



2019^年 李正元·范培华

考研数学 ②

数学

数学三

历年试题解析

● 主编 北京大学 范培华
北京大学 尤承业
北京大学 李正元

20年经典传承 百万考生推荐

名师全程亲自答疑 扫描二维码互动交流

扫码听课 (价值199元) 免费赠送

双色印刷 重点突出



扫码听课



中国政法大学出版社



2019 年李正元·范培华考研数学②

数学

数学三

历年试题解析

主编 北 京 大 学 范培华
北 京 大 学 尤承业
北 京 大 学 李正元



中国政法大学出版社

2018 · 北京

- 声 明
1. 版权所有, 侵权必究。
 2. 如有缺页、倒装问题, 由出版社负责退换。

图书在版编目(CIP)数据

2019 年李正元·范培华考研数学数学历年试题解析. 数学三/李正元, 尤承业, 范培华主编. —北京: 中国政法大学出版社, 2018. 1

ISBN 978-7-5620-7966-8

I. ①2… II. ①李… ②尤… ③范… III. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 IV. ①013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 324907 号

出 版 者	中国政法大学出版社
地 址	北京市海淀区西土城路 25 号
邮寄地址	北京 100088 信箱 8034 分箱 邮编 100088
网 址	http://www.cuplpress.com (网络实名: 中国政法大学出版社)
电 话	010-58908285(总编室) 58908433(编辑部) 58908334(邮购部)
承 印	三河市人民印务有限公司
开 本	787mm×1092mm 1/16
印 张	23.5
字 数	570 千字
版 次	2018 年 1 月第 1 版
印 次	2018 年 1 月第 1 次印刷
定 价	65.80 元

前言

(一)

对于数学考试而言,试卷本身就是一份量表,它是《数学考试大纲》规定的考试内容和考试要求的具体体现。全国硕士研究生数学招生考试统考试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶,是一份宝贵的资料。每一道试题,既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求,又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势,因此,对照《数学考试大纲》分析、研究这些试题不仅可以展示出统考以来数学考试的全貌,便于广大考生了解有关试题和信息,从中发现规律,归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型,进一步把握考试的特点及命题的思路和规律,而且通过反复做历年试题,发现问题,找出差距,以便广大考生能及时查漏补缺,通过研究历年试题,也便于广大考生明确复习方向,从而从容应考,轻取高分。

(二)

本书汇集了2004年~2018年全国硕士研究生招生统考数学三试题,而且对所有试题均给出了详细解答,并尽量做到一题多解。有很多试题的解法是我们几位编者从事教学和考研辅导研究总结出来的,具有独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更省时省力。本书在对历年考研数学试题逐题解答的基础上,每题都给出了分析或评注,不仅对每题所考知识点或难点进行了分析,而且对各种题型的解法进行了归纳总结,使考生能举一反三,触类旁通;同时通过具体试题,指出了考生在解题过程中出现的有关问题和典型错误,并点评错因,提醒考生引以为戒。

本书把历年考研数学三试题依据考试大纲的顺序,按试题考查内容分章,这样与考生复习数学的顺序保持一致,便于考生系统复习使用。每章按以下内容编写:

编者按——总体说明历年试题在本章所考查的重要知识点、常考题型及所占总分比例,便于考生在宏观上把握重点。

题型分类解析——将历年同一内容的试题归纳在一起,并进行详细解答。这样便于考生复习该部分内容时了解到:该内容考过什么样的题目,是从哪个角度来命题的,并常与哪些知识点联系起来命题等等,从而能让广大考生掌握考研数学试题的广度和深度,并

在复习时能明确目标,做到心中有数。同时把历年同一内容的试题放在一起,能让广大考生抓住近几年考题与往年考题的某种特殊联系(类似或雷同),并且能清楚地查出哪些知识点还未命题考查。另外,为了帮助考数学三的考生更全更好地了解相关内容的命题情况,本书精选了数学一、二及原数学四相关内容的典型考题(含解答),同时也精选了2001年(含)以前数学三相关内容的典型考题(含解答),供将要备考数学三的考生参考并复习之用。因此本书这种独特编排体例有助于广大考生科学备考。

