高等数学训练教程

（普通专升本）

张新德　主编

科学出版社

高等数学训练教程

（普通专升本）

张新德　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

编者通过五年对考生精心的辅导和对历年真题深入的分析研究，再对照浙江省考试院制定的考试大纲，帮助考生理解并掌握高等数学知识，力争取得优秀的成绩.

本书紧扣大纲、内容翔实、重点突出，注重基础知识复习和解题能力训练；对考试所涵盖的题型合理分类，并示范诠释. 通过内容讲解和经典例题解析，注重培养考生综合运用知识的能力；每个章节后附有针对性的习题和参考答案，方便考生练习并及时检验复习效果.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学训练教程：普通专升本/张新德主编. —北京：科学出版社，2016
ISBN 978-7-03-048768-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①高等数学-成人高等教育-习题集-升学参考资料 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 131985 号

责任编辑：马琦杰 杨 阳 / 责任校对：王万红
责任印制：吕春珉 / 封面设计：彬 彬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
三河市骏杰印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 12 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2017 年 8 月第二次印刷 印张：18 3/4
字数：440 000

定价：38.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈骏杰〉）
销售部电话 010-62136230 编辑部电话 010-62151821

前　言

普通专升本入学统一考试，是检验考生是否真正具备大学专科毕业生水平和继续深造能力的考试，也是选拔品学兼优的应届专科毕业生进入本科阶段继续学习深造的重要依据．多年来有很多学子通过这种形式的选拔考试圆了他们的本科梦，实现了他们人生的第二次飞跃．

为了使考生更好地理解高等数学知识内容，力争取得更好的成绩，编者通过五年对考生精心的辅导和对往年真题深入的分析研究，再对照浙江省考试院制定的考试大纲，发现数学试题表述形式虽然千变万化，但只要理解并掌握核心知识点，成功的钥匙就掌握在考生手中．

本书内容编排特点如下．

（1）紧扣大纲、内容翔实、重点突出，注重基础知识复习和解题能力训练，例题和习题贴近考题，实用性、针对性强，有利于考生提高复习效率和考试通过率．对考试所涵盖的题型合理分类，并示范诠释．

（2）通过内容讲解和经典例题解析，注重培养考生综合运用知识的能力．每个章节后附有针对性的习题和参考答案，方便考生练习并及时检验复习效果．

（3）用真题帮助学生确定复习方向．

本书以历年专升本辅导班的讲义为蓝本，认真聆听建议，参阅大量书籍，收集相关资料，反复修改而成，能很好地帮助学生理解高等数学中的知识，提升考试成绩．本书也可以作为高等数学辅导教程．

由于编写时间仓促，书中难免存在不足或错误，恳请各界人士批评指正．

目　　录

第一章　函数、极限与连续

【考试内容及要求】

1. 函数

（1）理解函数的概念，会求函数的定义域、表达式及函数值，会作出一些简单的分段函数图像.

（2）掌握函数的单调性、奇偶性、有界性和周期性.

（3）理解函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间的关系（定义域、值域、图像），会求单调函数的反函数.

（4）掌握函数的四则运算与复合运算；掌握复合函数的复合过程.

（5）掌握基本初等函数的性质及其图像.

（6）理解初等函数的概念.

（7）会建立一些简单实际问题的函数关系式.

2. 极限

（1）理解极限的概念（只要求极限的描述性定义），能根据极限概念描述函数的变化趋势. 理解函数在一点处极限存在的充分必要条件，会求函数在一点处的左极限与右极限.

（2）理解极限的唯一性、有界性和保号性，掌握极限的四则运算法则.

（3）理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的性质，无穷小量与无穷大量的关系；会比较无穷小量的阶（高阶、低阶、同阶和等价）；会运用等价无穷小量替换求极限.

（4）理解极限存在的两个收敛准则（夹逼准则与单调有界准则），掌握两个重要极限. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$，并能用其求函数的极限.

3. 连续

（1）理解函数在一点处连续的概念，函数在一点处连续与函数在该点处极限存在的关系；会判断分段函数在分段点的连续性.

