"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材配套用书

概率论与数理统计
学习指导

杨爱军　谢　琍　陈立萍　程维虎　编

注重基本知识训练，加强综合能力培养
明确教学大纲要求，精选部分考研真题

科学出版社

"十二五" 普通高等教育本科国家级规划教材配套用书

概率论与数理统计学习指导

杨爱军 谢 琍 陈立萍 程维虎 编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材《概率论与数理统计（第三版）》(王松桂等)的配套辅导用书. 内容包括概率论和数理统计两部分, 共9章. 前5章为概率论部分, 依次包括随机事件、随机变量、随机向量、数字特征和极限定理; 后4章为数理统计部分, 依次包括样本与统计量、参数估计、假设检验和回归分析与方差分析. 本书明确“概率论与数理统计”课程教学大纲的要求, 注重基本概念、基本理论与基本方法的训练, 注重概率统计知识综合运用能力的培养, 注重分析问题与解决问题能力提高的训练, 并精选了近年硕士研究生考题中的部分真题. 内容丰富, 新颖.

本书既可作为理工、农医、生物、经济与管理等各类本科生学习“概率论与数理统计”课程的参考书, 又可作为硕士研究生入学考试的复习指导书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导/杨爱军等编. —北京：科学出版社，2015.8
（“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材配套用书）
ISBN 978-7-03-045434-8

I. 概… II. 杨… III. ①概率论-高等学校-教学参考资料 ②数理统计-高等学校-教学参考资料 IV. O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第186382号

责任编辑: 姚莉丽 / 责任校对: 曾　茹
责任印制: 霍　兵 / 封面设计: 陈　敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京厚诚则铭印刷科技有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2015年9月第　一　版　开本: 720×1000 1/16
2015年9月第一次印刷　印张: 14 1/4
字数: 268 000

POD定价: 89.00元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

“概率论与数理统计”作为现代数学的重要分支, 在自然科学、社会科学和工程技术的各个领域都有广泛应用. 特别是近 30 年来, 随着计算机技术的普及, 概率统计在经济、金融、管理、交通、通信、生物、医学及工农业各方面的应用得到长足发展. 正是概率统计的这种广泛应用, 使得它今天成为国内外高等院校各专业大学生最重要的数学必修课之一. 概率统计课程是学生首次接触的以随机现象为研究对象的课程, 对于初学课程的学生来说, 许多概念的实质难以理解, 许多问题不知如何分析、解答, 或对于自己完成的习题也没有把握. 因此, 觉得课程非常难学. 为配合课程教学, 我们编写了这门课程的学习辅导书, 试图通过对典型例题的分析, 帮助学生正确地理解概率统计基本概念, 掌握解题方法和技巧, 并通过适当练习来巩固所学内容, 培养学生运用概率统计工具进行分析问题和解决问题的能力. 这是我们编写本辅导书的目的之一.

“概率论与数理统计”也是全国硕士研究生“高等数学”考核内容之一. 为了帮助学生全面系统地学习与复习概率论与数理统计内容, 从总体上提高概率论与数理统计学习水平, 我们仔细研究了近 20 年来硕士研究生入学考试试题, 精选了部分考试原题作为典型例题与习题 (以 * 号做标记), 进行分析、归纳和总结, 以满足报考研究生的学生复习、备考的需要, 这是我们编写本辅导书的目的之二.

全书共分 9 章, 每章均按内容提要、教学要求 (包括重点与难点)、典型例题分析、习题及习题答案五个部分. 本书对基本方法的介绍, 力求从分析、比较入手, 阐明分析问题的思维方法及应用技巧. 在例题的选择上, 力求具有代表性, 由浅入深. 有些题目给出多种解题方法, 以便学生开阔思路, 有些题目后加注了解题方法的总结、注意事项等, 使学生在学习中提高“举一反三”的能力.

本书第 1 章 ~ 第 3 章由谢琍编写, 第 4、第 5 章由杨爱军编写, 第 6、第 7 章由程维虎编写, 第 8、第 9 章由陈立萍编写. 在编写过程中, 我们得到王松桂、张忠占、高旅端、薛留根、李寿梅等多位教授的支持、鼓励与帮助, 得到普通高等教育“十一五”国家级规划教材的资助, 编者在此一并致谢.