综述——每种题型后都归纳总结该题型解题思路、方法和技巧,并举例说明。

(三)

本书给准备报考研究生的考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会。编者建议准备报考研究生的考生在阅读本书时,应先看《数学考试大纲》,以便明确考试的有关要求,接着去认真阅读有关教材和参考书(推荐考生认真阅读由中国政法大学出版社出版的《考研数学复习全书(数学三)》,该书对考试大纲中所要求的基本概念、基本公式、基本定理讲解详细,各类题型的解题思路、方法和技巧归纳到位,与考研命题思路较吻合),复习完后,再来看本书的试题,以检验自己的水平。在看本书试题时,应该先自己动手做题,然后将自己所得的结果与本书的解法加以比较,看哪些自己做对了,哪些自己做错了,为什么会做错,可以与你的同学、同事和老师研讨。建议考生把本书中的全部试题做2~3遍,直到对所有的题目一见到就能够熟练地、正确地解答出来的程度。

本书在编写、编辑和出版过程中,尽管我们抱着对广大考生认真负责的精神,高质量、严要求,但由于时间紧、任务重,加上我们水平有限,难免有许多不足、不尽人意之处。敬请广大读者和专家同行不吝赐教、批评指正。

祝广大考生复习顺利,考研成功!

编者

2018年1月

目 录

第一篇 2018 年考研数学三试题及答案与解析

2018 年考研数学三试题	(1)
2018 年考研数学三试题答案与解析	(3)

第二篇 2004 ~ 2017 年考研数学三试题

2017 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(14)
2016 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(17)
2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(21)
2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(25)
2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(29)
2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(33)
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(37)
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(41)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(45)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(50)
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(54)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(58)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(62)
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题	(66)

第三篇 2004 ~ 2017 年考研数学三试题分类解析

第一部分 微积分	(72)
第一章 函数 极限 连续	(72)
第二章 一元函数微分学	(98)
第三章 一元函数积分学	(138)

第四章	多元函数微积分学	(162)
第五章	无穷级数	(199)
第六章	常微分方程与差分方程	(219)
第二部分	线性代数	(231)
第一章	行列式	(231)
第二章	矩阵	(238)
第三章	向量	(250)
第四章	线性方程组	(264)
第五章	矩阵的特征值与特征向量 n 阶矩阵的相似与相似对角化	(280)
第六章	二次型	(296)
第三部分	概率论与数理统计	(308)
第一章	随机事件和概率	(308)
第二章	随机变量及其分布	(316)
第三章	多维随机变量的分布	(324)
第四章	随机变量的数字特征	(348)
第五章	大数定律和中心极限定理	(355)
第六章	数理统计的基本概念	(357)
第七章	参数估计	(361)

第一篇 2018 年考研数学三试题及答案与解析

2018 年考研数学三试题

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 下列函数中,在 $x = 0$ 处不可导的是

- (A) $f(x) = |x| \sin |x|$, (B) $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$,
(C) $f(x) = \cos |x|$, (D) $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$. 【 】

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导,且 $\int_0^1 f(x) dx = 0$, 则

- (A) 当 $f'(x) < 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$. (B) 当 $f''(x) < 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.
(C) 当 $f'(x) > 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$. (D) 当 $f''(x) > 0$ 时, $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$. 【 】

(3) 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$, $K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx$, 则

- (A) $M > N > K$. (B) $M > K > N$.
(C) $K > M > N$. (D) $K > N > M$. 【 】

(4) 设某产品的成本函数 $C(Q)$ 可导,其中 Q 为产量.若产量为 Q_0 时平均成本最小,则

- (A) $C'(Q_0) = 0$. (B) $C'(Q_0) = C(Q_0)$.
(C) $C'(Q_0) = Q_0 C(Q_0)$. (D) $Q_0 C'(Q_0) = C(Q_0)$. 【 】

(5) 下列矩阵中与矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 相似的为

- (A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,
(C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 【 】

