高等院校"十三五"规划教材

高等数学

（经管类）

（下）

GAODENG SHUXUE

张　甜　陈　勤　主编

3

南京大学出版社

高等院校“十三五”规划教材

高等数学
（经管类）

（下）

主　编　张　甜　陈　勤
副主编　刘　磊　杨策平
　　　　饶　峰
参　编　杨贵诚　阚兴莉
　　　　解　进　杨　永

南京大学出版社

内容简介

本书深入浅出，以实例为主线，贯穿于概念的引入、例题的配置与习题的选择中，淡化纯数学的抽象概念，注重实际，特别根据应用型高等学校学生思想活跃的特点，举例富有时代性和吸引力，突出实用，通俗易懂，注重培养学生解决实际问题的技能，注意知识的拓展，针对不同院校课程设置的情况，可对教材内容进行取舍，便于教师使用.

本书可作为应用型高等学校（新升本院校，地方本科高等院校）本科经济与管理等非数学专业的“高等数学”或“微积分”课程的教材使用，也可作为部分专科的同类课程教材使用.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学：经管类．下／张甜，陈勤主编．—南京：南京大学出版社，2017.9

（高等院校“十三五”规划教材）

ISBN 978－7－305－18806－0

Ⅰ．①高… Ⅱ．①张… ②陈… Ⅲ．①高等数学—高等数学—教材 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 129874 号

出版发行　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路 22 号　　邮　　编　210093
出 版 人　金鑫荣

丛 书 名　高等院校“十三五”规划教材
书　　名　高等数学（经管类）（下）
主　　编　张　甜　陈　勤
责任编辑　吴　华　　编辑热线　025－83596997

照　　排　南京理工大学资产经营有限公司
印　　刷　南京人民印刷厂
开　　本　787×1092　1/16　印张 9.75　字数 240 千
版　　次　2017 年 9 月第 1 版　2017 年 9 月第 1 次印刷
ISBN 978－7－305－18806－0
定　　价　26.00 元

网　　址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
微信服务号：njuyuexue
销售咨询热线：（025）83594756

前　言

本书是为了适应培养“实用型、应用型”的经济管理人才的要求而编写的公共数学课教材，可作为高等学校本专科经济类高等数学课程和高职高专数学课程的教材或教学参考书.

本书是在吸收国内外有关教材的优点的基础上并结合近年来经济数学教学改革经验的基础上编写而来的.

全书分为上、下两册，主要介绍了微积分学的基础知识，共有十章，包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分与定积分、定积分的应用、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、常微分方程等内容.

全书具有以下特色：

1. 针对当前教育实际与特点，突出“以应用为目的，必需够用为度”的指导思想，强调数学思想、数学方法及数学的应用.

2. 文字上力求深入浅出，形、数结合，形象易懂，让学生有兴趣、有能力学好该课程.

3. 本书在编写上侧重于应用，对过于复杂的定理证明以及在实际问题中应用较少的定理证明都予以省略，不去强调论证的严密性.

4. 注重数学概念与实际问题的联系，特别是与经济问题的联系.

5. 按章节配备适量基本要求题，有利于学生掌握基本概念、基本运算、基本方法.

教材编写具有一定的弹性，希望使适用面更为广泛. 不同层次的学生可以根据实际情况选择不同的内容.

本书得到南京大学出版社的大力支持，黄黎编辑为此付出辛勤劳动，特致以谢意.

由于编者水平有限，时间紧迫，难免存在疏漏之处，敬请专家、同行及广大读者指正.

