矩阵线性组合的广义逆及其应用

刘晓冀　王宏兴/著

Generalized Inverse of the Linear Combination of Two Matrices and Its Applications

科学出版社

矩阵线性组合的广义逆及其应用

刘晓冀　王宏兴　著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书主要讨论了矩阵线性组合的 Drzain 逆、分块矩阵广义逆和特殊矩阵线性组合相关性质等.

本书可以作为高等院校的研究生和从事矩阵广义逆研究的科技工作者的参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

矩阵线性组合的广义逆及其应用/刘晓冀，王宏兴著. —北京：科学出版社，2017. 12

ISBN 978-7-03-055843-5

Ⅰ. ①矩… Ⅱ. ①刘… ②王… Ⅲ.①矩阵–组合数学–广义逆–研究 Ⅳ. ①O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 300384 号

责任编辑：胡庆家／责任校对：彭 涛

责任印制：张 伟／封面设计：无极书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京建宏印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 12 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5

2017 年 12 月第一次印刷 印张：20 1/4

字数：400 000

定价：128.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

作者简介

刘晓冀 广西民族大学教授, 2003 年西安电子科技大学博士毕业, 华东师范大学博士后. 目前主要从事矩阵论、算子广义逆等方面的教学和科研工作. 在《数学学报》《计算数学》《数学年刊》, *Mathematics of Computation*, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *Linear Algebra and its Application* 等国内外刊物上发表 80 余篇学术论文.

王宏兴 广西民族大学副教授, 2011 年博士毕业于华东师范大学数学系. 目前主要从事矩阵广义逆理论等方面的教学和科研工作. 在《计算数学》, *Linear Algebra and its Application*, *Linear and Multilinear Algabra* 等国内外刊物上发表 20 余篇学术论文.

序

分块矩阵 Drazin 逆的表示问题是 Drazin 逆研究的一个经典问题, 该问题不仅在矩阵代数中有重要意义, 而且在自动化、数值分析、广义系统、马尔可夫和迭代法等诸多方面有着深刻的应用背景, 尤其在奇异线性差分方程解析解的表示中, 分块矩阵 Drazin 逆是不可或缺的工具.

1979 年, Campbell 和 Meyer 在求解一类二阶微分方程的解析解时提出了如何用矩阵的子块 A, B, C, D 来表示分块矩阵 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ Drazin 逆的公开问题. 1983 年, Campbell 首先解决了分块下三角矩阵 $T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ 的表示问题, 同时提出了反三角矩阵 $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ 的公开问题. 由此, 国内外许多专家对这两个公开问题进行了诸多研究.

到目前为止, 这两个公开问题依然没有解决, 同时还有许多来自微分方程领域的特殊分块矩阵 Drazin 逆的表示问题需要解决, 这些值得我们进行深入的研究和探讨.

另一方面, 魏益民、Hartwig 等国内外专家研究了如何利用矩阵 A, B 表示矩阵和 $A+B$ 的 Drazin 逆, 得到了在两个矩阵交换、单边乘积为零等多种情况下的 Drazin 逆表示, 主要使用的技术是矩阵的特殊分块矩阵的 Drazin 逆表示, 并利用得到的相应结果讨论矩阵 Drazin 逆的扰动问题, 得到了一些较为深刻的结果. Castro 等在 $G^2F = FG^2 = 0$ 条件下研究了算子和 $G + F$ 的 Drazin 逆, 并由此给出了一些类型的算子分块矩阵 Drazin 逆的表示. 我们进一步在更弱的条件下得到了矩阵和的 Drazin 逆, 并由此给出了一些类型的特殊分块矩阵 Drazin 逆的表示. 杨虎教授等给出了在 $PQP = 0, PQ^2 = 0$ 情况下 $P + Q$ 的 Drazin 逆. 最近国内外专家研究了特殊矩阵线性组合的 Drazin 逆的表示, 得到了一系列结论. 但一般情形下的矩阵和的 Drazin 逆表示还未得到.

矩阵线性组合的研究是广义逆理论非常重要的研究领域. 矩阵线性组合的幂等性、立方幂等性、对合性及其广义逆的表示在统计学、量子力学中应用广泛. 近年来, 很多学者在这方面做了大量的研究, 例如, Baksalary, Benítez, Groß, 以及卜长江、邓春源、刘晓冀等.

