



教育部高等农林院校理科基础课程  
教学指导委员会推荐示范教材



高等农林教育“十三五”规划教材

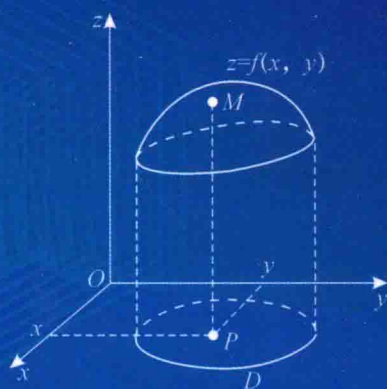
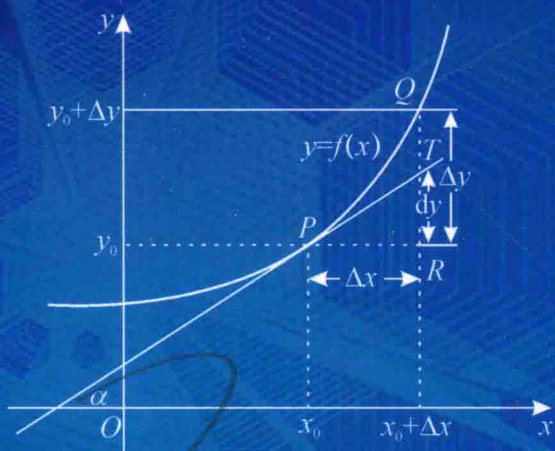
# 高等数学

第2版

College Mathematics  
College Mathematics

S

高孟宁 左振钊 主编



中国农业大学出版社

CHINA AGRICULTURAL UNIVERSITY PRESS



教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会  
推荐示范教材



高等农林教育

# 高等数学

## College Mathematics

第2版

高孟宁 左振钊 主编

中国农业大学出版社

· 北京 ·

## 内 容 简 介

本书是为高等农林院校高等数学(少学时)教学所编,内容为函数与极限、导数与微分、中值定理及应用、不定积分与定积分、多元函数微积分、常微分方程及无穷级数简介,理论体系、章节安排与传统高等数学教材一致。本书在阐述理论时,在不失严谨性的要求下,尽可能使语言通俗易懂,便于学生学习和阅读;在例题和习题中,增加了重要知识点的实际背景,章后设置了内容总结和学习指导,还有十余篇关于微积分发展史和著名数学家的介绍(二维码),可供学生阅读和参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

高等数学/高孟宁,左振钊主编.—2版.—北京:中国农业大学出版社,2017.8  
ISBN 978-7-5655-1812-6

I. ①高… II. ①高…②左… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 100084 号

书 名 高等数学 第2版

作 者 高孟宁 左振钊 主编

策划编辑 张秀环

封面设计 郑 川

出版发行 中国农业大学出版社

社 址 北京市海淀区圆明园西路2号

电 话 发行部 010-62818525,8625

编辑部 010-62732617,2618

网 址 <http://www.cau.edu.cn/caup>

经 销 新华书店

印 刷 北京时代华都印刷有限公司

版 次 2017年8月第2版 2017年8月第1次印刷

规 格 787×1092 16开本 17印张 420千字

定 价 39.00元

责任编辑 韩元凤

责任校对 王晓凤

邮政编码 100193

读者服务部 010-62732336

出 版 部 010-62733440

E-mail cbsszs@cau.edu.cn

图书如有质量问题本社发行部负责调换

教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会  
推荐示范教材编审指导委员会

主 任 江树人

副主任 杜忠复 程备久

委 员(以姓氏笔画为序)

王来生 王国栋 方炎明 李宝华 张文杰 张良云  
杨婉身 吴 坚 陈长水 周训芳 周志强 高孟宁  
戚大伟 梁保松 曹 阳 焦群英 傅承新 林家栋

教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会  
推荐数学类示范教材编审指导委员会

主 任 高孟宁

委 员(以姓氏笔画为序)