编　者

2017 年 5 月

扫一扫可申请
教师教学资源

扫一扫可见
学生学习资源

目　录

第六章　微分方程

微积分研究的对象是函数，要应用微积分解决问题，首先要根据实际问题寻找其中存在的函数关系．但是根据实际问题给出的条件，往往不能直接写出其中的函数关系，而可以列出函数及其导数所满足的方程式，这类方程式称为微分方程．微分方程建立以后，对它进行研究，找出未知函数，这就是解微分方程．本章主要介绍微分方程的一些基本概念和几种较简单的微分方程的解法．

第一节　微分方程的基本概念

为了说明微分方程的基本概念，先看两个例子．

例 1　一曲线通过点$(1,2)$，且在该曲线上任一点$M(x,y)$处的切线的斜率为$2x$，求这条曲线的方程．

解　设所求曲线的方程为$y=y(x)$，根据导数的几何意义，可知未知函数$y=y(x)$应满足关系式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x \tag{1}$$

且满足下列条件：$x=1$时，$y=2$，简记为

$$y\Big|_{x=1}=2. \tag{2}$$

对(1)式两端积分，得$y=\int 2x\mathrm{d}x$，即

$$y=x^2+C, \tag{3}$$

其中C是任意常数．

将条件“$x=1$时，$y=2$”代入(3)式，得$2=1^2+C$，由此得出常数$C=1$．把$C=1$代入(3)式，得所求曲线方程（称为微分方程满足条件$y\Big|_{x=1}=2$的解）为

$$y=x^2+1. \tag{4}$$

例 2　一个质量为m的物体在桌面上沿着直线做无摩擦的滑动，它被一端固定在墙上的弹簧所连接，此弹簧的弹性系数为$k(k>0)$．弹簧松弛时物体的位置确定为坐标原点O，直线确定为x轴，物体离开坐标原点的位移记为x（如图 6－1）．在初始时刻，物体的位移$x=x_0(x_0>0)$．物体从静止开始滑动，求物体的运动规律（即位移x随时

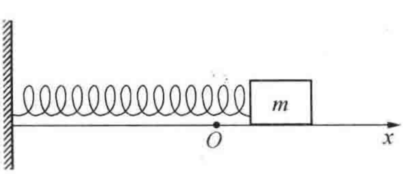

图 6－1

间 t 变化的函数关系).

解 首先,对物体进行受力分析. 该物体所受合力为弹性恢复力,根据虎克定律,$F=-kx$(因为是恢复力,力的方向与位移 x 的方向相反,所以有负号),再根据牛顿第二定律,

$$F=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},$$

于是得 x 所满足的方程:$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx$,即

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+kx=0. \tag{5}$$

由题意有

$$x\big|_{t=0}=x_0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0.$$

若能根据以上条件解出 $x=x(t)$,就可得出该物体的运动规律.

以上两个例子中的方程(1),(5)都是含有未知函数及其导数(包括一阶导数和高阶导数)的方程,这样的方程就称为微分方程.

定义 1 一般地,我们称表示未知函数、未知函数的导数或微分以及自变量之间关系的方程为**微分方程**,称未知函数是一元函数的微分方程为**常微分方程**,未知函数是多元函数的微分方程为**偏微分方程**. 微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数,叫作**微分方程的阶**.

本章我们只讨论常微分方程.

例如,$x^3y'''+x^2y''-4xy'=3x^2$ 是一个三阶微分方程,$y^{(4)}-4y'''+10y''-12y'+5y=\sin 2x$ 是一个四阶微分方程,$y^{(n)}+1=0$ 是一个 n 阶微分方程.

一般地,n 阶微分方程可写成

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \quad 或 \quad y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}),$$

其中 F 是 $n+2$ 个变量的函数. 必须指出,这里 $y^{(n)}$ 是必须出现的,而 $x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}$ 等变量则可以不出现. 例如,二阶微分方程

$$y''=f(x,y')$$

中 y 就没出现.

什么是微分方程的解呢?

定义 2 把满足微分方程的函数(把函数代入微分方程能使该方程成为恒等式)叫作该**微分方程的解**. 确切地说,设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 I 上有 n 阶连续导数,如果在区间 I 上,有

$$F[x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x)]\equiv 0,$$

那么函数 $y=\varphi(x)$ 就叫作微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 在区间 I 上的解. 例如,

$$y=x^2,y=x^2+1,\cdots,y=x^2+C$$

都是方程(1)的解.