（2）理解函数在一点处间断的概念，会求函数的间断点，并会判断间断点的类型.

（3）理解“一切初等函数在其定义区间上都是连续的”，并会利用初等函数的连续性求函数的极限.

（4）掌握闭区间上连续函数的性质：最值定理（有界性定理），介值定理（零点存在定理）；会运用介值定理推证一些简单命题.

1.1 函　　数

【知识要点解读】

函数是高等数学研究的对象，它反映了变量间的联系以及它们的依赖关系．表达函数的方式多种多样，其本质是数集间的一个映射．定义域和变量的对应法则是函数的两要素．

1．函数的定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，$\forall x \in D$，按照对应法则 f，y 有唯一确定值与之对应，称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，D 为定义域，$f(D)$ 为值域．

（1）需要熟记以下简单函数的定义域．

简单函数的定义域

函数	定义域要求
$y=\frac{1}{x}$	$x \neq 0$，即分式的分母不能为零， $D:(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
$y=\sqrt[2n]{x}$	$x \geqslant 0$，即偶次根号下被开方解析式为非负， $D:[0,+\infty)$
$y=\log_a x$	$x>0$，即对数函数的真数应大于零， $D:(0,+\infty)$
$y=\tan x$	$D: x \neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$
$y=\cot x$	$D: x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$
$y=\arcsin x$（或 $y=\arccos x$）	$D:[-1,1]$

（2）分段函数是特别要注意的一类函数，它是用几个不同解析式“分段”表示的一个函数．分段函数的定义域是各段定义域的并集．

2．函数的特性

1）奇偶性

定义：若 $x \in D$，有 $-x \in D$，$f(x)=-f(-x)$，则 $f(x)$ 为奇函数；

若 $x \in D$，有 $-x \in D$，$f(x)=f(-x)$，则 $f(x)$ 为偶函数．

几个重要结论：

（1）两个奇函数的和或差仍是奇函数；两个奇函数的积、商（除数不为 0）为偶函数；两个偶函数的和、差、积、商（除数不为 0）仍是偶函数；一个奇函数与一个偶函数的积、商（除数不为 0）为奇函数．

（2）$f(x)$ 为可导函数，$f(x)$ 为奇（偶）函数 $\Rightarrow f'(x)$ 为偶（奇）函数．

（3）$f(x)$ 为任意函数，$x \in(-l,l)$，则 $f(x)+f(-x)$ 为偶函数，$f(x)-f(-x)$ 为奇函数．

（4）$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$（$f(x)$ 为偶函数），$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0$（$f(x)$ 为奇函数）．

2）单调性

定义：$\forall x_1,x_2\in D, x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$，则 $f(x)$ 严格单调增加；

$\forall x_1,x_2\in D, x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$，则 $f(x)$ 严格单调减少.

以下列出 8 个常用的单调函数.

常用的单调函数

函数及其单调性	对应的反函数及其单调性
e^x 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加	$\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加
$\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加	$\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上单调增加
$\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上单调减少	$\arccos x$ 在 $[-1,1]$ 上单调减少
$\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加	$\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加

判别方法：

（1）用定义判别；

（2）用导数判别：$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 严格单调增加；$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 严格单调减少.

3）有界性

定义：$\exists M>0$，$\forall x\in D$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有界.

以下列出 6 个常用的有界函数.

常用的有界函数

函数		定义域
$\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$	$\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$	$x\in(-\infty,+\infty)$
$\lvert\arcsin x\rvert\leqslant \frac{\pi}{2}$	$\lvert\arccos x\rvert\leqslant \pi$	$x\in[-1,1]$
$\lvert\arctan x\rvert<\frac{\pi}{2}$	$\lvert\operatorname{arccot} x\rvert<\pi$	$x\in(-\infty,+\infty)$

4）周期性

定义：$\exists T>0$，有 $f(x+T)=f(x)$，则 $f(x)$ 以 T 为周期.

几个重要结论：

（1）$f(x)$ 可导，且以 T 为周期，则 $f'(x)$ 也以 T 为周期.

