全国高等农林院校"十三五"规划教材

高等数学学习指导

吕振环　刘宪敏　关　驰　主编

中国农业出版社

全国高等农林院校“十三五”规划教材

高等数学学习指导

吕振环 刘宪敏 关 驰 主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导 / 吕振环，刘宪敏，关驰主编．
—北京：中国农业出版社，2016.7（2017.7 重印）
全国高等农林院校“十三五”规划教材
ISBN 978－7－109－21820－8

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①吕…　②刘…　③关…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 158070 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区麦子店街 18 号楼）
（邮政编码 100125）
策划编辑　魏明龙
文字编辑　魏明龙

北京万友印刷有限公司印刷　　新华书店北京发行所发行
2016 年 8 月第 1 版　　2017 年 7 月北京第 2 次印刷

开本：787mm×1092mm　1/16　　印张：15.75
字数：378 千字
定价：30.00 元

内 容 提 要

本书是为配合惠淑荣、李喜霞主编的《高等数学》(第四版)教材编写的指导书．全书共分十章，每章均由教学基本要求、主要内容总结、重点内容拓展、教材习题解析和自测题解析五个部分组成．本书对每章的主要概念和基本理论都做了系统的概括和总结，着重讨论重点题型及其解法，并对教材中的所有习题、自测题进行详尽地分析和解答，以提高学生分析问题和解决问题的能力．

本书可作为高等农林院校师生的教学参考书，也可作为学生考研的复习用书．

编审人员名单

主　编　吕振环　刘宪敏　关　驰
副主编　陶桂洪　宋　贽
参　编　郭志鹏　郭金亭　刘　波
主　审　惠淑荣

【前　言】

高等数学是高等院校学生的必修课，是学习各类专业课的重要基础，数学课是公认的理论不易掌握、解题比较困难的课程．在这门课程的学习中，通过习题解析的方式可以帮助和引导学生正确理解知识点，准确掌握理论内容．

大多数初学者对高等数学知识的理解会有些偏差，解题时没有思路，不得要领，在应用惠淑荣、李喜霞主编的《高等数学》(第四版)教材学习的过程中，经常有学生反映希望得到该书中的所有习题的详解，为此，我们总结多年教学经验，编写了这本《高等数学学习指导》．

本书共分十章，每章分为教学基本要求、主要内容总结、重点内容拓展、教材习题解析及自测题解析五个部分．其中，教学基本要求部分是对每章内容要求学生学习、掌握程度的说明；主要内容总结部分是对各章的主要知识点进行了归纳和总结，便于学生记忆；重点内容拓展部分，精选了各章中相应知识点的基本训练题和不同层次的考研题，附有详细的解答过程；教材习题解析及自测题解析两部分与惠淑荣、李喜霞主编的《高等数学》(第四版)一书配套．书中“※”号习题是有关经济学的内容．

本书不仅对教师和正在学习此课的学生有极大的辅助作用，而且对准备考研的考生和科技工作者也有一定的参考价值．

本书由沈阳农业大学惠淑荣教授策划、主审，编写过程中得到了沈阳农业大学有关人士的大力支持和帮助，在此一并表示最诚挚的谢意！

书中不妥之处，恳请各位同仁及读者批评指正．

编　者

2015年10月

目　录

前言

第一章　函数、极限与连续

一、教学基本要求

1. 理解函数的概念．
2. 掌握函数的单调性、周期性和奇偶性．
3. 了解反函数的概念．
4. 熟练掌握基本初等函数的性质和复合函数的概念．
5. 能正确应用极限四则运算法则．
6. 掌握两个重要极限存在准则．
7. 了解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较．
8. 掌握函数在一点连续与间断的概念．
9. 掌握初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质．

二、主要内容总结

(一)重要定义

1. 数列极限

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists$正整数 N，当 $n>N$ 时，恒有$|x_n-a|<\varepsilon$.

2. 函数极限

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当$|x|>X$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

3. 左、右极限

左极限：$f_-(x_0)=f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

右极限：$f_+(x_0)=f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x_0<x<x_0+\delta$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

4. 无穷小量

以零为极限的函数称为无穷小量，简称无穷小．

5. 无穷大量(实际上是极限不存在的一种形式)

在自变量的某一变化过程中，若函数 $f(x)$的绝对值无限增大，则称函数 $f(x)$为无穷大量，简称无穷大．

注意　无界变量与无穷大量的区别：无穷大量一定是无界变量，但无界变量不一定是无

穷大量.