(6) 设 A, B 为 n 阶矩阵,记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩, (X, Y) 表示分块矩阵,则

- (A) $r(A, AB) = r(A)$. (B) $r(A, BA) = r(A)$.
(C) $r(A, B) = \max\{r(A), r(B)\}$. (D) $r(A, B) = r(A^T B^T)$. 【 】

(7) 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 且 $\int_0^2 f(x) dx = 0.6$, 则 $P\{X < 0\} =$

- (A) 0.2. (B) 0.3. (C) 0.4. (D) 0.5. 【 】

(8) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2) (\sigma > 0)$ 的简单随机样本, 令 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S =$

$$\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, S^* = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}, \text{ 则}$$

(A) $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n).$

(B) $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1).$

(C) $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S^*} \sim t(n).$

(D) $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S^*} \sim t(n-1).$

【 】

二、填空题: 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲线 $y = x^2 + 2\ln x$ 的其拐点处的切线方程是_____.

(10) $\int e^x \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}} dx =$ _____.

(11) 差分方程 $\Delta^2 y_x - y_x = 5$ 的通解是_____.

(12) 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x + \Delta x) - f(x) = 2xf(x)\Delta x + o(\Delta x) (\Delta x \rightarrow 0)$, 且 $f(0) = 2$, 则 $f(1) =$ _____.

(13) 设 A 为 3 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的向量组, 若 $A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2, A\alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_3$, 则 $|A| =$ _____.

(14) 随机事件 A, B, C 相互独立, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, 则 $P(AC | A \cup B) =$ _____.

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

已知实数 a, b 满足 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(ax + b)e^{\frac{1}{x}} - x] = 2$, 求 a, b .

(16) (本题满分 10 分)

设平面区域 D 由曲线 $y = \sqrt{3(1-x^2)}$ 与直线 $y = \sqrt{3}x$ 及 y 轴围成, 计算二重积分 $\iint_D x^2 dx dy$.

(17) (本题满分 10 分)

将长为 2m 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形, 三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在, 求出最小值.

(18) (本题满分 10 分)

已知 $\cos 2x - \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n (-1 < x < 1)$, 求 a_n .

(19) (本题满分 10 分)

设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1 (n = 1, 2, \dots)$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(20) (本题满分 11 分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$, 其中 a 是参数.

(I) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解;

(II) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.

(21)(本题满分11分)

已知 a 是常数, 且矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{bmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(I) 求 a ;

(II) 求满足 $AP = B$ 的可逆矩阵 P .

(22)(本题满分11分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P\{X=1\} = P\{X=-1\} = \frac{1}{2}$, Y 服从参数为 λ 的泊松分布. 令 $Z = XY$.

(I) 求 $\text{cov}(X, Z)$;

(II) 求 Z 的概率分布.

(23)(本题满分11分)

设总体的概率密度为

$$f(x, \sigma) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

其中 $\sigma \in (0, +\infty)$ 为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本. 记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

(I) 求 $\hat{\sigma}$;

(II) 求 $E\hat{\sigma}$ 和 $D\hat{\sigma}$.

2018 年考研数学三试题答案与解析

一、选择题

(1)【分析】 按定义考察 $f(x)$ 在 $x=0$ 的可导性, 即考察 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ 是否存在.

方法一 考察(D).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \sqrt{|x|} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}|x|}{x} \text{ 不 } \exists$$

$$\text{因为 } \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-\frac{1}{2}|x|}{x} = -\frac{1}{2}, \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-\frac{1}{2}|x|}{x} = \frac{1}{2}, f'_+(0) \neq f'_-(0), f'(0) \text{ 不 } \exists.$$

因此选(D).

方法二 考察(A), (B), (C).

$$(A): f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| \sin |x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

$$(B): f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| \sin \sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{|x|}{x} \cdot \sin \sqrt{|x|} \right) = 0$$

$$(C): f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos |x| - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x} = 0$$

因此选(D).