作者长期从事矩阵广义逆理论及其应用等问题的研究, 发现了 Drazin 逆相关问题还有很多有待解决. 本书主要讨论了矩阵线性组合的 Drzain 逆、分块矩阵广义逆和特殊矩阵线性组合相关性质等. 内容编排如下: 第 1 章介绍广义逆的若干基本知识; 第 2 章介绍矩阵线性组合的 Drazin 逆; 第 3 章介绍分块矩阵的广义逆; 第 4 章介绍特殊矩阵及其线性组合的相关性质.

关于 Drazin 逆问题研究的文献已经非常丰富, 本书不可能包括所有的参考文献, 而主要包括最新的和最精练的内容, 而且列出的参考文献也不太全面. 因此, 在这里向做了很多这方面的工作但未列入参考文献的作者表示歉意.

本书的编写和出版得到国家自然科学基金 (11361009,11401243)、广西八桂学者项目、广西卓越学者项目、中国博士后科学基金 (2015M581690) 以及广西民族大学在物力和资金上的大力支持.

由于作者水平有限, 书中难免有疏漏和不妥之处, 希望读者能及时指出, 便于以后纠正.

刘晓冀
广西民族大学
2017 年 7 月

符　号　表

- $\mathbb{R}$: 所有实数的全体
- $\mathbb{C}$: 所有复数的全体
- $\mathbb{R}^{m\times n}$: 所有 $m\times n$ 实元素矩阵的全体
- $\mathbb{C}^{m\times n}$: 所有 $m\times n$ 复元素矩阵的全体
- $\bar{A}$: 矩阵 A 的共轭
- A^{T}: 矩阵 A 的转置
- A^*: 矩阵 A 的共轭转置 (即 $\bar{A}^{\mathrm{T}}$)
- A^{-1}: 矩阵 A 的逆
- $A^{\dagger}$: 矩阵 A 的 Moore-Penrose 逆
- $A^{\#}$: 矩阵 A 的群逆
- A_D: 矩阵 A 的 Drazin 逆
- $\mathbb{C}_{n,\#}$: 所有 n 阶群可逆矩阵的全体
- I_n: $n\times n$ 单位矩阵. 当不会引起混淆时, 也记为 I
- $0_{m\times n}$: $m\times n$ 零矩阵. 当不会引起混淆时, 也记为 0. 0_m 为 m 阶零向量
- $R(A)$: 由矩阵 A 的所有列向量所张成的子空间
- $N(A)$: 矩阵 A 的零空间
- P_A: 到 $R(A)$ 上的正交投影算子
- $r(A)$: 矩阵 A 的秩
- $\rho(A)$: 矩阵 A 的谱半径
- $\lambda(A)$: 矩阵 A 的所有特征值全体
- $\in$: 元素属于
- $\subseteq$: 集合含于
- $\Leftrightarrow$: 等价
- $\Rightarrow$: 蕴涵

目　录

第1章　引　　言

近几十年来, 矩阵的广义逆已被越来越多的学者所研究和熟悉. 广义逆的思想最早被人们提出是在 1903 年, I. Fredholm 在研究 Fredholm 积分算子问题时首次涉及积分算子广义逆的内容. 而任意矩阵的广义逆的提出是在 1920 年, E. H. Moore 在*Bulletin of the American Mathematical Society*上以投影矩阵的形式定义了矩阵的广义逆, 当时并未引起人们广泛的关注. 1955 年, R. Penrose 在*Journal of the Cambridge Philosophical Society*上以简洁明了的形式定义了矩阵的广义逆, 用符号 $A^{\dagger}$ 表示, 给定 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 若对某个矩阵 $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足以下四个矩阵方程:

(1) $AXA = A$;

(2) $XAX = X$;

(3) $(AX)^* = AX$;

(4) $(XA)^* = XA$, $\qquad$ (1.0.1)

则称 X 为 A 的 Moore-Penrose 逆.

1958 年, 美国数学家 M. P. Drazin 提出了结合半群和环上的广义逆, 后来便称它为 Drazin 逆. 即

设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 矩阵 $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 满足

($1k$) $A^kXA = A$;

(2) $XAX = X$;

(5) $AX = XA$,

称 X 为 A 的 Drazin 逆, 用符号 A_D 表示. 当 $\mathrm{Ind}(A) = 1$ 时, X 为 A 群逆, 用符号 $A^{\#}$ 表示, 记 $A^{\pi} = I - AA_D$. 从此以后广义逆理论开始逐步的发展, 并广泛地应用在各个学科中, 如数值线性代数、控制论、最小二乘、非线性方程、回归分析、Markov 链 [23,41−44,54−57,74,194,250].

