工科类大学数学公共课程系列教学丛书

普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学
同步学习辅导（上册）

曹殿立　苏克勤　主编

科学出版社

工科类大学数学公共课程系列教学丛书
普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学同步学习辅导

（上册）

曹殿立　苏克勤　主编

阜阳师范学院图书馆
藏书

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是《高等数学(上册)》(曹殿立、马巧云主编,科学出版社)的配套学习教材,内容依照主教材的章节顺序依次编排,按章编写.各章内容包括知识总览、典型例题、习题详解、综合练习题详解等部分.

本书注重课程内容的系统归纳与总结,突出典型例题的示范讲解.为便于读者的学习,给出了主教材全部习题及综合练习题的详尽解答.在例题和习题的解答中,注重思路分析和方法归纳,并且对于部分题目给出多种解法.本书的编写参考了最新的全国硕士研究生入学考试大纲,例题、习题数量多且题型丰富.

本书可作为高等学校非数学专业学生学习高等数学课程的辅导教材、考研复习用书或教师教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步学习辅导.上册/曹殿立,苏克勤主编.—北京:科学出版社,2017.8

工科类大学数学公共课程系列教学丛书

普通高等教育"十三五"规划教材

ISBN 978-7-03-053851-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①曹… ②苏… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第146529号

责任编辑:张中兴 梁 清/责任校对:邹慧卿

责任印制:徐晓晨/封面设计:迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017年8月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2017年11月第二次印刷 印张:19 1/4

字数:388 000

定价:43.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《高等数学同步学习辅导（上册）》

编委会

主　编　曹殿立　苏克勤

副主编　尹　丽　黄　兰　文生兰

编　者　肖　羽　张利齐　刘其佳　雷丽娟

前　　言

本书是《高等数学(上册)》(曹殿立、马巧云主编,科学出版社)的配套学习教材.

本书以系统把握知识脉络、增强综合应用能力、提高学习效果为宗旨,内容依照主教材的章节顺序依次编排,按章编写.每章内容如下:

1. **知识总览**　对教学内容系统进行地归纳总结,使读者能够全面把握知识体系与学习重点;

2. **典型例题**　对重点例题进行分类解析,对各类题型的解题思路和方法进行归纳总结,选题广泛,题型丰富;

3. **习题详解**　对教材的全部习题进行了详细解答;

4. **综合练习题详解**.

本书可作为高等学校非数学专业学生学习高等数学课程的辅导教材、考研复习用书或教师教学参考书.

参加本书编写的有河南农业大学的曹殿立、苏克勤、尹丽、肖羽、张利齐、刘其佳、雷丽娟,华北水利水电大学的黄兰和解放军信息工程大学的文生兰,最后由曹殿立统一定稿.

华北水利水电大学的张愿章教授仔细审阅了全稿,并提出了许多意见和建议,在此表示由衷的谢意!

对科学出版社为本书的顺利出版所付出的辛勤劳动表示衷心感谢!

虽然我们十分努力,但由于水平所限,难免存在疏漏与不妥之处,恳请读者批评指正.

编　者

2017年3月1日

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

目　　录

第 1 章　函数的极限与连续

知 识 总 览

一、学习重点

1. 初等函数的定义；
2. 极限的定义和性质；
3. 数列及函数极限的求法；
4. 连续函数的定义和性质；
5. 函数间断点的判定；
6. 闭区间上连续函数的性质.

二、知识体系

$$\text{函数}\begin{cases}\text{区间与邻域的定义}\\ \text{函数的定义与性质(有界性、单调性、奇偶性、周期性)}\\ \text{分段函数、反函数、复合函数的定义}\\ \text{基本初等函数、初等函数的定义}\end{cases}$$

$$\text{极限}\begin{cases}\text{极限的定义}\\ \text{极限的性质(唯一性、有界性、保号性)}\\ \text{函数极限存在的充要条件}\\ \text{极限存在准则(单调有界准则、迫敛准则)}\\ \text{极限的运算法则(四则运算、复合运算)}\\ \text{无穷小量(定义、运算性质、阶的比较)}\\ \text{极限的求法}\end{cases}$$

连续
- 某点连续函数的两个等价定义
- 区间上的连续函数的定义
- 某点连续的充要条件
- 函数间断点的分类(第一、第二类间断点)
- 连续与极限的关系
- 连续函数的运算(四则运算、复合运算)
- 初等函数在定义区间上的连续性
- 闭区间上连续函数的性质(有界性、最值性、介值定理、零点定理)

典 型 例 题

一、函数的基本概念

例 1 下列各对函数中,表示同一函数的是(　　).