6. 无穷小的比较

在自变量的同一变化过程中($x \to x_0$ 或 $x \to \infty$),设 $\lim\alpha=0$,$\lim\beta=0$,

(1) 若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=0$,则称 α 是比 β 高阶的无穷小,记为 $\alpha=o(\beta)$.

(2) 若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$,则称 α 是比 β 低阶的无穷小.

(3) 若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=c(c\neq 0)$,则称 α 与 β 是同阶无穷小.

(4) 若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=1$,则称 α 与 β 是等价无穷小,记为 $\alpha\sim\beta$.

常用的等价形式:

当 $x\to 0$ 时,下列各式成立:

$\sin x\sim x$,$\arcsin x\sim x$,$\tan x\sim x$,$\arctan x\sim x$,$\ln(1+x)\sim x$,$\log_a(1+x)\sim\dfrac{1}{\ln a}x$,

$e^x-1\sim x$,$a^x-1\sim x\ln a$,$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n}$,$(1+\beta x)^\alpha-1\sim\alpha\beta x$.

7. 函数连续的概念

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义,在 x_0 处给 x 以增量 Δx,相应地得到函数增量 Δy,$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$,则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

定义 2 设函数 $f(x)$ 满足下列条件:

(1) $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义;(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在;(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,

则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

8. 间断点

若 $f(x)$ 在 x_0 处出现如下三种情形之一:

(1) $f(x)$ 在 x_0 处无定义;(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在;(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$,

则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点.

(二)重要定理

定理 1 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow f_-(x_0)=f_+(x_0)=A$.

定理 2 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$,其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

定理 3 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$f(x)\geqslant 0(f(x)\leqslant 0)$,则 $A\geqslant 0(A\leqslant 0)$.

定理 4 单调有界数列必有极限.

定理 5(夹逼定理) 设在 x_0 的某个邻域内,有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

定理 6 无穷小的运算性质:

(1) 有限个无穷小的代数和仍为无穷小.

(2) 有限个无穷小的乘积仍为无穷小.

(3) 无穷小乘以有界量仍为无穷小．

定理 7（无穷大与无穷小的关系）　在自变量的同一变化趋势下，无穷大的倒数为无穷小，非“0”的无穷小的倒数为无穷大．

定理 8（极限运算法则）　在自变量的同一变化过程中($x\to x_0$ 或 $x\to\infty$)，设 $\lim f(x)$ 与 $\lim g(x)$ 都存在，则有：

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$；

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$；

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}(\lim g(x)\neq 0)$.

定理 9　初等函数在其定义区间内都连续．

(三)重要公式

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ 0, & n<m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$

4. 函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续$\Leftrightarrow f_-(x_0)=f_+(x_0)=f(x_0)$.

5. 几个常用极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}\ (a>0)=1$，特例 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$；

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x=\pi$；

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}x^x=1$.

三、重点内容拓展

例 1　设 $f(x)$ 是奇函数，$F(x)=f(x)\left(\dfrac{1}{a^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$，其中 a 为不等于 1 的正数，则 $F(x)$ 是(　　).

(A)偶函数；　　(B)奇函数；　　(C)非奇非偶函数；　　(D)奇偶性与 a 有关.

答　选(A).

分析　$F(-x)=f(-x)\left(\dfrac{1}{a^{-x}+1}-\dfrac{1}{2}\right)=-f(x)\left(\dfrac{a^x}{a^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$

$$=-f(x)\left(\frac{2a^x-a^x-1}{2(a^x+1)}\right)=-f(x)\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{2}{a^x+1}\right)$$

$$=f(x)\left(\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}\right)=F(x),$$

由偶函数的定义，$F(x)$是偶函数，所以选(A).

例 2 下列极限不存在的是(　　).

(A)$\frac{3}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{5}{4}$，$\frac{4}{5}$，…；

(B)$x_n=\begin{cases}\frac{n}{1+n}, & n\text{ 为奇数},\\ \frac{n}{1-n}, & n\text{ 为偶数};\end{cases}$

(C)$x_n=\begin{cases}1+\frac{1}{n}, & n\text{ 为奇数},\\ (-1)^n, & n\text{ 为偶数};\end{cases}$

(D)$x_n=\begin{cases}1, & n<10^6,\\ \frac{1}{n}, & n\geqslant 10^6.\end{cases}$

答 选(B).

分析 对于(B)，当n取奇数→∞时，$x_n\to 1$；当n取偶数→∞时，$x_n\to -1$，由极限的唯一性，可得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在，所以选(B).

对于(A)，当n为奇数时，$x_n=\frac{n+2}{n+1}$，当n为偶数时，$x_n=\frac{n}{n+1}$，显然$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

对于(C)，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

对于(D)，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 注意，数列极限与前几项没有关系.