限于编者水平所限, 不当乃至谬误之处在所难免, 恳请国内同行及广大读者不吝赐教.

编　者

2007 年 10 月 30 日

目　录

第1章 随机事件

1.1 内容提要

1.1.1 随机试验和随机事件

1) 随机试验

若试验 (观察或实验过程) 满足：可以在相同条件下重复进行; 结果有多种可能, 所有可能的结果是已知的, 但每次试验的结果事前不可预知, 则称这样的试验为随机试验. 记为 E.

2) 样本空间、样本点

试验所有可能结果组成的集合称为样本空间, 记为 Ω. 样本空间的元素, 即试验的各种可能的结果称为样本点.

3) 随机事件、基本事件、必然事件与不可能事件

样本空间 Ω 的子集称为随机事件, 简称事件, 常用英文字母 $A, B, C, \cdots$ 表示; 仅含一个样本点的随机事件称为基本事件; 样本空间 Ω 包含了所有的样本点, 且是 Ω 的子集, 在每次试验中总是发生, 称其为必然事件; 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点, 但它是样本空间的子集, 且在每次试验中总不发生, 称其为不可能事件.

1.1.2 事件的关系及运算

设 Ω 是试验 E 的样本空间, $A, B, A_1, A_2, \cdots$ 都是事件, 即 Ω 的子集.

1) 事件的包含与相等

若事件 A 发生必有事件 B 发生, 则称事件 A 包含于事件 B, 或事件 B 包含事件 A, 记为 $A \subset B$.

若 $A \subset B$, 且 $B \subset A$, 则称事件 A 与事件 B 相等, 记为 $A = B$.

2) 事件的并或和

对 $n(n \geqslant 2)$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 若事件 B 发生当且仅当 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生, 则称 B 为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并或和, 记为 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, 或 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$.

事件并或和的定义容易推广到无穷多个事件的情形: 对无穷多个事件 $A_1, A_2, \cdots$, 若事件 B 发生当且仅当 $A_1, A_2, \cdots$ 中至少一个发生, 则称 B 为 $A_1, A_2, \cdots$ 的并或和, 记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

3) 事件的交或积

对 $n(n \geqslant 2)$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 若事件 B 发生当且仅当 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生, 则称 B 为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交或积, 记为 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$, 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$, 或 $A_1 A_2 \cdots A_n$.

对无穷多个事件 $A_1, A_2, \cdots$, 若事件 B 发生当且仅当 $A_1, A_2, \cdots$ 同时发生, 则称 B 为 $A_1, A_2, \cdots$ 的交或积, 记为 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots$, 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, 或 $A_1 A_2 \cdots$.

特别地, 若 $A \cap B = \varnothing$, 则称 A 与 B 为互斥事件, 简称 A 与 B 互斥.

4) 事件的差

对三个事件 A, B, C, 若 C 发生当且仅当 A 发生而 B 不发生, 则称 C 为 A 与 B 的差, 记为 $A - B$.

特别地, 称 $\Omega - A$ 为 A 的对立事件或 A 的补事件, 记为 $\overline{A}$.

5) 事件的运算律

交换律: $A \cup B = B \cup A, \quad AB = BA$.

结合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A(BC) = (AB)C$.

分配律: $A(B \cup C) = (AB) \cup (AC), \quad A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$.

对偶律: $\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}, \quad \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

对于多个事件, 上述运算规则也成立, 例如,

$$
\begin{aligned}
&A(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = (AA_1) \cup (AA_2) \cup \cdots \cup (AA_n); \\
&\overline{A_1 A_2 \cdots A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}; \\
&\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \cdots\ \overline{A_n}.
\end{aligned}
$$

另外, 还应注意到 $A - B = A\overline{B}, \quad A = (AB) \cup (A\overline{B})$ 或 $B = (AB) \cup (\overline{A}B)$ 等.