值得指出的是，由于解微分方程的过程需要积分，故微分方程的解中有时包含任意常数.

定义 3 如果微分方程的解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶数相同，则称这样的解为该**微分方程的通解**. 例如，$y=x^2+C$（C 为任意常数）就是方程(1)的通解；又如 $y=C_1\cos x+C_2\sin x$（C_1，C_2 为任意常数）是二阶微分方程 $y''+y=0$ 的通解.

在以后的讨论中，除特殊说明外，C，C_1，C_2 等均指任意常数.

定义 4 用于确定通解中任意常数的条件，称为**初始条件**. 如 $x=x_0$ 时，$y=y_0$，$y'=y_1$，或写成 $y\Big|_{x=x_0}=y_0$，$y'\Big|_{x=x_0}=y_1$.

定义 5 确定了通解中的任意常数以后，就得到**微分方程的特解**，即不含任意常数的解. 例如，$y=x^2+1$ 是方程(1)的特解.

定义 6 求微分方程满足初始条件的特解的问题称为微分方程的**初值问题**. 例 1 中，要求

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x\\ y\Big|_{x=1}=2\end{cases}$$

的解就是一个初值问题.

定义 7 微分方程的解的图形是一条曲线，叫作微分方程的**积分曲线**.

例 3 验证函数

$$x=C_1\cos kx+C_2\sin kx \tag{6}$$

是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+k^2x=0\ (k\neq 0) \tag{7}$$

的通解.

证明 求出所给函数(6)的一阶及二阶导数：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-C_1k\sin kt+C_2k\cos kt,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt). \tag{8}$$

把(6)及(8)代入方程(7)，得

$$-k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)+k^2(C_1\cos kt+C_2\sin kt)\equiv 0.$$

因此，函数(6)是方程(7)的解.

又函数(6)中含有两个任意常数，而(7)为二阶微分方程，所以函数(6)是方程(7)的通解.

习题 6-1

1. 指出下列各微分方程的自变量、未知函数、方程的阶数：

(1) $x^2\mathrm{d}y+y^2\mathrm{d}x=0$；　(2) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}+xy=0$；

(3) $t(x')^2-2tx'-t=0$；　(4) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+2x+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=0$；

(5) $\dfrac{\mathrm{d}^4s}{\mathrm{d}t^4}+s=s^4$.

2. 填空题：

(1) $xy''+2y''+x^2y=0$ 是________阶微分方程；

(2) $L\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+R\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\dfrac{Q}{c}=0$ 是________阶微分方程；

(3) 一个二阶微分方程的通解应含有________个任意常数；

(4) 微分方程 $y''-(y')^3=xy-1$ 的通解中有________个互相独立的任意常数.

3. 验证下列函数是否为所给微分方程的解：

(1) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3y=0,y=Cx^{-3}$；　(2) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\dfrac{2\mathrm{d}y}{x\mathrm{d}x}+\dfrac{2y}{x^2}=0,y=C_1x+C_2x^2$；

(3) $y''+k^2y=0,y=C_1\mathrm{e}^{kx}+C_2\mathrm{e}^{-kx}$；　(4) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+w^2y=0,y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x$.

4. 在下列各题给出的微分方程的通解中，按照所给的初始条件确定特解：

(1) $x^2-y^2=C,y\Big|_{x=0}=5$；

(2) $y=C_1\sin(x-C_2),y\Big|_{x=\pi}=1,y'\Big|_{x=\pi}=0$.

5. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程：

(1) 曲线在点 (x,y) 处的切线斜率等于该点横坐标的平方；

(2) 曲线上点 $P(x,y)$ 处的法线与 x 轴的交点为 Q，而线段 PQ 被 y 轴平分.

6. 验证 $y=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$ 是否是方程 $y''-y=0$ 的解. 若是，指出是通解还是特解.