王来生 石 峰 卢恩双 吴 坚 杜忠复 张良云  
杜晓林 孟 军 房少梅 梁保松 惠淑荣

## 第1版编写委员会

**主 编** 高孟宁(北京林业大学)  
徐 梅(东北农业大学)

**副主编** 张长勤(安徽农业大学)  
惠淑荣(沈阳农业大学)  
王静海(河北北方学院)  
黄燕苹(西南大学)  
邹锐标(湖南农业大学)  
游 雄(南京农业大学)  
马少军(青岛农业大学)

**编写人员**(按姓氏笔画排列)

马少军(青岛农业大学)  
王静海(河北北方学院)  
石立新(四川农业大学)  
孙 燕(内蒙古民族大学)  
白春阳(河南科技学院)  
张长勤(安徽农业大学)  
张永祥(沈阳农业大学)  
刘继发(河北科技师范学院)  
邹锐标(湖南农业大学)  
陈晓昕(北京农学院)  
罗宝华(北京林业大学)  
胡卿叶(山西农业大学)  
高孟宁(北京林业大学)  
徐 梅(东北农业大学)  
黄燕苹(西南大学)  
游 雄(南京农业大学)  
惠淑荣(沈阳农业大学)

# 出版说明

在教育部高教司农林医药处的关怀指导下,由教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会(以下简称“基础课教指委”)推荐的本科农林类专业数学、物理、化学基础课程系列示范性教材现在与广大师生见面了。这是近些年全国高等农林院校为贯彻落实“质量工程”有关精神,广大一线教师深化改革,积极探索加强基础、注重应用、提高能力、培养高素质本科人才的立项研究成果,是具体体现“基础课教指委”组织编制的相关课程教学基本要求的物化成果。其目的在于引导深化高等农林教育教学改革,推动各农林院校紧密联系教学实际和培养人才需求,创建具有特色的数理化精品课程和精品教材,大力提高教学质量。

课程教学基本要求是高等学校制定相应课程教学计划和教学大纲的基本依据,也是规范教学和检查教学质量的依据,同时还是编写课程教材的依据。“基础课教指委”在教育部高教司农林医药处的统一部署下,经过批准立项,于2007年底开始组织农林院校有关数学、物理、化学基础课程专家成立专题研究组,研究编制农林类专业相关基础课程的教学基本要求,经过多次研讨和广泛征求全国农林院校一线教师意见,于2009年4月完成教学基本要求的编制工作,由“基础课教指委”审定并报教育部农林医药处审批。

为了配合农林类专业数理化基础课程教学基本要求的试行,“基础课教指委”统一规划了“教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会推荐示范教材”(以下简称“推荐示范教材”)。“推荐示范教材”由“基础课教指委”统一组织编写出版,不仅确保教材的高质量,同时也使其具有比较鲜明的特色。

**一、“推荐示范教材”与教学基本要求并行** 教育部专门立项研究制定农林类专业理科基础课程教学基本要求,旨在总结农林类专业理科基础课程教育教学改革经验,规范农林类专业理科基础课程教学工作,全面提高教育教学质量。此次农林类专业数理化基础课程教学基本要求的研制,是迄今为止参与院校和教师最多、研讨最为深入、时间最长的一次教学研讨过程,使教学基本要求的制定具有扎实的基础,使其具有很强的针对性和指导性。通过“推荐示范教材”的使用推动教学基本要求的试行,既体现了“基础课教指委”对推行教学基本要求的决心,又体现了对“推荐示范教材”的重视。

**二、规范课程教学与突出农林特色兼备** 长期以来各高等农林院校数理化基础课程在教学计划安排和教学内容上存在着较大的趋同性和盲目性,课程定位不准,教学不够规范,必须科学地制定课程教学基本要求。同时由于农林学科的特点和专业培养目标、培养规格的不同,对相关数理化基础课程要求必须突出农林类专业特色。这次编制的相关课程教学基本要求最大限度地体现了各校在此方面的探索成果,“推荐示范教材”比较充分反映了农林类专业教学改革的新成果。

**三、教材内容拓展与考研统一要求接轨** 2008 年教育部实行了农学门类硕士研究生统一入学考试制度。这一制度的实行,促使农林类专业理科基础课程教学要求作必要的调整。“推荐示范教材”充分考虑了这一点,各门相关课程教材在内容上和深度上都密切配合这一考试制度的实行。

**四、多种辅助教材与课程基本教材相配** 为便于导教导学导考,我们以提供整体解决方案的模式,不仅提供课程主教材,还将逐步提供教学辅导书和教学课件等辅助教材,以丰富的教学资源充分满足教师和学生的需求,提高教学效果。

乘着即将编制国家级“十二五”规划教材建设项目之机,“基础课教指委”计划将“推荐示范教材”整体运行,以教材的高质量和新型高效的运行模式,力推本套教材列入“十二五”国家级规划教材项目。