（2）$f(x)$ 连续，且以 T 为周期，则 $\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$.

3. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 存在反函数，求其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的一般步骤如下：

（1）把函数 $y=f(x)$ 看作是方程 $y-f(x)=0$，从该方程解出 $x=f^{-1}(y)$；

（2）在表达式 $x=f^{-1}(y)$ 中，把 x、y 互换，便得所求反函数 $y=f^{-1}(x)$；

（3）确定反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域（直接函数 $y=f(x)$ 的值域就是反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域）.

【例 1】 求下列函数的定义域.

（1）$y=\arctan\dfrac{1}{x}+\sqrt{2-x}$；（2）$y=\ln(\ln x)$.

解：（1）由题意可知，$\begin{cases}x\neq 0\\2-x\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow(-\infty,0)\cup(0,2]$；

（2）由题意可知，$\begin{cases}x>0\\\ln x>0\end{cases}\Rightarrow x>1$，即 $(1,+\infty)$.

【例 2】 已知 $f(x-2)=x^2-2x+3$，求 $f(x+3)$.

解：令 $t=x-2$，则 $x=t+2$，有

$$f(t)=(2+t)^2-2(2+t)+3=t^2+2t+3,$$

则

$$f(x+3)=(x+3)^2+2(x+3)+3=x^2+8x+18.$$

【例 3】 判断函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性.

分析：判断函数的奇偶性通常有两种方法：用定义或用性质判断．在讨论函数的奇偶性时，一定注意先讨论函数的定义域是否关于原点对称.

解：函数的定义域 $(-\infty,+\infty)$，

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln\frac{(x+\sqrt{x^2+1})(-x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}\text{（分子有理化）}$$

$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-f(x),$$

所以该函数为奇函数.

【例 4】 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1\\x, & x\geqslant 1\end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<0\\x^2-1, & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f[\varphi(x)]$.

解：可用分析法和图示法解决，

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1\\\varphi(x), & \varphi(x)\geqslant 1\end{cases}.$$

（1）当 $\varphi(x)<1$ 时，

当 $x<0$，$\varphi(x)=x+2<1$，即 $\begin{cases}x<0\\x<-1\end{cases}\Rightarrow x<-1$，

当 $x\geqslant 0$，$\varphi(x)=x^2-1<1$，即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\x^2<2\end{cases}\Rightarrow 0\leqslant x<\sqrt{2}$；

（2）当 $\varphi(x)\geqslant 1$ 时，

当 $x<0$，$\varphi(x)=x+2\geqslant 1$，即 $\begin{cases}x<0\\x\geqslant -1\end{cases}\Rightarrow -1\leqslant x<0$，

当 $x\geqslant 0$，$\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1$，即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\x^2\geqslant 2\end{cases}\Rightarrow x\geqslant\sqrt{2}$；

综上所述，$f[\varphi(x)]=\begin{cases} e^{x+2}, & x<-1 \\ x+2, & -1\leqslant x<0 \\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2} \\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2} \end{cases}$.

【例 5】 求函数 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2-1})$（$x\geqslant1$）的反函数.

解： 由原式两边取以 a 为底的指数函数，得

$$a^y=x+\sqrt{x^2-1},$$

$$a^{-y}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}=x-\sqrt{x^2-1},$$

以上两式相加，得

$$2x=a^y+a^{-y},\quad x=\frac{a^y+a^{-y}}{2},$$

所求的反函数为

$$y=\frac{a^x+a^{-x}}{2},\quad x\in[0,+\infty).$$

练习题

1. 设在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上 $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数，且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均不恒为零，则下列函数：(1) $f(x)\cdot g(x)$，(2) $f(x)+g(x)$，(3) $f[g(x)]$，(4) $g[f(x)]$，(5) $f[f(x)]$，(6) $g[g(x)]$ 为偶函数的是________；为奇函数的是________.

2. 选择题.

(1) 若 $f(x)$ 为连续奇函数，则 $f(\sin x)$ 为（　　）.