第二节　可分离变量的微分方程

定义 1　如果一个一阶微分方程能写成

$$g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x\ (\text{或写成 } y'=\varphi(x))$$

的形式，即能把微分方程写成一端只含 y 的函数和 $\mathrm{d}y$，另一端只含 x 的函数和 $\mathrm{d}x$，那么原方程就称为**可分离变量的微分方程**.

可分离变量的微分方程的解法：

第一步　分离变量，将方程写成 $g(y)\mathrm{d}y=f(x)\mathrm{d}x$ 的形式；

第二步　两端积分 $\int g(y)\mathrm{d}y=\int f(x)\mathrm{d}x$，设积分后得 $G(y)=F(x)+C$；

第三步　求出由 $G(y)=F(x)+C$ 所确定的隐函数 $y=\Phi(x)$ 或 $x=\psi(y)$.

$G(y)=F(x)+C$，$y=\Phi(x)$ 或 $x=\psi(y)$ 都是方程的通解，其中 $G(y)=F(x)+C$ 称为隐式(通)解.

例 1　求微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy \tag{1}$$

的通解.

分析　解微分方程的第一个步骤是判断方程的类型，然后根据类型选择解法，这是一个可分离变量的方程，故选择上述先分离变量、后积分的解法.

解　此方程为可分离变量方程，分离变量后得

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x(y\neq0).$$

两边积分，得

$$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=\int 2x\mathrm{d}x, \tag{2}$$

即

$$\ln|y|=x^2+C_1, \tag{3}$$

从而

$$y=\pm\mathrm{e}^{x^2+C_1}=\pm\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^2}.$$

因为 $\pm\mathrm{e}^{C_1}$ 仍是任意常数，把它记作 C，又 $y=0$ 也是方程(1)的解，所以方程(1)的通解可表示成

$$y=C\mathrm{e}^{x^2}. \tag{4}$$

为方便，今后我们由(2)式两边积分得

$$\ln y=x^2+\ln C,$$

并由此直接得方程(1)的通解(4).

例 2　铀的衰变速度与当时未衰变的原子的含量 M 成正比. 已知 $t=0$ 时铀的含量为 M_0，求在衰变过程中铀含量 $M(t)$ 随时间 t 变化的规律.

解　铀的衰变速度就是 $M(t)$ 对时间 t 的导数 $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$. 由于铀的衰变速度与其含量成正比，故得微分方程

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=-\lambda M,$$

其中 $\lambda(\lambda>0)$ 是常数，叫作衰变系数，λ 前的负号表示当 t 增加时 M 单调减少，即 $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}<0$. 由题意，初始条件为 $M\Big|_{t=0}=M_0$.

将方程分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}M}{M}=-\lambda \mathrm{d}t,$$

两边积分,得

$$\int \frac{\mathrm{d}M}{M}=\int(-\lambda)\mathrm{d}t,$$

即 $\ln M=-\lambda t+\ln C$,也即 $M=Ce^{-\lambda t}$. 由初始条件,得 $M_0=Ce^0=C$,所以铀含量 $M(t)$ 随时间 t 变化的规律为 $M=M_0e^{-\lambda t}$.

例 3 求微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+x+y^2+xy^2$ 的通解.

解 方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1+x)(1+y^2).$$

分离变量,得

$$\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y=(1+x)\mathrm{d}x.$$

两边积分,得

$$\int \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y=\int(1+x)\mathrm{d}x,$$

即 $\arctan y=\frac{1}{2}x^2+x+C.$

于是,原方程的通解为

$$y=\tan\left(\frac{1}{2}x^2+x+C\right).$$

例 4 求解

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{x}{y}\\ y(0)=1\end{cases}$$

的初值问题.

解 分离变量得 $$y\mathrm{d}y=-x\mathrm{d}x,$$

两边积分 $$\int y\mathrm{d}y=-\int x\mathrm{d}x,$$

得 $$\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+C_1.$$

方程的通解为 $$x^2+y^2=C.$$

将 $y(0)=1$ 代入通解得 $C=1$,即所求的特解为

$$x^2+y^2=1.$$

例 5 某公司 t 年净资产有 $W(t)$（百万元），并且资产本身以每年 5% 的速度连续增长，同时该公司每年要以 30 百万元的数额连续支付职工工资.