“推荐示范教材”的编写和出版是一种尝试,赢得了许多院校和老师的参与和支持。在此,我们衷心地感谢积极参与的广大教师,同时真诚地希望有更多的读者参与到“推荐示范教材”的进一步建设中,为推进农林类专业理科基础课程教学改革,培养适应经济社会发展需要的基础扎实、能力强、素质高的专门人才做出更大贡献。

中国农业大学出版社

2009 年 8 月

## 第 2 版前言

本书是教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会推荐示范教材《高等数学》(少学时)的修订版。

原书于 2009 年出版使用,对编写这样一本教材的考虑与适用对象在第一版前言中作了说明。在此基础上,本次修订力求兼顾理论叙述的通顺与联系实际问题的适当。主要修订的内容是:第一,对各章作了审阅,部分内容改写,例题进行了增删;第二,总的习题量有所增加,并按节重新做了配置;第三,修订了各章总结和学习指导,使之简洁实用;第四,每章末增加了二维码,介绍与微积分发展有关的数学家、数学史、数学思想等,可供学生了解背景知识,增加学习兴趣。

参与本次修订工作的老师和院校有北京林业大学高孟宁、顾艳红、罗宝华、张桂芳、王腾,河北北方学院左振钊、赵俊瑾和河南科技学院白春阳。

本书第 1 版的作者和院校为本书的修订奠定了良好的基础,在此表示衷心感谢。

本书修订还得到一些兄弟院校及中国农业大学出版社的教师、专家的鼓励和指导,并提出很多宝贵的意见和建议,在此表示衷心的感谢。

由于编者水平所限,书中难免疏漏和不妥之处,恳请读者批评指正。

编 者  
2017 年 3 月

# 第 1 版前言

根据 2007 年教育部高等农林、医药学科教学指导委员会工作会议精神和 2008 年高等农林院校理科基础课程教学指导委员会扩大会议,农林类专业数学基础课的教学要求分为一般要求和较高要求 2 个层次,并依据基本要求编写出版示范性教材.本书是为农林类相关专业学生基础课程高等数学(一般要求,约 80 学时)编写的,可供有关农林院校相关专业选用.

本书在编写时,在达到高等数学(一般要求)教学基本要求的基础上,有如下考虑:

1. 学习高等数学(一般要求)的农林类专业学生,在大学学习基础数学后,较少有再学习数学课程的机会,有的专业学生继续深造也不再考数学.因此在教授基本知识和技能之外,应当关注学生如何学习数学的思想,使他们增加接触数学实用性的机会.《大学数学——微积分及其在生命科学、经济管理中的应用》(普通高等教育“十五”国家级规划教材,谢季坚、李启文主编)在前言中说:“作为基础课的数学,在学生心目中是比较难学的,又觉得没有什么用,以为只是一堆枯燥无味的公式,能不能把数学变得容易学一些呢?”美国国家科学基金会资助、以哈佛大学为主编写的《微积分》在序言中说:“由于微积分具有将复杂问题归纳为简单规则和步骤的非凡能力,迄今已获得相当大的成功.正因为如此,微积分的教学也存在危险:很可能将这一学科仅仅教授成一些规则和步骤,从而既忽略了数学本身,也忽略了它的使用价值.”编者考虑到农林类专业学生的学习过程和今后的发展,在达到教学基本要求的前提下,增加他们对微积分在相关领域应用方面的知识和对微积分历史及重要人物的了解,是一件必要而有益的工作.在处理内容时,设法增加学生阅读教材的兴趣,帮助学生利用教材自主学习.

2. 在本书绪论“谈谈微积分”中,对微积分发展的历史做了简单的回顾,在各章开端,作为引子,叙述一些与内容有关的知识和历史,对历史人物进行简单的介绍.对于增加知识的应用部分,主要是:①在例题和习题(讨论题)中,联系微积分知识在各领域的应用,包括后续课程概率统计有关概念和计算的简单介绍.②适当融入数学建模的内容,因为农林类学生较少可能开出数学模型课程,因此在这里开了一个窗口,使学生对数学模型有一个初步的了解.这样做没有更多经验和定例,因此编者的设计仅供教师选用,希望通过使用,积累经验教训,能有更好的设计,使学生受益.③在各章的最后,编写对知识总结的框图,目的是对学生自主学习和研究性学习进行指导.④有的函数图形采用计算机软件作图,并介绍给学生,希望引起学生的兴趣.