(A) 奇函数　　(B) 偶函数

(C) 非负偶函数　　(D) 既不是非正的函数，也不是非负的函数

(2) 若 $f(x)$ 为连续奇函数，则 $f(\cos x)$ 为（　　）.

(A) 奇函数　　(B) 偶函数

(C) 非负偶函数　　(D) 既不是非正的函数，也不是非负的函数

(3) 设 $g(x)=f(x)-f(-x)$，则 $g(x)$ 为（　　）.

(A) 奇函数　　(B) 偶函数

(C) 非负偶函数　　(D) 既不是非正的函数，也不是非负的函数

(4) 设 $f(x)$ 为连续偶函数，则 $f(x-\sin x)$ 为（　　）.

(A) 奇函数　　(B) 偶函数

(C) 非负偶函数　　(D) 既不是非正的函数，也不是非负的函数

3. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=2^x+\frac{1}{2^x}$；(2) $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x}$；(3) $f(x)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}$（$a>0,a\neq1$）.

4．设 $f(x)=\begin{cases}x^2,|x|\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{x^2},|x|>1,\end{cases}$ ， $g(x)=\ln x$ ，求 $f[g(x)]$.

练习题参考答案

1．偶函数是：（3），（4），（5）；奇函数是：（1），（6）.

2．（1）（A）.（2）（B）.（3）（A）.（4）（B）.

3．（1）偶函数.（2）奇函数.（3）奇函数.

4． $f[g(x)]=\begin{cases}\ln^2 x, & \dfrac{1}{e}\leqslant x\leqslant e\\ \dfrac{1}{\ln^2 x}, & 0<x<\dfrac{1}{e}, x>e\end{cases}$.

1.2 极限的定义、性质及无穷小

【知识要点解读】

高等数学中的许多概念，如连续、导数、积分、级数的敛散性等，都是用极限来定义的.（因此，它们都可以作为求极限的一种方法.）深入理解极限概念要抓住两点：一是自变量的变化过程；二是函数的变化趋势.

1．数列的极限

对数列的极限应注意理解以下几点：

（1）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 表示项数 n 无限增大时，通项 x_n 变化的总趋势——无限逼近常数 a.

（2）数列 $\{x_n\}$ 若收敛，则它必为有界数列；反之，有界数列未必收敛.

（3）数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是 $\{x_n\}$ 的任一子数列都收敛，且有相同的极限.

（4）几个经常用到的数列极限： $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$ （ C 是常数）， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^a}=0(a>0)$ ， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$ ， $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0(|q|<1)$ ， $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$ ， $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ ， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0(a>0)$.

2．函数的极限

对函数的极限应注意理解以下几点：

（1）函数的极限是函数在自变量的某一变化过程中的变化趋势，如果函数的变化趋势是固定的，则函数的极限存在；若函数的变化趋势不固定，则函数的极限就不存在．这个变化趋势与自变量的变化过程及函数结构有关，而与函数在这点处是否有定义无关.

例如，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，这是第一个重要极限，其中函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 处无定义；

又如 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$（无穷小量与有界函数的积仍是无穷小量）.

虽然是同一个函数求极限，但自变量的变化过程不同，导致极限值也不同.

（2）讨论函数的极限时，在什么情况下要考虑左、右极限？一般说，讨论函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限，都应先看一看单侧极限的情况. 如果当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 在 x_0 的两侧变化趋势一致，则不必分开研究；如果两侧变化趋势可能有差别，就应分别研究左、右极限.

常见的有如下几种情况：

① 求分段函数在分段点处的极限时，若函数在分段点左右两侧的表达式不一样，则必须研究左右极限.

② 有些反三角函数、指数函数、三角函数在特殊点处的左右极限不一样. 例如，遇有 $\lim\limits_{x\to 0}a^{\frac{1}{x}}$，$\lim\limits_{x\to\infty}a^{x}$，$\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 等，需考虑左右极限.

（3）极限不存在的几种情况及典型例子：

① 趋于 ∞：$\lim\limits_{x\to\infty}x^2$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}$ 等.

② 振荡：$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$，$\lim\limits_{x\to 1}\cos\dfrac{1}{x-1}$ 等.