例 3 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+10^n}$.

解 因为　$10=\sqrt[n]{10^n}<\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+10^n}<\sqrt[n]{10\cdot 10^n}=10\cdot\sqrt[n]{10}$，

而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{10}=1$，由夹逼定理知，原式=10.

例 4 设$f(x+1)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n-2}\right)^n$，则$f(x)=$(　　).

(A)e^{x-1}；　(B)e^{x+2}；　(C)e^{x+1}；　(D)e^{-x}.

答 选(C).

分析 $f(x+1)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2+x}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{2+x}}\right]^{\frac{n(2+x)}{n-2}}=e^{2+x}=e^{1+(x+1)}$，所以$f(x)=e^{1+x}$，所以选(C).

例 5 下列极限正确的是(　　).

(A)$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x}=1$；

(B)$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$；

(C)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$不存在；

(D)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$.

答 选(B).

分析 $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{1}{x}\xlongequal{\text{令}\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$，所以选(B)；而$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin\pi}{\pi}=0$，

又$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，$\sin\frac{1}{x}$及$\sin x$是有界函数，则有$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

注意 在重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$中，极限过程是$x\to 0$.

例 6　设 $x\to0$ 时，$e^{x\cos x^2}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 $n=($　　$)$.

(A)5；　　(B)4；　　(C)$\dfrac{5}{2}$；　　(D)2.

答　选(A).

分析　由题意选取 n 使得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\cos x^2}-e^x}{x^n}$ 为一不为零的常数.

因为
$$e^{x\cos x^2}-e^x=e^x\left(e^{x(\cos x^2-1)}-1\right),$$
当 $x\to0$ 时，
$$e^{x(\cos x^2-1)}-1\sim x(\cos x^2-1)\sim x\left(-\frac{x^4}{2}\right),$$
因此
$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x\cos x^2}-e^x}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{e^x\left(e^{x(\cos x^2-1)}-1\right)}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\left(-\frac{x^4}{2}\right)}{x^n}=\lim_{x\to0}\left(-\frac{x^{5-n}}{2}\right)\overset{n=5}{=\!=}-\frac{1}{2},$$
所以选(A).

例 7　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3\sin(x-1)}{x-1}, & x<1,\\ e^{2ax}-e^{ax}+1, & x\geqslant1\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=($　　$)$.

(A)ln2；　　(B)0；　　(C)2；　　(D)任意实数.

答　选(A).

分析　$f(x)$ 在不是分段点处是初等函数，它是连续的，因此只讨论 $f(x)$ 在分段点 $x=1$ 处的情形. 要使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，必须使
$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^+}f(x)=f(1),$$
即
$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{3\sin(x-1)}{x-1}=3=e^{2a}-e^a+1,$$
解得 $a=\ln2$，所以选(A).

例 8　函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$，则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的(　　).

(A)第二类间断点；　　(B)第一类非可去间断点；

(C)第一类可去间断点；　　(D)连续点.

答　选(A).

分析　$f(x)$ 在 $x=1$ 处无定义，所以不选(D). 又
$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=0,$$
$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=\infty,$$
故 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，所以选(A).

例 9　设 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$，证明：存在 $\xi\in[0,2a]$，使得
$$f(\xi)=f(a+\xi).$$

证明　设函数 $\varphi(x)=f(x+a)-f(x)$，有
$$\varphi(0)=f(a)-f(0)=f(a)-f(2a),\ \varphi(a)=f(2a)-f(a)=-\varphi(0).$$
若 $\varphi(0)=0$，则 $\xi=0$ 或 $\xi=a$ 即为所求.

若$\varphi(0)\neq 0$，由零点定理知，存在$\xi\in(0, 2a)$，使得$\varphi(\xi)=0$，即有$f(\xi)=f(a+\xi)$.

例 10 对任意的x总有$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$(　　).

(A)存在且等于零；　　(B)存在但不一定等于零；

(C)一定不存在；　　(D)不一定存在.

答 选(D).

分析 举反例. 令$\varphi(x)=1-e^{-|x|}$，$g(x)=1+e^{-|x|}$，$f(x)=1$，则有$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$，可排除(A)、(C)选项.

又令$\varphi(x)=e^x-e^{-|x|}$，$g(x)=e^x+e^{-|x|}$，$f(x)=e^x$，也有$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且$\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，但$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$不存在，可排除(B)，故选(D).

四、教材习题解析

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\cos\sqrt{x}$；

解 当$x\geqslant 0$时，$\sqrt{x}$有定义，所以$y=\cos\sqrt{x}$的定义域为$[0, +\infty)$.