定义 1.0.1　若 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 矩阵 A 的秩记为 $r(A)$, 满足

$$r(A^{k+1}) = r(A^k)$$

的最小非负整数 k 称为 A 的指标, 记 $k = \mathrm{Ind}(A)$.

定义 1.0.2　设 $x \in \mathcal{R}$, 如果整数 $\lceil x \rceil$ 满足下列不等式

$$x \leqslant \lceil x \rceil < x + 1,$$

则称 $\lceil x \rceil$ 为大于等于 x 的最大整数.

定义 1.0.3 设 $x \in \mathcal{R}$, 如果整数 $\lfloor x \rfloor$ 满足下列不等式

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x,$$

则称 $\lfloor x \rfloor$ 为小于等于 x 的最大整数.

记

$$\mathbb{C}_n^{EP} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : AA^+ = A^+A\},$$

$$\mathbb{C}_n^{QP} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : A^{n+2} = A\},$$

$$\mathbb{C}_n^{n-HGP} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : A^n = A^+\}.$$

$$\mathbb{C}_n^{U} = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : AA^* = I = A^*A\},$$

其中 n 表示矩阵阶数. 则由文献 [6] 得到 $\mathbb{C}_n^{n-HGP} = \mathbb{C}_n^{EP} \cap \mathbb{C}_n^{QP}$.

1.1 矩阵线性组合的 Drazin 逆

在矩阵理论、概率统计理论、线性系统理论、微分和差分方程、Markov 链以及控制论等领域, Drazin 逆有着重要的作用. Koliha 将 Banach 代数上 Drazin 逆的应用推广到了 Banach 空间上的线性算子. 在文献 [146] 中, Koliha 推导了当 $ab = ba = 0$ 时, $a + b$ 的广义 Drazin 逆的表示. 对于 a, b, 如何给出 $a + b$ 广义 Drazin 逆的表示一直是个难题和公开的问题.

魏益民、Hartwig 等国内外专家研究了如何利用矩阵 A, B 表示矩阵和 $A + B$ 的 Drazin 逆, 得到了在两个矩阵交换、单边乘积为零等多种情况下的 Drazin 逆表示, 主要使用的技术是利用矩阵的特殊分块矩阵的 Drazin 逆表示, 并利用得到的相应结果讨论矩阵 Drazin 逆的扰动问题, 得到了一些较为深刻的结果. Castro 等在 $G^2F = FG^2 = 0$ 条件下研究了算子和 $G + F$ 的 Drazin 逆, 并由此给出了一些类型的算子分块矩阵 Drazin 逆的表示. 文献 [180] 中, 在满足条件 $PQ^2 = 0$, $Q^2 = 0$ 下 M. F. Martínez-Serrano 和 N. Castro-González 给出了两个矩阵和的 Drazin 逆的一个表示. 杨虎等给出了在 $PQP = 0, PQ^2 = 0$ 情况下 $P + Q$ 的 Drazin 逆. 最近国内外专家研究了特殊矩阵线性组合的 Drazin 逆的表示, 得到了一系列结论. 但一般情形下的矩阵和的 Drazin 逆表示还未得到.

1999 年, J. Fill 和 D. Fishkind[121] 研究 A, B 满足 $r(A + B) = r(A) + r(B)$ 时的广义逆表示.

引理 1.1.1[51] 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 则 $(AB)_D = A(BA)_D{}^2B$.

引理 1.1.2[140] 设 $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 其中 $s = \mathrm{Ind}(P)$, $h = \mathrm{Ind}(Q)$. 若 $PQ = 0$, 则

$$(P+Q)_D = \sum_{n=0}^{s-1} {Q_D}^{n+1} P^n P^\pi + Q^\pi \sum_{n=0}^{h-1} Q^n {P_D}^{n+1}.$$

注记 1.1.3 (i) 若引理 1.1.2 中 $Q^r = 0, 0 \leqslant r < h$, 则 $(P+Q)_D = \sum\limits_{n=0}^{r-1} Q^n {P_D}^{n+1}$.

(ii) 若引理 1.1.2 中 $QP = 0$, 则 $(P+Q)_D = P_D + Q_D$.