3. 由于教授基础课程的教师已习惯多年形成的课程内容体系,因此本书在整体章节安排上,尽量与传统教材一致,使得教师容易掌握,同时这并不影响其他改革.但在内容叙述上,本书不追求处处都是严谨的体系和严格的证明,因为对农林类专业学生,这并不必要,通

过实例,仍然可以使学生领会微积分的基本思想和方法.习题分两部分:第一部分习题是基本概念题、基本计算题,体现教学的基本要求;第二部分讨论题则选择了一些扩展的思考题、应用题,以扩大学生的眼界和思考范围,了解数学的应用,引起学生学习和钻研的兴趣.这部分内容供教师在教学中选择,或组织学生讨论,或留作作业.对于要考研究生的学生,由于本书习题较少涉及考研所包含的概念、计算、证明的题目类型,所以教师可指导学生参考其他教材.

4. 书中打\*的章节不在基本要求之列,供教师在有条件时选用,或指导学生选学.

本书由教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会组织编写,主编是高孟宁(北京林业大学)、徐梅(东北农业大学),负责全书和有关章节的编写;副主编是张长勤(安徽农业大学)、惠淑荣(沈阳农业大学)、王静海(河北北方学院)、黄燕苹(西南大学)、邹锐标(湖南农业大学)、游雄(南京农业大学)、马少军(青岛农业大学),负责各章节的编写;参加编写有关工作的还有罗宝华(北京林业大学)、石立新(四川农业大学)、陈晓昕(北京农学院)、胡卿叶(山西农业大学)、张永祥(沈阳农业大学)、孙燕(内蒙古民族大学)、刘继发(河北科技师范学院)、白春阳(河南科技学院).

编者对中国农业大学出版社为本书编写和出版所给予的大力支持表示衷心感谢!

由于编者水平有限,特别是对内容的处理和编排的形式有新的尝试,对于书中的不妥之处,恳请读者和使用本书的教师不吝赐教,以期对今后的工作有所教益.

编 者

2009年5月

# C 目录

## CONTENTS

|                           |    |
|---------------------------|----|
| 绪论 谈谈微积分 .....            | 1  |
| 0.1 微积分学的名称 .....         | 1  |
| 0.2 微积分思想的由来和发展史简介 .....  | 2  |
| 0.3 学习微积分时了解一点数学史 .....   | 4  |
| 第 1 章 函数 .....            | 6  |
| 1.1 函数的定义 .....           | 6  |
| 1.2 函数的表示方法 .....         | 7  |
| 1.3 反函数与复合函数 .....        | 11 |
| 1.4 基本初等函数 .....          | 12 |
| 1.5 初等函数 .....            | 16 |
| 1.6 直角坐标系和参数方程表示的函数 ..... | 17 |
| 1.7 建立函数关系 .....          | 17 |
| 二维码 无理数 $e$ 与指数模型 .....   | 23 |
| 对数在科学发展中的重要作用 .....       | 23 |
| “化圆为方”与“超越数” .....        | 23 |
| 第 2 章 极限与连续 .....         | 24 |
| 2.1 数列的极限 .....           | 24 |
| 2.2 函数的极限 .....           | 29 |
| 2.3 函数极限的性质及运算法则 .....    | 34 |
| 2.4 无穷小量与无穷大量 .....       | 39 |
| 2.5 函数的连续性 .....          | 46 |
| 2.6 闭区间上连续函数的性质 .....     | 50 |
| 二维码 刘徽与中国古代数学家 .....      | 54 |
| 圆周率 $\pi$ .....           | 54 |
| 第 3 章 导数与微分 .....         | 55 |
| 3.1 导数 .....              | 55 |