1.1.3 概率的定义与性质

1) 定义

设 E 是随机试验, Ω 为样本空间. 对每个事件 A, 定义一个实数 $P(A)$ 与之对应, 若函数 $P(\cdot)$ 满足条件:

(i) 对于每个事件 A, 均有 $P(A) \geqslant 0$.

(ii) $P(\Omega) = 1$.

(iii) 若事件 $A_1, A_2, \cdots$ 两两互斥, 即对于 $i, j = 1, 2, \cdots$, $i \neq j$, $A_iA_j = \varnothing$, 均有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots,$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

2) 性质

(i) $P(\varnothing) = 0$, 即不可能事件的概率为零. 反之不成立, 即 $P(A) = 0 \not\Rightarrow A = \varnothing$.

(ii) 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥, 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n),$$

即互斥事件之和的概率等于它们各自的概率之和.

(iii) 对任一事件 A, 均有 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

(iv) 对两个事件 A 和 B, 若 $A \subset B$, 则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A), \quad P(B) \geqslant P(A).$$

(v) 对两个事件 A 和 B, 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

性质 (v) 可推广到多个事件的情形: 对 $n(n \geqslant 3)$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \cdots + (-1)^{n+1} S_n,$$

其中

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} P(A_i), \quad S_2 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j),$$

$$S_3 = \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_iA_jA_k), \quad \cdots, \quad S_n = P(A_1A_2\cdots A_n).$$

1.1.4 古典概型

1) 定义

如果试验 E 的结果只有有限种, 且每种结果发生的可能性相同, 则称这样的试验模型为等可能概率模型或古典概率模型, 简称古典概型.

2) 计算

若试验 E 的样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$, 事件 $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_k}\}$, 且 $P(\{\omega_i\}) = 1/n$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 则

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{事件 } A \text{ 包含的基本事件数}}{\Omega\text{中基本事件总数}}.$$

1.1.5 条件概率、乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式

1) 条件概率

设 A 和 B 是两个事件, 且 $P(B)>0$, 称 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 为事件 B 发生的条件下, 事件 A 发生的条件概率.

条件概率 $P(\cdot|B)$ 满足概率定义中的三条, 即

(i) 对每个事件 A, 均有 $P(A|B)\geqslant 0$.

(ii) $P(\Omega|B)=1$.

(iii) 若 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两互斥事件, 有

$$P\big((A_1\cup A_2\cup\cdots)\big|B\big)=P(A_1|B)+P(A_2|B)+\cdots.$$

2) 乘法公式

$$\begin{cases} P(AB)=P(A|B)P(B), & \text{当 } P(B)>0 \text{ 时}, \\ P(AB)=P(B|A)P(A), & \text{当 } P(A)>0 \text{ 时}. \end{cases}$$

乘法公式的推广: 对于任何正整数 $n\geqslant 2$, 当 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$ 时, 有

$$\begin{aligned} &P(A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n)\\ =&P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}). \end{aligned}$$

3) 全概率公式

设 Ω 是样本空间, 若事件组 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 两两互斥, 且 $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=\Omega$, 则称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 Ω 的一个划分.

设 Ω 是样本空间, A 为事件, $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 Ω 的一个划分, 且 $P(B_i)>0,\ i=1,2,\cdots,n$, 称

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$$

为全概率公式.

4) 贝叶斯公式

设 Ω 是样本空间, A 是一个事件, $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是 Ω 的一个划分, 且 $P(A)>0,\ P(B_i)>0,\ i=1,2,\cdots,n$, 称

$$P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)},\quad i=1,2,\cdots,n$$

为贝叶斯公式.

1.1.6 事件独立

1) 定义

设 A, B 为两个事件, 若 $P(AB) = P(A)P(B)$, 则称事件 A 与 B 相互独立.

事件独立的概念可推广到多个事件的情形：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个事件, $n \geqslant 3$. 若对 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中的任意 $k(k \geqslant 2)$ 个事件 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$, 总有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立.

2) 性质

(i) 设 A, B 为两个事件, $P(A) > 0$. 若 A, B 相互独立, 则 $P(B|A) = P(B)$. 反之亦真.