引理 1.1.4[140,结论 2.1] 令 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. 如果 $AB = 0$, A 是幂零, 则

$$(A+B)_D = \sum_{i=0}^{k-1} (B_D)^{i+1} A^i, \quad k = \mathrm{Ind}(A).$$

1.2 分块矩阵的广义逆

分块矩阵 Drazin 逆的表示问题是 Drazin 逆研究的一个经典问题, 该问题不仅在矩阵代数中有重要意义, 而且在自动化、数值分析、广义系统、马尔可夫和迭代法等诸多方面有着深刻的应用背景, 尤其在奇异线性差分方程解析解的表示中, 分块矩阵 Drazin 逆是不可或缺的工具.

1979 年, Campbell 和 Meyer 在求解一类二阶微分方程的解析解时提出了如何用矩阵的子块 A, B, C, D 来表示分块矩阵 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 的 Drazin 逆的公开问题. 1983 年, Campbell 首先解决了分块下三角矩阵 $T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ 的表示问题, 同时提出了反三角矩阵 $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ 的表示公开问题. 由此, 国内外许多专家对这两个公开问题进行了诸多研究.

由于这两个问题的困难性, 国内外许多专家只得到在一定的条件下 M 的 Drazin 逆表达式. 1996 年, Hartwig 给出了上三角矩阵群逆的表达式. 2005 年, Castro 和 Dopazo 得到了 $M = \begin{pmatrix} I & I \\ E & 0 \end{pmatrix}$ 的 Drazin 逆的表达式, 进而在条件 $CAA_D = C, A_DBC = BCA_D$ 下得到了 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ 的 Drazin 逆的表达式. 卜长江教授等在 $EF = FE$ 下给出了 $M = \begin{pmatrix} E & F \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ 的 Drazin 逆的表达式, 获得了一类微

分方程的解析解, 进而得到了 $M=\begin{pmatrix} A & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ (其中 $A^2=A$) 的 Drazin 逆的表达式. 郭丽博士在 $BD^iC=0$ 条件下给出了 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 的 Drazin 逆的表达式.

N. Castro, E. Dopazo 和 J. Robles[63] 于 2006 年又给出了矩阵 $A=\begin{pmatrix} I & P^{\mathrm{T}} \\ Q & UV^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$ 在 $V^{\mathrm{T}}Q=0$ 时的 Drazin 逆的表达式:

$$A_D=\begin{pmatrix} Z(-1) & \Sigma_0 V^{\mathrm{T}}+Z(0)P^{\mathrm{T}} \\ QZ(0) & (UV^{\mathrm{T}})_D+Q\Sigma_1 V^{\mathrm{T}}+QZ(1)P^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \tag{1.2.1}$$

其中 $v=\mathrm{Ind}((V^{\mathrm{T}}U)^2), \tau=\mathrm{Ind}(F^2)$, 且

$$\begin{aligned} \Sigma_i=&\sum_{n=0}^{v-1}(Z(2n+1+i)P^{\mathrm{T}}U+Z(2n+2+i)P^{\mathrm{T}}UV^{\mathrm{T}}U)(V^{\mathrm{T}}U)^{2n}(V^{\mathrm{T}}U)^{\pi} \\ &+(-1)^i\sum_{n=0}^{\tau-1}(P^{\mathrm{T}}Q)^{2n-i+1}\{Y_\pi(2n+1-i)P^{\mathrm{T}}U \\ &-P^{\mathrm{T}}QY_\pi(2n+2-i)P^{\mathrm{T}}U(V^{\mathrm{T}}U)_D\} \\ &\times((V^{\mathrm{T}}U)_D)^{2n+3}-(Z(i)P^{\mathrm{T}}U+Z(i-1)P^{\mathrm{T}}U(V^{\mathrm{T}}U)_D)(V^{\mathrm{T}}U)_D, \quad i=0,\ 1, \end{aligned}$$