③ 左、右极限不相等：

$f(x)=\begin{cases}x-1, x\leqslant 0\\ x+1, x>0\end{cases}$，因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在；

$f(x)=\arctan x$，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

3. 无穷小与无穷大

无穷大定义及其性质

	内容	说明
定义	若当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大. 记 $\lim f(x)=\infty$	无穷大必为无界函数，而无界函数不一定是无穷大 无穷大可分为 $+\infty$，$-\infty$ 和 ∞
性质	（1）若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小 （2）若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大	

提示：常用的无穷大量由低阶到高阶排序：

$$\ln^{\lambda} n\,(\lambda\geqslant 1)，\ n^{a}(a>0)，\ a^{n}(a>1)，\ n!，\ n^{n}.$$

无穷小定义及其性质

	内容	说明
定义	若函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时极限为零，则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小	无穷小是一个变量，“0”是作为无穷小的唯一常数，任何一个很小的正数都不能作为无穷小
性质	（1）有限个无穷小的和仍为无穷小 （2）有界函数与无穷小的乘积是无穷小 （3）常数与无穷小的乘积为无穷小 （4）有限个无穷小的乘积仍为无穷小	性质（2）可用来求解一类特殊类型的极限．无穷多个无穷小的和、积不一定是无穷小

提示：利用“有界变量乘以无穷小仍是无穷小”的性质，是求极限问题的一个技巧，如 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$；利用性质“若 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=a,\ a\neq\infty$，且 $\lim g(x)=0$，则 $\lim f(x)=0$”等都是求极限常用的方法.

无穷小的比较

名称	定义
高阶无穷小 $o(\alpha)$	如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，就说 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$
低阶无穷小	如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，就说 β 是比 α 低阶的无穷小
同阶无穷小	如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq\infty$，就说 β 与 α 是同阶的无穷小
等价无穷小	如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，就说 β 与 α 是等价的无穷小，记作 $\beta\sim\alpha$
k 阶无穷小 $o(\alpha^k)$	如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq\infty$，$k>0$，就说 β 是 α 的 k 阶无穷小

无穷小替换定理：若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

对 $\dfrac{0}{0}$ 型的未定式作等价无穷小替换时，必须指出：对分子、分母的乘积因子可以作等价无穷小的代换，但当分子、分母是多项之和的时候，对它们的某一项不能作等价无穷小的代换.

常用的等价无穷小

$x\to0$ 时，$\sin x\sim x$、$\tan x\sim x$、$\arcsin x\sim x$、$\arctan x\sim x$、$\ln(1+x)\sim x$、$e^x-1\sim x$、$a^x-1\sim x\ln a$、$(1+x)^a-1\sim ax\,(a\in\mathbf{R})$、$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$ 等

一般形式，如 $f(x)\to0$，有：$\ln[1+f(x)]\sim f(x)$，$[1+f(x)]^a-1\sim af(x)$

差函数中常用的等价无穷小：

$\tan x-\sin x\sim\dfrac{x^3}{2}$、$x-\sin x\sim\dfrac{x^3}{6}$、$\tan x-x\sim\dfrac{x^3}{3}$、$\arcsin x-x\sim\dfrac{x^3}{6}$、$x-\arctan x\sim\dfrac{x^3}{3}$.

4. 两个重要极限及其本质形式

两个重要极限

基本形式	变形	要点说明
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$	设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin[f(x)]}{f(x)}=1$	$\dfrac{0}{0}$ 型极限，分子、分母中的 $f(x)$ 形式必须完全一致，包括系数和正负号，且 $f(x)$ 必须是 $x\to x_0$ 时的无穷小
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$	设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[1+\dfrac{1}{f(x)}\right]^{f(x)}=e$	1^∞ 型极限，底和指数中的 $f(x)$ 形式必须完全一致，包括系数和正负号，且 $f(x)$ 必须是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$
$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$	设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=e$	1^∞ 型极限，底和指数中的 $f(x)$ 形式必须完全一致，包括系数和正负号，且 $f(x)$ 必须是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$

5. 求极限的常用方法

（1）利用初等函数的连续性：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

（2）利用极限的四则运算法则（有时还应先进行代数运算、三角运算后，再利用极限四则运算法则）.