(A) $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+3)}{x-1}$, $g(x)=x+3$;

(B) $f(x)=\sqrt{(x+1)(x-1)}$, $g(x)=\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}$;

(C) $f(x)=\sqrt{(2x-1)^2}$, $g(x)=|2x-1|$;

(D) $f(x)=\ln(x+1)^2$, $g(x)=2\ln(x+1)$.

解 选项(C)正确.

因为两个函数相同的充要条件是它们的定义域和对应规则分别相同. 在(A)中,因为两个函数的定义域不同,$f(x)$的定义域是$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$,$g(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$,故两个函数不同;(B)中的两个函数不同,是因为它们的定义域不同,$f(x)$的定义域是$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$,$g(x)$的定义域是$[1,+\infty)$;(D)中的两个函数不同,是因为它们定义域不同,$f(x)$的定义域是$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$,而$g(x)$的定义域是$(-1,+\infty)$.

例 2 设 $f(x)=\begin{cases}x, & |x|<1,\\ 2, & 1\leqslant x\leqslant 3,\end{cases}$ 则 $y=f(x-2)$的定义域为__________.

解 因

$$f(x-2)=\begin{cases}x-2, & |x-2|<1,\\ 2, & 1\leqslant x-2\leqslant 3\end{cases}=\begin{cases}x-2, & 1<x<3,\\ 2, & 3\leqslant x\leqslant 5,\end{cases}$$

故 $y=f(x-2)$的定义域为$(1,5]$.

例 3 设 $y=f(\lg x)$的定义域为$\left[\dfrac{1}{2},2\right]$,则 $y=f(x)$的定义域为__________.

试读结束,需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

解　$y=f(\lg x)$的定义域为$\left[\frac{1}{2},2\right]$,即对于 $y=f(\lg x)$来说,$x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$.

令 $\lg x=t$,即 $x=10^t\in\left[\frac{1}{2},2\right]$.因 $\lg x$ 是单调增加函数,故 $t\in\left[\lg\frac{1}{2},\lg 2\right]$,亦即 $y=f(t)$的定义域为$\left[\lg\frac{1}{2},\lg 2\right]$,所以 $y=f(x)$的定义域为$\left[\lg\frac{1}{2},\lg 2\right]$.

例 4　设 $f(x)=\begin{cases}2, & |x|\leqslant 2,\\ 1, & |x|>2,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$__________.

解　由题设得

$$f[f(x)]=\begin{cases}2, & |f(x)|\leqslant 2,\\ 1, & |f(x)|>2.\end{cases}$$

因任一 $x\in(-\infty,+\infty)$,$|f(x)|\leqslant 2$,故 $f[f(x)]=2$.

例 5　设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$　$g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]$ $=$__________.

解　由题设得

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0,\\ f(x)+2, & f(x)>0.\end{cases}$$

因 $f(x)\leqslant 0$ 等价于 $x\geqslant 0$,$f(x)=-x$,$f(x)>0$ 等价于 $x<0$,$f(x)=x^2$,故

$$g[f(x)]=\begin{cases}2+x, & x\geqslant 0,\\ x^2+2, & x<0.\end{cases}$$

例 6　$y=f(x)=\begin{cases}x^2, & -2\leqslant x\leqslant 0,\\ x^2-4, & 0<x<2\end{cases}$ 的反函数 $f^{-1}(x)$为__________.

解　当$-2\leqslant x\leqslant 0$ 时,$y=x^2$,由此得 $x=-\sqrt{y}$,$0\leqslant y\leqslant 4$;当 $0<x<2$ 时,$y=x^2-4$,由此得 $x=\sqrt{y+4}$,$-4<y<0$.