(ii) 若事件 A 与 B 相互独立, 则 A 与 $\overline{B}$, $\overline{A}$ 与 B, $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

对多个相互独立事件有如下性质：

(iii) 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立, 则 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中的任意 $k(k \geqslant 2)$ 个事件 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$ 也相互独立, 其中 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$.

(iv) 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立, 则事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 也相互独立, 其中 B_i 为 A_i 或 $\overline{A}_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

1.2 教学要求

(1) 理解随机事件和样本空间的概念.

(2) 熟练掌握事件之间的关系及运算.

(3) 理解概率的定义, 掌握概率的性质, 会用概率性质及事件间的关系与运算进行概率的计算.

(4) 理解古典概型的定义, 掌握古典概型下事件概率的计算.

(5) 理解条件概率的概念, 掌握用乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式计算事件概率的方法.

(6) 理解事件独立的概念, 掌握用独立性进行事件概率计算的方法.

重点与难点

- 重点：事件的关系及运算, 概率的定义及性质, 古典概型的概念及计算, 条件概率、乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式的概念及其应用.
- 难点：古典概型下事件概率的计算, 全概率公式与贝叶斯公式的应用.

1.3　典型例题分析

例 1　填空题:

(1)* 设两个相互独立事件 A 与 B 都不发生的概率为 $1/9$, A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等, 则 $P(A) =$ ______.

(2)* 设三事件 A, B, C 相互独立, 且 $ABC = \varnothing$, $P(A) = P(B) = P(C) < 1/2$, $P(A \cup B \cup C) = 9/16$, 则 $P(A) =$ ______.

(3) 设 A, B 为随机事件, 且 $P(A) = 0.6$, $P(B - A) = 0.2$. 当 A 与 B 相互独立时, $P(B) =$ ______; 当 A 与 B 互斥时, $P(B) =$ ______.

(4) 某球员进行投篮训练, 设各次投篮是否进筐相互独立, 且各次进篮筐概率相同. 已知该运动员 3 次投篮时至少投中一次的概率为 0.875, 则其投篮命中概率为 ______, 5 次投篮至少投中 2 次的概率为 ______.

(5) 设 A, B 为两事件, $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.6$, $P(B|\overline{A}) = 0.4$, 则 $P(\overline{A}B) =$ ______, $P(AB) =$ ______, $P(A \cup B) =$ ______.

解　(1) 据题设, 有 $P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = 1/9$. 再由 $P(A\overline{B}) = P(B\overline{A})$, 知 $P(A)P(\overline{B}) = P(B)P(\overline{A})$, 即 $P(A)[1 - P(B)] = P(B)[1 - P(A)]$. 由此, 得 $P(A) = P(B)$. 从而, $P(\overline{A}) = P(\overline{B}) = 1/3$, $P(A) = 2/3$.

(2) 据题设, 有

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\
&\quad - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \\
&= 3P(A) - 3P^2(A) + 0 \\
&= \frac{9}{16},
\end{aligned}
$$

$$
P^2(A) - P(A) + \frac{3}{16} = 0.
$$

解方程, 得 $P(A) = 1/4$ 或 $3/4$. 再由 $P(A) < 1/2$, 知 $P(A) = 1/4$.

(3) 据题设, 当 A 与 B 相互独立时, 有

$$
\begin{aligned}
P(B - A) &= P(B\overline{A}) = P(B)P(\overline{A}) \\
&= P(B)[1 - P(A)] = 0.4 \times P(B) \\
&= 0.2.
\end{aligned}
$$

由此, 得 $P(B)=0.5$;

当 A 与 B 互斥时, $P(B)=P(BA)+P(B\overline{A})=0+P(B-A)=0.2$.