其中 $r=\mathrm{Ind}(P^{\mathrm{T}}Q)$,

$$X_D(n)=\sum_{i=0}^{s(n)}C(n-i,i)((P^{\mathrm{T}}Q)_D)^{n-i}, \quad n\geqslant 0, \quad X_D(-1)=0, \tag{1.2.2}$$

$$Y_\pi(n)=\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^jC(2j+n,j)(P^{\mathrm{T}}Q)^j(P^{\mathrm{T}}Q)^{\pi}, \quad n\geqslant -1, \tag{1.2.3}$$

$$Z(n)=X_D(n)(P^{\mathrm{T}}Q)_D+Y_\pi(n+1), \quad n\geqslant -1. \tag{1.2.4}$$

最近, Zizong Yan[245] 利用满秩分解给出了更为简洁的 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 的 Moore-Penrose 逆的表达式. 对于上三角算子矩阵, 许庆祥教授等给出了上三角算子矩阵的指标, 而对于反三角算子矩阵 $T=\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ 在 $AB=0, CA=0$ 的情况下, 得到了 T 的 Drazin 逆的表达式及指标.

矩阵的 Schur 补和广义 Schur 补是矩阵理论中非常重要的概念, 它们有着广泛的应用, 如在数值计算、E-算法、预条件子、线性控制等问题中.

国内外许多专家研究了 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 的 Drazin 在何种条件下具 有 Babachiewicz-Schur 形式并给出了若干充分条件, 但是这些充分条件含有多个等式, 而等式之间的关系并没有研究过.

引理 1.2.1[182] 令 M_1 和 M_2 为

$$M_1=\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix},\quad M_2=\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

的复矩阵, 其中 A 和 B 为复方阵. 令 $r=\mathrm{Ind}(A)$ 和 $s=\mathrm{Ind}(B)$, 则 $\max\{r,s\}\leqslant \mathrm{Ind}(M_i)\leqslant r+s\ (i=1,2)$ 和

$$M_{D1}=\begin{pmatrix} A_D & 0 \\ S & B_D \end{pmatrix},\quad M_{D2}=\begin{pmatrix} B_D & S \\ 0 & A_D \end{pmatrix},$$

其中

$$S=(B_D)^2\sum_{i=0}^{r-1}(B_D)^iCA^iA^\pi+B^\pi\sum_{i=0}^{s-1}B^iC(A_D)^i(A_D)^2-B_DCA_D.$$

引理 1.2.2[71,推论 2.5] 令 $B\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{C}^{n\times m}$. 则

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}_D=\begin{pmatrix} 0 & (BC)_DB \\ C(BC)_D & 0 \end{pmatrix}.$$

引理 1.2.3[115] 若 M 满足 $BC=0$ 和 $BD=0$, 则

$$M_D=\begin{pmatrix} A_D & (A_D)^2B \\ \varSigma_0 & D_D+\varSigma_1B \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned}\varSigma_n=&\sum_{i=0}^{r-1}(D_D)^{i+n+2}CA^iA^\pi+D^\pi\sum_{i=0}^{s-1}D^iC(A_D)^{i+n+2}\\&-\sum_{i=0}^{n}(D_D)^{i+1}C(A_D)^{n-i+1},\quad n\geqslant 0.\end{aligned}$$

引理 1.2.4[104] 设 $M=\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$, $t=\mathrm{Ind}(A)$, $r=\mathrm{Ind}(BC)$. 如果 $AB=0$, 则

$$M_D=\begin{bmatrix} XA & (BC)_DB \\ CX & 0 \end{bmatrix},$$

其中

$$X = (BC)^{\pi} \sum_{n=0}^{r-1} (BC)^n {A_D}^{2n+2} + \sum_{n=0}^{\lceil \frac{t}{2} \rceil -1} {(BC)_D}^{n+1} A^{2n} A^{\pi}.$$

1.3　特殊矩阵线性组合的相关性质

1980 年, C. G. Khatri 主要研究的是: 若 A 是秩为 r 的 n 阶矩阵且令 $M = \dfrac{A + A^*}{2}$, 则

(i) M 是秩为 r 的幂等矩阵的充要条件是 $AA^* = A^*A = 2A - A^2$;

(ii) M 是秩为 r 的幂等矩阵且 $\mathrm{tr}_r A = 1$ 的充要条件是 A 是埃尔米特幂等矩阵.

1999 年, Jürgen Groß 给出了 $\dfrac{A + A^*}{2}$ 是幂等矩阵的等价条件是 $A \approx \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 N 是非奇异上三角矩阵, 且 $\dfrac{N + N^*}{2} = \left(\dfrac{N + N^*}{2} \right)^2$.