(1) 给出描述净资产 $W(t)$ 的微分方程；

(2) 求方程的解，假设初始净资产为 W_0；

(3) 讨论在 $W_0=500,600,700$ 三种情况下，$W(t)$ 变化的特点.

解 (1)利用平衡法，即由

净资产增长速度=资产本身增长速度－职工工资支付速度

建立微分方程

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=0.05W-30.$$

(2) 分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}W}{0.05W-30}=\mathrm{d}t.$$

两边积分得

$$\ln|W-600|=0.05t+\ln C_1.$$

化简得方程的通解为

$$W=C\mathrm{e}^{0.05t}+600.$$

将 $t=0,W=W_0$ 代入得方程的特解为

$$W=600+(W_0-600)\mathrm{e}^{0.05t}.$$

(3) 当 $W_0=500$ 时，$W_0-600<0$，净资产额将按指数逐渐减少；当 $W_0=600$ 时，$W_0-600=0$，公司收支平衡，资产保持在 600 万元不变；当 $W_0=700$ 时，$W_0-600>0$，公司净资产将按指数逐渐增大.

习题 6-2

1. 求下列微分方程的通解：

(1) $xy'-y\ln y=0$；

(2) $3x^2+5x-5y'=0$；

(3) $y'=\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$；

(4) $\sec^2x\tan y\mathrm{d}x+\sec^2y\tan x\mathrm{d}y=0$；

(5) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=10x+y$；

(6) $(\mathrm{e}^{x+y}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=0$；

(7) $\cos x\sin y\mathrm{d}x+\sin x\cos y\mathrm{d}y=0$；

(8) $y\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y=0$.

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

(1) $y'=\mathrm{e}^{2x-y},y\Big|_{x=0}=0$；

(2) $y'\sin x=y\ln y,y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\mathrm{e}$;

(3) $\cos y\mathrm{d}x+(1+\mathrm{e}^{-x})\sin y\mathrm{d}y=0,y\Big|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$;

(4) $x\mathrm{d}y+2y\mathrm{d}x=0,y\Big|_{x=2}=1$.

3. 质量为 1 g 的质点受外力作用做直线运动,外力和时间成正比,和质点运动的速度成反比.在 $t=10$ s 时,速度等于 50 cm/s,外力为 4 g·cm/s^2.问从运动开始经过了1 min 后质点的速度是多少?

4. 镭的衰变有如下的规律:镭的衰变速度与它的现存量 R 成正比.由经验材料得知,镭经过 1 600 年后,只余原始量 R_0 的一半.试求镭的量 R 与时间 t 的函数关系.

5. 一曲线通过点(2,3),它在两坐标轴间的任一切线线段均被切点所平分,求这条曲线的方程.

第三节　齐次方程

定义　如果一阶微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$中的函数 $f(x,y)$可写成$\dfrac{y}{x}$的函数,即$f(x,y)=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$,则称方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$为**齐次方程**.

下列方程中哪些是齐次方程?

(1) $xy'-y-\sqrt{y^2-x^2}=0$ 是齐次方程,因为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y+\sqrt{y^2-x^2}}{x}\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}+\sqrt{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-1}$.

(2) $\sqrt{1-x^2}y'=\sqrt{1-y^2}$不是齐次方程,因为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}$.

(3) $(x^2+y^2)\mathrm{d}x-xy\mathrm{d}y=0$ 是齐次方程,因为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x^2+y^2}{xy}\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$.

(4) $(2x+y-4)\mathrm{d}x+(x+y-1)\mathrm{d}y=0$ 不是齐次方程,因为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{2x+y-4}{x+y-1}$.

齐次方程的解法:

在齐次方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$中,令 $u=\dfrac{y}{x}$,则 $y=ux,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,所以有

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u),$$

分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两端积分,得

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

求出积分后，再用$\frac{y}{x}$代替u，即得所给齐次方程的通解.