(4) 设各次投入篮筐的概率为 p, 3 次投篮中入筐的次数为 X, 5 次投篮中入篮筐的次数为 Y, 则 $X\sim B(3,p)$, $Y\sim B(5,p)$. 据此及 $P\{X\geqslant 1\}=0.875$, 得 $P\{X=0\}=1-0.875=0.125=(1-p)^3$, 解得 $p=0.5$;

$$\begin{aligned}P\{Y\geqslant 2\}&=1-P\{Y=0\}-P\{Y=1\}\\&=1-(1-p)^5-5p(1-p)^4\\&=1-6\times 0.5^5\\&=0.8125.\end{aligned}$$

(5) 由题设, 得

$$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.5\times 0.4=0.2;$$

由 $AB=B-\overline{A}B$, $\overline{A}B\subset B$, 得

$$P(AB)=P(B-\overline{A}B)=P(B)-P(\overline{A}B)=0.6-0.2=0.4;$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.6-0.4=0.7.$$

例 2 选择题:

(1) 在电炉上安装 4 个温控器, 各温控器显示温度的误差是随机的. 在使用过程中, 只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0, 电炉就断电. 以 E 表示事件“电炉断电”, 设 $T_{(1)}\leqslant T_{(2)}\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的由低到高的温度值, 则事件 E 等于 ( ).

(A) $\{T_{(1)}\geqslant t_0\}$; (B) $\{T_{(2)}\geqslant t_0\}$; (C) $\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$; (D) $\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$.

解 选 (C). 因为事件 E 是“电炉断电”, 而电炉断电的条件是只要有两个温控器显示的温度不低于 t_0, 即当 $T_{(3)}\geqslant t_0$ 时, 必有 $t_0\leqslant T_{(3)}\leqslant T_{(4)}$. 所以选 (C).

(2) 设 A,B,C 三事件两两独立, 则 A,B,C 相互独立的充要条件是 ( ).

(A) A 与 BC 独立; (B) AB 与 $A\cup C$ 独立;

(C) AB 与 AC 独立; (D) $A\cup B$ 与 $A\cup C$ 独立.

解 选 (A). 据题设, 要使 A,B,C 三事件相互独立, 还仅需

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C). \tag{1.1}$$

若 A 与 BC 独立, 则有 $P(ABC)=P(A(BC))=P(A)P(BC)=P(A)P(B)P(C)$, 此式满足式 (1.1). 所以 (A) 成立.

若 AB 与 $A\cup C$ 独立, 则有 $P(AB(A\cup C))=P(AB)P(A\cup C)$. 此式

$$左=P(AB\cup ABC)=P(AB),\quad 右=P(AB)[P(A)+P(C)-P(AC)],$$

由此只能推出 $P(AB)=0$ 或 $P(A)+P(C)-P(AC)=1$. 所以 (B) 不成立.

若 AB 与 AC 独立, 则有 $P(AB\cap AC)=P(AB)P(AC)$. 此式

$$左=P(ABC),\quad 右=P(A)^2P(B)P(C),$$

不满足式 (1.1). 所以 (C) 不成立.

若 $A\cup B$ 与 $A\cup C$ 独立, 则有 $P((A\cup B)(A\cup C))=P(A\cup B)P(A\cup C)$, 此式

$$\begin{aligned}左&=P(A\cup AB\cup AC\cup BC)=P(A\cup BC)=P(A)+P(BC)-P(ABC),\\ 右&=[P(A)+P(B)-P(A)P(B)][P(A)+P(C)-P(A)P(C)]\\ &=[P(A)]^2[1-P(C)-P(B)+P(B)P(C)]+P(A)P(C)\\ &\quad+P(A)P(B)+P(B)P(C)-2P(A)P(B)P(C),\end{aligned}$$

不满足式 (1.1). 所以 (D) 不成立. 故选 (A).

(3) 对于任意两事件 A 与 B, 与 $A\cup B=B$ 不等价的是 (　　).

(A) $A\subset B$;　(B) $\overline{B}\subset\overline{A}$;　(C) $A\overline{B}=\varnothing$;　(D) $\overline{A}B=\varnothing$.

解　选 (D). 因 $A\cup B=B$ 等价于 $A\subset B$, 或 $\overline{B}\subset\overline{A}$, 或 $A\overline{B}=\varnothing$. 故 (A),(B),(C) 不成立; 取 $B=\Omega$, $A=\varnothing$, 有 $A\cup B=B$, 但 $\overline{A}B=\Omega$. 所以选 (D).