（3）利用两个重要极限.

（4）对于分式的极限，如果分母的极限为零，而分子的极限不为零，则分式的极限为∞.

（5）利用无穷小的性质和无穷小与无穷大的关系等.

（6）熟悉下列极限：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}0, & n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m\\ \infty, & n>m\end{cases}$$ （当作公式使用）.

（7）对于分段函数在分段点处的极限，当函数在分段点两侧表达式不一致时，应该利用左、右极限判定.

（8）在计算极限时，应该注意利用“等价无穷小替换”以简化运算.

以上是求极限的常用方法，由于极限贯穿于微积分的始终，以后还会出现极限的其他求法. 如：利用导数定义求极限；用洛必达法则求未定式的极限；用定积分的定义求极限；用数项级数收敛的必要条件求极限等.

1.2.1　极限概念

【例 1】 讨论下列数列的极限问题：

（1）若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$和$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$都存在，且$x_n>y_n$，是否一定有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n>\lim\limits_{n\to\infty}y_n$？

（2）若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$不存在，问极限$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$存在吗？

（3）若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$和$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$都不存在，问极限$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$是否一定不存在？

（4）若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，是否对任何数列$\{y_n\}$，都有$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=0$.

解：（1）不一定，如$x_n=\dfrac{2}{n}$，$y_n=\dfrac{1}{n}$满足条件，但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$；

（2）极限肯定不存在．可用反证法证明．

（3）未必一定不存在，如$x_n=(-1)^n$，$y_n=(-1)^{n+1}$满足条件，但$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=0$.

（4）未必，如$x_n=\dfrac{1}{n}$，$y_n=n^2$，则$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\infty$；但如果$\{y_n\}$有界，则有$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=0$存在.

【例 2】 几个值得注意的极限.

（1）$\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}=\infty$（错）.

正确的是：$\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$；$\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$.

（2）$\lim\limits_{x\to0}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$（错）.

正确的是：$\lim\limits_{x\to0^-}\arctan\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$；$\lim\limits_{x\to0^+}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$.

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}e^x=\infty$（错）.

正确的是：$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$；$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$（错）.

正确的是：$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$；$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$.

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}=1$（错）.

正确的是：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}=1$；$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}=-1$.

【例 3】 求$\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})$.

解：由于$\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}=-2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$（和差化积），

当$x\to+\infty$时，$\sin\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\leqslant1$，

而$0\leqslant\left|\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|=\left|\sin\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right|\leqslant\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$，

故　$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=0$，由“无穷小×有界函数=无穷小”，于是原式等于零.

【例 4】　求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+\cos x}\cdot\dfrac{\sin x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}\cdot\dfrac{x}{\ln(1+x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}+x\sin\frac{1}{x}\right)\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

【例 5】　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-x\arctan x}{e^x+x}$.

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-x\arctan x}{e^x+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{x}{e^x}\arctan x}{1+\dfrac{x}{e^x}}=1$，（因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$）

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-x\arctan x}{e^x+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{e^x}{x}-\arctan x}{\dfrac{e^x}{x}+1}=\dfrac{\pi}{2}$.（因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}=0$）

所以，极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-x\arctan x}{e^x+x}$ 不存在.

【例 6】　求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

解：因为当 $x\to0^+$ 时，$e^{1/x}\to+\infty$；当 $x\to0^-$ 时，$e^{1/x}\to0$.

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2/e^{4/x}+(e^{1/x}/e^{4/x})}{1/e^{4/x}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1.$$

所以，$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1$.

1.2.2　运用四则运算法则求极限

在使用极限的四则运算法时，我们要注意：只有函数极限存在的条件下，才能运用这些法则，关于商的极限运算法则，要注意分母的极限不能为零. 极限的四则运算法则可以推广到有限个函数情况，但对无限个函数就不一定成立了.

【例 7】　$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$__________.

解：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}$ 为 $\dfrac{0}{0}$ 型，分子有理化，