故所求反函数 $f^{-1}(x)$为

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x+4}, & -4<x<0,\\ -\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$$

二、求极限的方法

1. 利用极限的四则运算法则求极限

极限的四则运算法则适用于**有限个**函数(或数列)的四则运算.

例 7　求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-3x+2}$.

解 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-6x+5}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-5}{x-2}=4.$

例 8 求$\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{5+x^2}-3}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{5}}$.

解
$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{5+x^2}-3}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{5}}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{5+x^2}-3)(\sqrt{5+x^2}+3)(\sqrt{1+2x}+\sqrt{5})}{(\sqrt{1+2x}-\sqrt{5})(\sqrt{1+2x}+\sqrt{5})(\sqrt{5+x^2}+3)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-4)(\sqrt{1+2x}+\sqrt{5})}{(2x-4)(\sqrt{5+x^2}+3)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(\sqrt{1+2x}+\sqrt{5})}{2(\sqrt{5+x^2}+3)}=\frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

例 9 求$\lim\limits_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

解
$$\lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to-8}\frac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)(\sqrt[3]{8^2}-\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{8^2}-\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})(\sqrt{1-x}+3)}$$
$$=\lim_{x\to-8}\frac{(-x-8)(\sqrt[3]{8^2}-\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(x+8)(\sqrt{1-x}+3)}$$
$$=-\lim_{x\to-8}\frac{\sqrt[3]{8^2}-\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1-x}+3}=-\frac{3\sqrt[3]{8^2}}{6}=-2.$$

例 10 求$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$($m,n$ 为正整数).

解 令 $t=x^{\frac{1}{nm}}$,得 $x=t^{nm}$. 当 $x\to1$ 时,$t\to1$,于是原极限化为
$$\lim_{t\to1}\frac{t^n-1}{t^m-1}=\lim_{t\to1}\frac{(t-1)(t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots+t+1)}{(t-1)(t^{m-1}+t^{m-2}+\cdots+t+1)}=\frac{n}{m}.$$

注 例 7～例 10 为$\frac{0}{0}$型极限. 方法:约去分子、分母中的“零因式”,将未定式化为确定式,从而求出极限.

例 11 求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x+2}{6x^3+3x^2-1}$.

解 用 x^3 去除分子与分母,得
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x+2}{6x^3+3x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{6+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}}=\frac{0}{6}=0.$$

例 12　求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^4+n-1}{2n^4+2n-1}$.

解　用 n^4 去除分子与分母，得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^4+n-1}{2n^4+2n-1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n^3}-\dfrac{1}{n^4}}{2+\dfrac{2}{n^3}-\dfrac{1}{n^4}}=\frac{1}{2}.$$

例 13　求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

解　用 3^{n+1} 去除分子与分母，得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}+1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}}=\frac{0+1}{0+\dfrac{1}{3}}=3.$$

例 14　求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}$.

解　用 $e^{\frac{1}{x}}$ 去除分子与分母，得

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}}-1}{\dfrac{x}{e^{\frac{1}{x}}}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1.$$

例 15　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^3-4x^2+5}}{\sqrt{9x^2+1}+2x+\sin x}$.

解　分子、分母同除以 x，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3-4x^2+5}}{\sqrt{9x^2+1}+2x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8-\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^3}}}{\sqrt{9+\dfrac{1}{x^2}}+2+\dfrac{\sin x}{x}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt{9}+2}=\frac{2}{5}.$$

注　例 11～例 15 是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型极限. 方法：用分式的最高阶函数去除分子与分母，将未定式化为确定式，从而求出极限.

例 16　求 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

解　$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)\xlongequal{\text{通分}}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1+x)-2}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{1-x^2}=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{1+x}=-\dfrac{1}{2}.$

例 17 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-1}+x)$.

解 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-1}+x)\xlongequal{\text{分子有理化}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2-1}+x)(\sqrt{x^2-1}-x)}{\sqrt{x^2-1}-x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2-1)-x^2}{\sqrt{x^2-1}-x}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}-x}=0.$$

例 18 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})$.