(4) 对于任意两事件 A 与 B, 命题正确的是 (　　).

(A) $AB\neq\varnothing$, 则 A 与 B 一定独立;　(B) $AB\neq\varnothing$, 则 A 与 B 有可能独立;

(C) $AB=\varnothing$, 则 A 与 B 一定独立;　(D) $AB=\varnothing$, 则 A 与 B 一定不独立.

解　选 (B). (A) 与 (C) 显然不成立; 在 (D) 中, 取 $A=\Omega$, $B=\varnothing$, 有 $AB=\varnothing$, 但 A 与 B 独立, 所以 (D) 不成立. 在 (B) 中, 取 $A=B=\Omega$, 有 $AB\neq\varnothing$, $P(AB)=P(A)P(B)$, 即 A 与 B 独立. 故 (B) 成立. 所以选 (B).

(5)* 设 A,B 为随机事件, 且 $0<P(A)<1$, $P(B)>0$, $P(B|A)=P(B|\overline{A})$, 则下列结论一定成立的是 (　　).

(A) $P(A|B)=P(\overline{A}|B)$;　　(B) $P(A|B)\neq P(\overline{A}|B)$;

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$;　(D) $P(AB)\neq P(A)P(B)$.

解　选 (C). 据题设, 有 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$, 即 $\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}$, 从而,

$$P(A)P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(AB) = [1 - P(A)]P(AB) = P(AB) - P(A)P(AB),$$

$$P(AB) = P(A)P(\overline{A}B) + P(A)P(AB) = P(A)[P(\overline{A}B) + P(AB)] = P(A)P(B).$$

所以 (C) 成立, 即 A 与 B 相互独立, (D) 不成立. 进一步, 由 (C) 成立, 有

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A),$$

$$P(\overline{A}|B) = \frac{P(\overline{A}B)}{P(B)} = \frac{P(\overline{A})P(B)}{P(B)} = P(\overline{A}).$$

因此, $P(A|B)$ 与 $P(\overline{A}|B)$ 是否相等, 即 $P(A)$ 与 $P(\overline{A})$ 是否相等并不一定. 所以, 一定正确的是 (C).

(6)* 设 A, B 为随机事件, 且 $0 < P(A) < 1$, $0 < P(B) < 1$, $P(A|B) + P(\overline{A}|\overline{B}) = 1$, 则 A 与 B(　　).

(A) 互斥; (B) 对立; (C) 不独立; (D) 独立.

解 选 (D). 据题设, 有 $P(A|B) = 1 - P(\overline{A}|\overline{B}) = P(A|\overline{B})$. 从而, 有

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)},$$

据此, 得 $P(AB) = P(A)P(B)$, 即 A 与 B 相互独立, (D) 成立. 所以选 (D).

(7) 若事件 A, B 同时发生时, 事件 C 必发生, 则下列结论正确的是 (　　).

(A) $P(C) = P(AB)$; (B) $P(C) = P(A \cup B)$;

(C) $P(C) \geqslant P(A) + P(B) - 1$; (D) $P(C) \leqslant P(A) + P(B) - 1$.

解 选 (C). 据题设, 有 $AB \subset C$, 于是

$$P(C) \geqslant P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geqslant P(A) + P(B) - 1,$$

(C) 成立. 所以选 (C).

例 3 袋中有编号为 $1, 2, \cdots, N$ 的同型号球各一只, 采用 (1) 无放回; (2) 有放回两种方式随机摸球, 试求第 k 次摸球时, 首次摸到 1 号球的概率.

解 设 A_i={第 i 次摸到 1 号球}, $i = 1, 2, \cdots, k$.

(1) 无放回方式.

下面给出三种求 $P(A)$ 的方法:

解法一 因袋中 N 个球均有编号, 显然为各不相同的球, 若把摸出的球依次排成一列, 则 N 个球的每个排列就是一个基本事件, 基本事件总数为数码 $1, 2, \cdots, N$