2000 年, J. K. Baksalary 等主要研究的内容是利用 A_1, A_2 是两个不同的非零矩阵, 且满足 $A_1^2 = A_1$, $A_2^2 = A_2$, 在 $A_1A_2 = A_2A_1$ 或者 $A_1A_2 \neq A_2A_1$ 的条件下, 给出线性组合 $A = a_1A_1 + a_2A_2$ 是幂等矩阵的等价条件.

2002 年, J. K. Baksalary 等根据 E 是非零的幂等矩阵, F 是立方幂等矩阵且 F 可以分解为 $F = F_1 - F_2$, 其中 F_1, F_2 是非零的幂等矩阵, $F_1F_2 = 0 = F_2F_1$, 指出线性组合 $D = a_1E + a_2F = a_1E + a_2F_1 - a_2F_2$ 是幂等矩阵的充要条件.

2004 年, H. Özdemir 等应用 A_1, A_2, A_3 是三个非零的不同的可交换的幂等矩阵, 给出了线性组合 $A = a_1A_1 + a_2A_2$ 或者 $A = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$ 是幂等矩阵的所有可能的情形.

2004 年, J. K. Baksalary 等利用 A_1, A_2 是非零的可交换的立方幂等矩阵, 其中 $A_2 \neq A_1$ 且 $A_2 \neq -A_1$, 从而给出 $A = a_1A_1 + a_2A_2$ 是立方幂等矩阵的等价条件. O.M. Baksalary 根据 A_1, A_2, A_3 是非零的幂等矩阵且 A_2, A_3 满足 $A_3A_2 = 0 = A_2A_3$, 从而推出线性组合 $A = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$ 是幂等矩阵的所有情况.

2005 年, J. Benítez 等利用关系式 $A_1^2 = A_1$, $A_2^k = A_2$, 在 $A_1A_2 = A_2A_1$ 的条件下, 给出线性组合 $A = a_1A_1 + a_2A_2$ 是幂等矩阵的充要条件.

2006 年, J. K. Baksalary 等根据 A_1, A_2 是非零的幂等矩阵, 在 $A_1A_2 = A_2A_1$ 或者 $A_1A_2 \neq A_2A_1$, $A_1A_2A_1 = A_2A_1A_2$, 或者 $A_1A_2 \neq A_2A_1$, $A_1A_2A_1 \neq A_2A_1A_2$ 的条件下, 给出线性组合 $A = a_1A_1 + a_2A_2$ 群对合时的等价条件.

2007 年, O. M. Baksalary 等根据 A_1, A_2, A_3 是非零的幂等矩阵且满足关系式 $A_iA_j = A_jA_i, i \neq j, i, j = 1, 2, 3$ 或者 $A_2A_3 \neq A_3A_2, A_1A_i = A_iA_1, i = 2, 3$ 或者 $A_1A_2 = A_2A_1, A_iA_3 \neq A_3A_i, i = 1, 2$, 给出线性组合 $A = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$ 是幂等矩阵的充要条件.

2008 年, M. Sarduvan 等应用 A_1, A_2 是对合矩阵且满足 $A_1 \neq \pm A_2$, $A_1A_2 = A_2A_1$, 指出线性组合 $A = a_1A_1 + a_2A_2$ 是立方幂等矩阵的等价条件, 在 $A_1 \neq \pm A_2$ 的条件下计算出 $A = a_1A_1 + a_2A_2$ 是幂等矩阵的充要条件; 还研究了 A_1, A_2 是立方幂等矩阵或者对合矩阵或者幂等矩阵, 给出线性组合 $A = a_1A_1 + a_2A_2$ 是对合矩阵的等价条件.

2008 年, J. Benítez 等利用 $A_1^2 = A_1$, $A_2^{k+1} = A_2$ 且 $A_1A_2 \neq A_2A_1$, 得到线性组合 $A = a_1A_1 + a_2A_2$ 是幂等矩阵的充要条件.

2009 年, H. Özdemir 等应用了 A_1, A_2 是非零的可交换的立方幂等矩阵且 $A_1 \neq \pm A_2$, 给出了 $A = a_1A_1 + a_2A_2$ 是立方幂等矩阵的等价条件.

2010 年, J. Benítez 等利用 $A_1^k = A_1$, $A_2^k = A_2$ 推出线性组合 $A = a_1A_1 + a_2A_2$ 的逆和群逆存在的等价条件.