(2) $y=\arcsin(x-3)$；

解 当$-1\leqslant x-3\leqslant 1$，即$2\leqslant x\leqslant 4$时，函数$y=\arcsin(x-3)$有定义，所以该函数的定义域为$[2, 4]$.

(3) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；

解 当$3-x\geqslant 0$，即$x\leqslant 3$时，$\sqrt{3-x}$有定义，当$x\neq 0$时，$\arctan\dfrac{1}{x}$有定义，所以该函数的定义域为$(-\infty, 0)\cup(0, 3]$.

(4) $y=\ln(x+1)$；

解 当$x+1>0$，即$x>-1$时，函数$y=\ln(x+1)$有定义，所以该函数的定义域为$(-1, +\infty)$.

(5) $y=\log_{(x-1)}(16-x^2)$；

解 当$x-1>0$且$x-1\neq 1$，同时$16-x^2>0$时，函数$y=\log_{(x-1)}(16-x^2)$有定义，即$1<x<4$且$x\neq 2$，所以该函数的定义域为$(1, 2)\cup(2, 4)$.

(6) $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{7}+\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\ln(2x-1)}$.

解 由题意可得

$$\begin{cases}-1\leqslant\dfrac{2x-1}{7}\leqslant 1,\\ 2x-1>0,\\ \ln(2x-1)\neq 0,\\ 2x-x^2\geqslant 0,\end{cases}$$

解得该函数的定义域为$\left(\frac{1}{2},\ 1\right)\cup(1,\ 2]$.

2. 判别下列函数的奇偶性.

(1) $y=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$;

解　$f(-x)=-x-\frac{(-x)^3}{6}+\frac{(-x)^5}{120}=-\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)=-f(x)$，所以该函数为奇函数.

(2) $y=x^2+\cos x$;

解　$f(-x)=(-x)^2+\cos(-x)=x^2+\cos x=f(x)$，所以该函数为偶函数.

(3) $y=x-x^2$;

解　$f(-x)=(-x)-(-x)^2=-x-x^2\neq f(x)$，且 $f(-x)\neq -f(x)$，所以该函数为非奇非偶函数.

(4) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

解
$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})$$
$$=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x),$$
所以该函数为奇函数.

3. 试证明下列函数在指定区间上的单调性.

(1) $y=x^2$，$x\in(0,\ 2)$;

证　设 $x_1\in(0,\ 2)$，$x_2\in(0,\ 2)$且满足 $x_1<x_2$，有
$$f(x_1)=x_1^2<f(x_2)=x_2^2,$$
所以函数 $y=x^2$ 在$(0,\ 2)$上是单调增加的.

(2) $y=\ln x$，$x\in(1,\ \mathrm{e})$.

证　设 $x_1\in(1,\ \mathrm{e})$，$x_2\in(1,\ \mathrm{e})$且满足 $x_1<x_2$，有
$$f(x_1)=\ln x_1<f(x_2)=\ln x_2,$$
所以 $y=\ln x$ 在$(1,\ \mathrm{e})$上是单调增加的.

4. 求下列函数的周期.

(1) $y=\sin 2x+\cos\frac{x}{2}$;

解　$y=\sin 2x$ 的周期为 π，$y=\cos\frac{x}{2}$的周期为 4π，所以该函数的周期为 4π.

(2) 对一切实数 x，有 $f\left(\frac{1}{2}+x\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$，求 $f(x)$的周期.

解
$$f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+x\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{f\left(\frac{1}{2}+x\right)-f^2\left(\frac{1}{2}+x\right)}$$
$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}-\left[\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}\right]^2}$$
$$=\frac{1}{2}+\sqrt{f^2(x)-f(x)+\frac{1}{4}}$$
$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]^2},$$

因为 $$f\left(\frac{1}{2}+x\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}\geqslant\frac{1}{2},$$

所以 $$f(x)=f\left(\frac{1}{2}+x-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\sqrt{f\left(x-\frac{1}{2}\right)-f^2\left(x-\frac{1}{2}\right)}\geqslant\frac{1}{2},$$

则 $$f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+x\right)=\frac{1}{2}+\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]=f(x)，即 f(1+x)=f(x),$$

所以该函数的周期为 1.

5. 下列各函数可以看作是由哪些简单函数复合而成的?

(1) $y=\sqrt{2-x^2}$;

解 $y=\sqrt{u}$，$u=2-x^2$，u 为中间变量.

(2) $y=\ln\sqrt{1+x}$;

解 $y=\ln u$，$u=\sqrt{v}$，$v=1+x$，u、v 为中间变量.

