\arctan\frac{e}{n+1}\right)$.

62. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数,$f(0)=f(1)$,且当 $x\in(0,1)$ 时,$|f''(x)|\leqslant M$(M 为大于零的常数). 证明:对任意 $x\in(0,1)$,$|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}M$.

63. 设函数 $f(x)$ 的一阶泰勒公式为

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2}f''(a+\theta h)h^2(0<\theta<1),$$

如果 $f(x)$ 具有三阶连续导数,且 $f'''(a)\neq 0$. 证明:$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{3}$.

64. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,5]$ 上连续,在 $(0,5)$ 内二阶可导,且 $3f(0)=\int_0^3 f(x)\,dx=f(3)+f(4)+f(5)$.

(Ⅰ)证明:存在 $\eta\in(0,3)$,使得 $f(\eta)=f(0)$;

(Ⅱ)证明:存在 $\xi\in(0,5)$,使得 $f''(\xi)=0$.

65. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f(a)f(b)>0$,$f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$. 证明:对任意常数 k,存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=kf(\xi)$.

66. 设 $0<a<b$,函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,a+b]$ 上连续,在 $(a,a+b)$ 内可导,且 $f(a)=b$,$f(b)=a$,$f(a+b)=a+b$. 证明:至少存在一点 $\xi\in(a,a+b)$,使得 $f'(\xi)+g'(\xi)[f(\xi)-\xi]=1$.

67. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=f(1)=0$,如果 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上