2011 年, M. Tošić 等根据 A_1, A_2 是可交换的广义逆或超广义幂等矩阵, 给出 $A = a_1A_1 + a_2A_2$ 的 Moore-Penrose 广义逆的表达式.

2011 年, 刘晓冀等利用 A_1, A_2 群可逆且满足 $A_1A_2A_2^{\#} = A_2A_1A_1^{\#}$ 或者 $A_2A_2^{\#}A_1 = A_1A_1^{\#}A_2$ 或者 $A_2A_1^{\#}A_1 = A_1$, 给出 $A = a_1A_1 + a_2A_2$ 的群逆的表达式.

有关线性组合的幂等性、立方幂等性、对合性、群逆及 Moore-Penrose 广义逆还可参见文献 [5], [10], [22], [126], [157].

定义 1.3.1 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 若存在自然数 $n \geqslant 2$ 使得 $A^n = A$, 则 A 称为 n 次幂等矩阵.

定义 1.3.2 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 若存在自然数 $n \geqslant 2$ 使得 $A^n = A^*$, 则 A 称为 n 次广义幂等矩阵.

定义 1.3.3 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, 若存在自然数 $n \geqslant 2$ 使得 $A^n = A^+$, 则 A 称为 n 次超广义幂等矩阵.

矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 称为幂等矩阵, 若 $A^2 = A$; 称为三次幂等矩阵, 若 $A^3 = A$.

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是非奇异的当且仅当 $\mathcal{N}(A) = \{0\}$. 给定 $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$, k 是比 1 大的自然数, 那么 $T^k = T$ 当且仅当 T 是可对角化的且 T 的谱包含在 $\sqrt[k-1]{1} \cup 0$ 中 (证明见文献 [29]).

引理 1.3.4[42] 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为非零幂等矩阵, 则存在一个酉矩阵 $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 使得 $A = Q(I_r \oplus 0)Q^*$, 其中 $r = r(A)$.

引理 1.3.5[40] 设 D 是 $\mathbb{C}$ 上 n 阶矩阵且 $D^3 = D$, 则存在非奇异矩阵 $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 使得 $D = U(I_r \oplus -I_s \oplus 0)U^{-1}$, 其中 $r + s = r(D)$.

引理 1.3.6 设 $D\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 且 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ 使得 $\alpha\neq\beta$, 则下面两个条件是等价的:

(i) $(D-\alpha I_n)(D-\beta I_n)=0$;

(ii) 存在非奇异的矩阵 U 和 $p,q\in\{0,1,\cdots,n\}$ 使得 $D=U(\alpha I_p\oplus\beta I_q)U^{-1}$, $p+q=n$.

特别地, 如果 D 是幂等矩阵, 则 D 是一个 $\{1,0\}$-二次矩阵; 如果 D 是对合矩阵, 则 D 是一个 $\{-1,1\}$-二次矩阵.

引理 1.3.7[127] 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 非零广义投影, 则存在一个酉矩阵 $Q\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 使得 $A=Q(E\oplus 0)Q^*$, 其中 $r=r(A)$, $E\in\mathbb{C}^{r\times r}$ 是一个对角矩阵, 对角元素 e_{ii} 属于 $\left\{1,-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$.

引理 1.3.8[40] 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 为非零超广义投影, 则存在一个酉矩阵 $Q\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 使得 $A=Q(T\oplus 0)Q^*$, 其中 $r=r(A)$, $T\in\mathbb{C}^{r\times r}$ 是一个上三角矩阵, 对角元素 t_{ii} 属于 $\left\{1,-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}$, 且 $T^3=I_r$.

引理 1.3.9[3] 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $r(A)=r$, 则 $A\in\mathbb{C}_n^{EP}$ 当且仅当存在 $A\in\mathbb{C}_n^{U}$ 及非奇异 $A_1\in\mathbb{C}^{r\times r}$ 使得 $A=U(A_1\oplus 0)U^*$.

引理 1.3.10[3] 设 $K_1\in\mathbb{C}_n^{EP}, K_2\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $K_1K_2=K_2K_1$, $r(K_1)=r$, 则存在 $U\in\mathbb{C}_n^{U}$ 使得

$$K_1=U(A_1\oplus 0)U^*,\quad K_2=U(A_2\oplus D)U^*.$$

引理 1.3.11[3] 设 $K\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 可对角化, 且有两个特征值, 设为 λ,μ, 则 $K^2+\lambda\mu I=(\lambda+\mu)K$.