(2)【分析一】 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导,有泰勒公式

$$f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \quad (x \in [0,1])$$

其中 ξ 在 x 与 $\frac{1}{2}$ 之间. 在 $[0,1]$ 上取积分得

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 f\left(\frac{1}{2}\right) dx + \int_0^1 f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) dx + \frac{1}{2} \int_0^1 f''(\xi)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \\ \Rightarrow 0 &= f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 f''(\xi)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \\ \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{2} \int_0^1 f''(\xi)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \end{aligned}$$

$$\text{当 } f''(x) > 0 (x \in [0,1]) \Rightarrow f''(\xi) > 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

因此选(D).

【分析二】 令 $f(x) = 2x - 1$, 则 $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (2x - 1) dx = 0$, $f'(x) = 2 > 0$, 但 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 于是排除(C).

令 $f(x) = -2x + 1$, 则 $\int_0^1 f(x) dx = 0$, $f'(x) = -2 < 0$, 但 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 于是排除(A).

令 $f(x) = -3x^2 + 1$, 则 $\int_0^1 f(x) dx = -x^3 \Big|_0^1 + 1 = 0$, $f''(x) = -6 < 0$, 但 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} + 1 = \frac{1}{4} > 0$, 于是排除(B).

因此选(D).

(3)【分析】 这是同一区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上比较三个定积分, 其被积函数均连续, 这只需比较被积函数.

先利用奇偶函数在对称区间上定积分性质, 简化

$$M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x}{1+x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx$$

现只须在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上比较三个函数

$$1, 1 + \sqrt{\cos x}, \frac{1+x}{e^x}$$

$$\text{易知 } 1 < 1 + \sqrt{\cos x} \quad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx = K$$

下面证明: $\frac{1+x}{e^x} < 1 \quad \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], x \neq 0\right)$.

$$\Leftrightarrow e^x > 1+x \Leftrightarrow f(x) = e^x - x - 1 > 0$$

$$\text{方法一} \quad \text{令 } f(x) = e^x - x - 1 \Rightarrow f'(x) = e^x - 1 \Rightarrow f''(x) = e^x > 0 \Rightarrow f'(x) \begin{cases} < 0 (x < 0) \\ = 0 (x = 0) \\ > 0 (x > 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) > f(0) = 0 \quad (x \neq 0).$$

方法二 令 $f(x) = e^x - x - 1$, 用泰勒公式

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2, \quad (\xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}) \\ &= \frac{1}{2}e^\xi > 0 \end{aligned}$$

方法三 直接考察 $g(x) = \frac{1+x}{e^x}$ 的单调性.

$$g'(x) = \frac{e^x - (1+x)e^x}{e^{2x}} = \frac{-x}{e^x} \begin{cases} > 0 & (x < 0) \\ = 0 & (x = 0) \\ < 0 & (x > 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) < g(0) = 1 \quad (x \neq 0).$$

$$\text{由于 } \frac{1+x}{e^x} < 1 \quad \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], x \neq 0\right).$$

$$\Rightarrow N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = M$$

因此 $K > M > N$

选(C).

$$(4) \text{【分析】} \quad \text{平均成本 } \bar{C}(Q) = \frac{C(Q)}{Q}, \quad \bar{C}'(Q) = \frac{QC'(Q) - C(Q)}{Q^2}$$

$$\text{由题设知} \quad Q_0 C'(Q_0) - C(Q_0) = 0,$$

故应选(D).

$$(5) \text{【分析】} \quad \text{设 } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. A \text{ 和各选项中的矩阵都不相似于对角矩阵. 对这样的两个矩阵, 要}$$

判定它们相似没有有效的方法, 而判定它们不相似是有办法的. 因此本题采用排除法较好.

工具: 相似的矩阵秩相等. 若 A 相似于 B , 则 $A - E$ 相似于 $B - E$, 从而 $r(A - E) = r(B - E)$.

$$A - E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad r(A - E) = 2.$$

而当 B 取(B), (C), (D) 中的任一矩阵时 $r(B - E) = 1$. 从而(B), (C), (D) 都排除, 故选(A).