例 1 解方程 $y^2+x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 原方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{xy-x^2}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}-1}.$$

因此，原方程是齐次方程. 令$\frac{y}{x}=u$，则 $y=ux$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，于是原方程变为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u^2}{u-1},$$

即

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u}{u-1},$$

分离变量，得

$$\left(1-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

两边积分，得

$$u-\ln u+C=\ln x \text{ 即 } \ln xu=u+C.$$

以$\frac{y}{x}$代替上式中的u，得原方程的通解

$$\ln y=\frac{y}{x}+C.$$

例 2 求微分方程$(y+\sqrt{x^2-y^2})\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0(x>0)$的通解.

解 由原方程得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y+\sqrt{x^2-y^2}}{x}$，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

这是齐次方程.

令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=ux$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，于是原方程变为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u+\sqrt{1-u^2}\text{，即}\quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1-u^2}.$$

这是一个可分离变量的微分方程. 分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

两边积分得 $$\arcsin u=\ln x+C.$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入,得原方程的通解为

$$\arcsin\frac{y}{x}=\ln x+C.$$

对于齐次方程,我们通过变量代换 $y=xu$,把它化为可分离变量的方程,然后分离变量,经积分求得通解. 变量代换的方法是解微分方程最常用的方法. 这就是说,求解一个不能分离变量的微分方程,常要考虑寻求适当的变量代换(因变量的变量代换或自变量的变量代换),使它化为变量可分离的方程. 下面仅举一个例子.

例 3 求解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x+y}.$$

解 令 $x+y=u$,则 $y=u-x$,$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1$. 于是

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-1=\frac{1}{u},$$

即 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}+1=\frac{u+1}{u}.$$

分离变量得

$$\frac{u}{u+1}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x,$$

积分得 $$u-\ln(u+1)=x-\ln C.$$

将 $u=x+y$ 代入,得

$$y-\ln(x+y+1)=-\ln C,$$

即 $$x=C\mathrm{e}^y-y-1.$$

例 4 求微分方程 $x(\ln x-\ln y)\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$ 的通解,并解其初值问题 $y(1)=1$.

解 原方程化简为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{y}{x}}{\ln\frac{y}{x}}.$$

令 $u=\frac{y}{x}$,则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

代入原方程得

$$\frac{\ln u}{u(\ln u+1)}\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

两边积分得

$$\ln u-\ln(\ln u+1)=-\ln x+\ln C,$$

将变量回代得通解

$$y=C\left(\ln\frac{y}{x}+1\right).$$

将 $y(1)=1$ 代入上式得

$$C=1,$$

故所求问题的特解为

$$y=\ln\frac{y}{x}+1.$$

习题 6-3

1. 求下列齐次方程的通解:

(1) $xy'-y-\sqrt{y^2-x^2}=0$;　　(2) $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\ln\frac{y}{x}$;

(3) $(x^2+y^2)\mathrm{d}x-xy\mathrm{d}y=0$;　　(4) $(1+2e^{\frac{x}{y}})\mathrm{d}x+2e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)\mathrm{d}y=0$.

2. 求下列齐次方程满足所给初始条件的特解:

(1) $(y^2-3x^2)\mathrm{d}y+2xy\mathrm{d}x=0, y\big|_{x=0}=1$;

(2) $(x+2y)y'=y-2x, y\big|_{x=1}=1$.

3. 用适当的变量代换将下列方程化为可分离变量的方程,然后求出通解:

(1) $y'=(x+y)^2$;　　(2) $y'=\frac{1}{x-y}+1$;　　(3) $xy'+y=y(\ln x+\ln y)$.

第四节　一阶线性微分方程

定义　形如$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$的微分方程,称为**一阶线性微分方程**. 线性是指方程关于未知函数 y 及其导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$都是一次的,称 $Q(x)$ 为**非齐次项**或**右端项**,如果 $Q(x)\equiv0$,则称