解 $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})$

$$\xlongequal{\text{分子有理化}}\lim_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}})}{(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}})}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+3\sqrt{n})-(n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}=2.$$

注 例 16～例 18 是$\infty-\infty$型极限. 方法:通过通分、有理化等方法化为$\dfrac{0}{0}$,$\dfrac{\infty}{\infty}$型极限或确定式,再进一步求解.

例 19 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2-1}-x)$.

解 这是$\infty\cdot 0$型未定式,将分子有理化化为$\dfrac{\infty}{\infty}$型极限再进一步计算.

$$\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2-1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x[(x^2-1)-x^2]}{\sqrt{x^2-1}+x}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1}=-\frac{1}{2}.$$

例 20 求$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

解 因

$$f(0-0)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=2+\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{-x}=2-1=1,$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2}{e^{\frac{4}{x}}}+\frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{4}{x}}}}{\frac{1}{e^{\frac{4}{x}}}+1}+\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=0+1=1,$$

故$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1$.

例 21　求$\lim\limits_{x\to 0}x\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$.

解　因

$$\lim_{x\to 0}x\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}x\sqrt{\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos\frac{x}{2}}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{-\sin\frac{x}{2}}=-2\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=-2,$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin\frac{x}{2}}=2\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=2,$$

故$\lim\limits_{x\to 0}x\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$不存在.

注　例 20 和例 21 是含有绝对值的极限,通常需要通过左右极限将绝对值符号去掉,再求出极限.

例 22　求$\lim\limits_{n\to +\infty}(1+a)(1+a^2)(1+a^4)\cdots(1+a^{2^n})$,其中$|a|<1$.

解　多次使用恒等式$(x-y)(x+y)=x^2-y^2$化简,可得

$$\begin{aligned}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})&=\frac{1}{1-a}(1-a)(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})\\&=\frac{1}{1-a}(1-a^{2^{n+1}}).\end{aligned}$$

当$n\to +\infty$时,$2^{n+1}\to +\infty$,而$|a|<1$,故$a^{2^{n+1}}\to 0$. 从而

$$\begin{aligned}\lim_{n\to +\infty}(1+a)(1+a^2)(1+a^4)\cdots(1+a^{2^n})&=\lim_{n\to +\infty}\frac{1}{1-a}(1-a^{2^{n+1}})\\&=\frac{1}{1-a}(1-0)=\frac{1}{1-a}.\end{aligned}$$

例 23 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^{2n}}$,其中 $|a|<1$, $|b|<1$.

解 利用等比数列的求和公式,得

$$1+a+a^2+\cdots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a},$$

$$1+b+b^2+\cdots+b^{2n}=\frac{1-b^{2n+1}}{1-b},$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^{2n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\dfrac{1-b^{2n+1}}{1-b}}=\frac{1-b}{1-a}\lim_{n\to+\infty}\frac{1-a^{n+1}}{1-b^{2n+1}}=\frac{1-b}{1-a}.$$

例 24 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+2+\cdots+k}$.

解 $$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+\cdots+k}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(1+k)}=2\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{1+k}\right)$$

$$=2\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=2\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2.$$

例 25 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$.

解 当 $x=0$ 时,$\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=1$.

当 $x\neq0$ 时,对于充分大的正整数 n,有 $0<\left|\dfrac{x}{2^n}\right|<1$,所以 $\sin\dfrac{x}{2^n}\neq0$.

多次使用倍角公式 $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ 化简,可得

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{1}{\sin\dfrac{x}{2^n}}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}=\frac{1}{\sin\dfrac{x}{2^n}}\cdot\frac{\sin x}{2^n}.$$

故

$$\lim_{n\to+\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sin\dfrac{x}{2^n}}\cdot\frac{\sin x}{2^n}\right)=\frac{\sin x}{x}\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{x}{2^n}}{\sin\dfrac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=\begin{cases}1, & x=0,\\ \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq0.\end{cases}$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com