(6)【分析】 方法一 一方面, A 是 (A, AB) 的子矩阵, 因此 $r(A, AB) \geq r(A)$.

另一方面, (A, AB) 是 $A, (E, B)$ 的乘积: $(A, AB) = A(E, B)$

因此 $r(A, AB) \leq r(A)$, 得 $r(A, AB) = r(A)$.

方法二 矩阵的秩就是其列向量组的秩. 设

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n), AB = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n).$$

$$\text{则 } \gamma_i = A\beta_i = b_{1i}\alpha_1 + b_{2i}\alpha_2 + \dots + b_{ni}\alpha_n$$

从而 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ 可以用 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示,

$$r(A, AB) = r(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma_1, \dots, \gamma_n) = r(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = r(A).$$

选(A).

评注 本题也可用排除法.

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, r(A) = 1$$

$$\text{若 } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$r(A, BA) = r \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 > r(A), \text{ 排除 (B).}$$

$$r(A, B) = 2, \max\{r(A), r(B)\} = 1, \text{ 排除 (C).}$$

$$\text{若 } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 则 } r(A, B) = r(A) = 1, r(A^T B^T) = 0.$$

排除 (D).

(7)【分析】 由 $f(1+x) = f(1-x)$, 可知函数 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称.

$$\text{故 } P\{X < 0\} = P\{X > 2\}.$$

$$\begin{aligned} \text{又 } 1 &= P\{-\infty < X < +\infty\} = P\{X < 0\} + P\{0 < X < 2\} + P\{X > 2\} \\ &= 2P\{X < 0\} + 0.6 \end{aligned}$$

$$\text{所以 } P\{X < 0\} = 0.2.$$

故选 (A).

$$(8)【分析】 X \sim N(\mu, \sigma^2), \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \text{ 与 } \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \text{ 相互独立, 且 } \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

$$\text{所以 } \frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} / (n-1)}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1)$$

故应选 (B).

二、填空题

(9)【分析】 先求拐点.

$$y = x^2 + 2\ln x \quad (x > 0)$$

$$y' = 2x + \frac{2}{x}, y'' = 2 - \frac{2}{x^2} = \frac{2(x^2 - 1)}{x^2}$$

由此得唯一拐点 $(1, 1)$.

当 $x=1$ 时 $y'(1) = 4$, 于是拐点处切线方程为

$$y = 1 + 4(x - 1)$$

$$\text{即 } y = 4x - 3.$$

$$(10)【分析一】 \int e^x \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}} = \int \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}} d e^x$$

$$= e^x \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}} - \int e^x \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - e^{2x})}} \cdot \frac{-2e^{2x}}{2\sqrt{1 - e^{2x}}} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= e^x \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}} + \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx \\
 &= e^x \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}} - \sqrt{1 - e^{2x}} + c
 \end{aligned}$$

【分析二】 用换元积分法. 令 $e^x = \cos t$,

$$\begin{aligned}
 \int e^x \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}} dx &= \int \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}} d e^x \\
 &= \int \arcsin \sin t d \cos t = \int t d \cos t \\
 &= t \cos t - \int \cos t dt = t \cos t - \sin t + c \\
 &= e^x \arccos e^x - \sqrt{1 - e^{2x}} + c
 \end{aligned}$$

(11) 【分析】 由于 $\Delta^2 y_x = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x$

所以原方程化为 $y_{x+2} - 2y_{x+1} = 5$. 同解方程为 $y_{x+1} - 2y_x = 5$.

对应齐次方程通解为 $y_x = c \cdot 2^x$

由于 $a+1 \neq 0$. 设非齐次方程特解为 $y_x^* = B$, 代入方程得 $B = -5$.

故方程通解为 $y_x = c \cdot 2^x - 5$, c 为任意常数.