(3) $y=\sin^2(1+2x)$;

解 $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=1+2x$，u、v 为中间变量.

(4) $y=[\arcsin(1-x^2)]^3$;

解 $y=u^3$，$u=\arcsin v$，$v=1-x^2$，u、v 为中间变量.

(5) $y=(x-3)^{10}$;

解 $y=u^{10}$，$u=x-3$，u 为中间变量.

(6) $y=2^{\tan x}$;

解 $y=2^u$，$u=\tan x$，u 为中间变量.

(7) $\cos\sqrt{1+2x}$;

解 $y=\cos u$，$u=\sqrt{v}$，$v=1+2x$，u、v 为中间变量.

(8) $y=e^{x^2}$.

解 $y=e^u$，$u=x^2$，u 为中间变量.

6. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$，求: (1) 函数 $f(\ln x)$ 的定义域; (2) 函数 $f(\sin x)$ 的定义域; (3) 函数 $f\left(\frac{x-1}{x}\right)$ 的定义域.

解 (1) 当 $\ln x\in[0, 1]$，即 $x\in[1, e]$ 时，$f(\ln x)$ 有定义，所以函数 $f(\ln x)$ 的定义域为 $[1, e]$;

(2) 当 $\sin x\in[0, 1]$，即 $x\in[2k\pi, (2k+1)\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$f(\sin x)$ 有定义，所以函数 $f(\sin x)$ 的定义域为 $[2k\pi, (2k+1)\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$;

(3) 当 $\frac{x-1}{x}\in[0, 1]$，即 $x\in[1, +\infty)$ 时，$f\left(\frac{x-1}{x}\right)$ 有定义，所以函数 $f\left(\frac{x-1}{x}\right)$ 的定义域为 $[1, +\infty)$.

7. 设 $f(x-2)=x^2-2x+3$，求 $f(x)$，$f(x+2)$.

解 $f(x-2)=x^2-2x+3=(x-2)^2+2(x-2)+3$，

所以 $$f(x)=x^2+2x+3，f(x+2)=(x+2)^2+2(x+2)+3=x^2+6x+11.$$

8. 设 $f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$，$\varphi(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x<0, \\ x^2, & x\geqslant 0, \end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

解　当$x<0$时，$f[\varphi(x)]=\frac{1}{2}(e^{-x}+e^{-x})=e^{-x}$；

当$x\geqslant0$时，$f[\varphi(x)]=\frac{1}{2}(x^2+x^2)=x^2$，

即
$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{-x}, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant0.\end{cases}$$

*9. 某厂生产产品1000t，每吨定价为130元，销售量在700t以内时，按原价出售，超过700t时，超过的部分需按9折出售，试求销售总收益与总销售量的函数关系．

解　设销售总收益为y元，总销售量为xt，则
$$y=\begin{cases}130x, & 0\leqslant x\leqslant700,\\ 130\times700+130\times0.9\times(x-700), & 700<x<1000.\end{cases}$$

*10. 某厂生产的收音机每台可卖110元，固定成本7500元，可变成本为每台60元．

(1) 要卖多少台收音机，厂家才可保本(无盈亏)？

(2) 卖掉100台，厂家盈利或亏损了多少？

(3) 要获得1250元的利润，需要卖多少台？

解　(1) 设要卖x台收音机，厂家可保本，则$110x=7500+60x$，解得$x=150$，即要卖150台收音机，厂家无盈亏．

(2) 卖掉100台的总收益为
$$110\times100=11000(\text{元}),$$
100台收音机的总成本为
$$7500+100\times60=13500(\text{元}),$$
$$11000-13500=-2500(\text{元}),$$
即卖掉100台，厂家亏损2500元．

(3) 设要卖x台，可获利1250元．$110x-7500-60x=1250$，解得$x=175$，即要卖175台，厂家可获利1250元．

*11. 有两家健身俱乐部，第一家每月收会费300元，每次健身收费1元，另一家每月收会费200元，每次健身收费2元，若只考虑经济因素，你会选择哪一家？

解　设健身的次数为x，令$300+1x=200+2x$，解得$x=100$，即健身的次数少于100时，选择第二家；健身的次数多于100时，选择第一家．

12. 求函数$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0,\\ x, & x\geqslant0\end{cases}$在$x=0$处的左、右极限，说明$f(x)$在这点的极限是否存在？并作出它的图形．

解　$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x^2+1)=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x=0$，因为左、右极限不相同，所以$f(x)$在$x=0$处的极限不存在．图形略．

13. 下列极限存在吗？若存在，求出其值；若不存在，说明理由．

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x}$；

解　$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x}=\lim\limits_{x\to0}1=1$.