(12) 【分析】
$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 2xf(x) + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

令 $\Delta x \rightarrow 0$, 等式两边取极限, 根据导数定义可得 $f'(x) = 2xf(x)$

这是一阶线性齐次微分方程 $y' = 2xy$, $\frac{dy}{y} = 2x dx$, $y = ce^{x^2}$

由于 $y(0) = 2$, 得 $c = 2$, 即 $y = 2e^{x^2}$

故 $f(1) = 2e$.

(13) 【分析】
$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3)$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

两边取行列式:

$$|A| \cdot |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = |\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| \neq 0$, 所以

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

(14) 【分析】
$$\begin{aligned}
 P(AC | A \cup B) &= \frac{P[(A \cup B) \cap (AC)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(AC \cup ABC)}{P(A) + P(B) - P(AB)} \\
 &= \frac{P(AC) + P(ABC) - P(ABC)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{P(A)P(C)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

三、解答题

(15)【分析与求解】 作变量替换, 令 $\frac{1}{x} = t$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $t \rightarrow 0^+$

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(a + \frac{b}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(a + bt)e^t - 1}{t} = 2$$

由于分母 $t \rightarrow 0^+$, 故必有 $\lim_{t \rightarrow 0^+} [(a + bt)e^t - 1] = 0$, 从而可知 $a = 1$.

$$\text{又} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1 + bt)e^t - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^t - 1}{t} + be^t \right) = 1 + b = 2$$

得 $b = 1$.

(16)【分析与求解】 由 $\sqrt{3(1-x^2)} = \sqrt{3}x$, 得曲线与直线的交点 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ($x < 0$ 舍去)

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(x^2 \int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{3(1-x^2)}} dy \right) dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2 (\sqrt{3(1-x^2)} - \sqrt{3}x) dx \\ &= \sqrt{3} \left[\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2 \sqrt{1-x^2} dx - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^3 dx \right] = \sqrt{3} I_1 - \frac{\sqrt{3}}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2 \sqrt{1-x^2} dx \stackrel{x = \sin t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t \cos^2 t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} \sin^2 2t dt = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u du \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2u}{2} du = \frac{\pi}{32}. \end{aligned}$$

$$\text{故原式} = \sqrt{3} \left(\frac{\pi}{32} - \frac{1}{16} \right) = \frac{\sqrt{3}}{32} (\pi - 2).$$

(17)【分析与求解】 设圆的半径为 x , 正方形边长为 y , 正三角形边长为 z (高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}z$). 按题意,

$$2\pi x + 4y + 3z = 2 \text{ (m)}$$

这三个图形的面积和为 $\pi x^2 + y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}z^2$.

问题变成了: 求 $f(x, y, z) = \pi x^2 + y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}z^2$ 在 $2\pi x + 4y + 3z = 2$ 条件下的最小值.

用拉格朗日乘子法, 令

$$F(x, y, z, \lambda) = \pi x^2 + y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}z^2 + \lambda(2\pi x + 4y + 3z - 2)$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2\pi x + 2\pi\lambda = 0 & \text{①} \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 4\lambda = 0 & \text{②} \\ \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\sqrt{3}}{2}z + 3\lambda = 0 & \text{③} \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 2\pi x + 4y + 3z - 2 = 0 & \text{④} \end{cases}$$

②式乘 $\frac{\pi}{2}$ 与①比较得 $2x = y$, ③式乘 $\frac{2}{3}\pi$ 与①比较得 $2\sqrt{3}x = z$, 代入④式得

$$2\pi x + 8x + 6\sqrt{3}x = 2, \quad x = \frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{2}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}, \quad z = \frac{2\sqrt{3}}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$$

相应的

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \frac{\pi}{(\pi + 4 + 3\sqrt{3})^2} + \frac{4}{(\pi + 4 + 3\sqrt{3})^2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4 \times 3}{(\pi + 4 + 3\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

由实际问题可知, 最小值一定存在, 且最小值为 $\frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$.

评注 若只围成圆, 则圆半径为 $\frac{1}{\pi}$, 面积为 $\frac{1}{\pi}$, 若只围成正方形, 边长为 $\frac{1}{2}$, 面积为 $\frac{1}{4}$, 若只围成三角形, 边长为 $\frac{2}{3}$, 面积为 $\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

$$\frac{1}{\pi} > \frac{1}{4} > \frac{1}{3\sqrt{3}} > \frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}.$$

(18)【分析与求解】 先对函数 $\cos 2x$ 与 $\frac{1}{(1+x)^2}$ 作幂级数展开, 然后分析并合并同次幂的系数得到 a_n .

当 $x \in (-1, 1)$ 时,

$$\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{(1+x)^2} &= \left(\frac{1}{1+x} \right)' = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) x^n \end{aligned}$$

故

$$\cos 2x - \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) x^n.$$

第一个展开式中只含 x 的偶次幂, 第二个展开式中有 x 的偶次幂和奇次幂, 所以应分别讨论 n 的奇偶性.

当 n 为奇数时, $a_n = n + 1$

当 n 为偶数时, $a_n = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2^n}{n!} - (n + 1)$.

(19) 【分析与求解】 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \exists$, 则 $ae^a = e^a - 1, a = 0$ 是解, 我们猜想 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 由于 $x_1 > 0$, 我们猜想应该证明: $x_n > 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 且 x_n 单调下降.

先证 $x_n > 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$.

$$\text{由 } x_1 > 0, x_{n+1} = \ln\left(\frac{e^{x_n} - 1}{x_n}\right)$$

当 $x_n > 0$ 时, $e^{x_n} - 1 > x_n \Rightarrow \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} > 1 \Rightarrow x_{n+1} > 0$ 于是由归纳法得 $x_n > 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$.

再证 $x_n \searrow$.

$$\text{考察 } x_{n+1} - x_n = \ln\left(\frac{e^{x_n} - 1}{x_n}\right) - \ln(e^{x_n}) = \ln\left(\frac{e^{x_n} - 1}{x_n e^{x_n}}\right)$$

令 $f(x) = xe^x - e^x + 1 (x > 0) \Rightarrow f'(x) = xe^x > 0 (x > 0) \Rightarrow f(x) > f(0) = 0 (x > 0)$, 即 $xe^x > e^x - 1, \frac{e^x - 1}{xe^x} < 1 (x > 0)$, 于是 $\frac{e^{x_n} - 1}{x_n e^{x_n}} < 1, x_{n+1} - x_n < 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$, 因此 $x_n \searrow$.

因此 x_n 单调下降有下界(零), $\Rightarrow \exists$ 极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \stackrel{\text{记}}{=} a.$$

最后求出 a .

$$\text{在方程 } x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$$

中, 令 $n \rightarrow \infty$ 取极限得

$$ae^a = e^a - 1.$$

前面已证: $f(a) = ae^a - e^a + 1$ 在 $[0, +\infty)$ 单调上, 故只能有唯一零点, 即 $a = 0$. 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

$$(20) \text{ 【分析与求解】 } (1) f(x_1, x_2, x_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + ax_3 = 0. \end{cases}$$

解此齐次方程组:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-2 \end{bmatrix}.$$

若 $a \neq 2$, 此齐次方程只有零解, 即只当 $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 时 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$.

若 $a = 2$, 此齐次方程组与 $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 同解, 通解为 $c(2, 1, -1)^T, c$ 任意.

即 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的条件为 $x_1 = 2c, x_2 = c, x_3 = -c, c$ 任意.

(2) 当 $a \neq 2$ 时, 则当 $(x_1, x_2, x_3)^T \neq 0$ 时 $f(x_1, x_2, x_3) > 0$, 即 f 正定, 规范形为 $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

当 $a = 2$ 时, 因为 $f(x_1, x_2, x_3) \geq 0$, 因此负惯性指数为 0. 从而正惯性指数 = f 的秩.

$$\begin{aligned} f &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + 2x_3)^2 \\ &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + bx_3^2 - 2x_1x_2 + bx_1x_3, \end{aligned}$$