|              |                      |            |
|--------------|----------------------|------------|
| 3.2          | 导数公式 导数运算法则 .....    | 61         |
| 3.3          | 导数的实际应用 .....        | 69         |
| 3.4          | 高阶导数 .....           | 71         |
| 3.5          | 微分的概念 .....          | 72         |
| 3.6          | 微分公式和法则 .....        | 76         |
| 3.7          | 微分的应用 .....          | 79         |
| * 3.8        | 分形几何学简介 .....        | 82         |
| 二维码          | 牛顿 .....             | 85         |
|              | 古希腊的数学 .....         | 85         |
| <b>第 4 章</b> | <b>导数的应用</b> .....   | <b>86</b>  |
| 4.1          | 微分中值定理 .....         | 86         |
| 4.2          | 洛必达法则 .....          | 90         |
| 4.3          | 函数的增减性和判定法则 .....    | 93         |
| 4.4          | 函数的极值 .....          | 94         |
| 4.5          | 函数曲线的凹凸性及作图简介 .....  | 96         |
| 4.6          | 函数的最值及应用 .....       | 101        |
| 4.7          | 导数在经济分析中的应用 .....    | 104        |
| 二维码          | 拉格朗日 .....           | 109        |
|              | 极值与自然法则 .....        | 109        |
| <b>第 5 章</b> | <b>不定积分</b> .....    | <b>110</b> |
| 5.1          | 不定积分的定义 .....        | 110        |
| 5.2          | 不定积分的几何意义和物理意义 ..... | 114        |
| 5.3          | 基本积分公式 不定积分的性质 ..... | 115        |
| 5.4          | 换元积分法 .....          | 117        |
| 5.5          | 分部积分法 .....          | 122        |
| 5.6          | 有理函数和三角函数的不定积分 ..... | 124        |
| 5.7          | 积分表的使用 .....         | 126        |
| 5.8          | 不定积分的实际应用 .....      | 128        |
| 二维码          | 柯西 .....             | 132        |
|              | 极限思想与辩证法 .....       | 132        |
| <b>第 6 章</b> | <b>定积分</b> .....     | <b>133</b> |
| 6.1          | 定积分的概念 .....         | 133        |
| 6.2          | 定积分的性质 .....         | 139        |
| 6.3          | 微积分基本公式 .....        | 142        |

|                 |                           |     |
|-----------------|---------------------------|-----|
| 6.4             | 定积分的换元积分法与分部积分法 .....     | 147 |
| 6.5             | 无穷限广义积分 .....             | 152 |
| 6.6             | 定积分的应用 .....              | 155 |
| 二维码             | 莱布尼兹 .....                | 163 |
|                 | 谁是微积分的创始人,牛顿还是莱布尼兹? ..... | 163 |
| <b>第 7 章</b>    | <b>多元函数微分学</b> .....      | 164 |
| 7.1             | 空间解析几何的基本知识 .....         | 164 |
| 7.2             | 二元函数的基本概念 .....           | 170 |
| 7.3             | 二元函数的偏导数与全微分 .....        | 175 |
| 7.4             | 二元复合函数的求导法则 .....         | 180 |
| 7.5             | 二元函数的极值 .....             | 183 |
| 7.6             | 最小二乘法 .....               | 186 |
| 二维码             | 笛卡尔、费马和他们对数学的贡献 .....     | 191 |
|                 | 生活中的圆锥曲线 .....            | 191 |
| <b>第 8 章</b>    | <b>二重积分</b> .....         | 192 |
| 8.1             | 二重积分的概念与性质 .....          | 192 |
| 8.2             | 二重积分的计算 .....             | 197 |
| 8.3             | 二重积分的应用 .....             | 205 |
| 二维码             | 欧拉 .....                  | 207 |
|                 | 二重积分与概率计算 .....           | 207 |
| <b>第 9 章</b>    | <b>常微分方程</b> .....        | 208 |
| 9.1             | 微分方程的基本概念 .....           | 209 |
| 9.2             | 可分离变量的微分方程 .....          | 211 |
| 9.3             | 一阶线性微分方程 .....            | 213 |
| 9.4             | 微分方程的应用问题 .....           | 214 |
| 9.5             | 二阶微分方程简介 .....            | 217 |
| 9.6             | 人口增长模型 .....              | 220 |
| 二维码             | 数学王子高斯 .....              | 226 |
|                 | 大学生数学建模竞赛 .....           | 226 |
| <b>* 第 10 章</b> | <b>无穷级数简介</b> .....       | 227 |
| 10.1            | 无穷级数 收敛与发散 .....          | 227 |
| 10.2            | 级数收敛与发散的判断 .....          | 229 |
| 10.3            | 幂级数 .....                 | 230 |



|      |                                  |     |
|------|----------------------------------|-----|
| 10.4 | 幂级数的性质 .....                     | 231 |
| 10.5 | 初等函数的幂级数展开式 .....                | 232 |
| 二维码  | 级数的发散与收敛 .....                   | 237 |
|      | 芝诺的“阿喀琉斯追龟”悖论和丢潘都的“农夫遗嘱”问题 ..... | 237 |
| 习题答案 | .....                            | 238 |
| 参考文献 | .....                            | 256 |

# 绪论

## 谈谈微积分

### Talk about Calculus

微积分是 17 世纪下半叶自然科学中最伟大的发现,它的产生开创了数学发展史的新纪元——变量数学时期确立的主要标志就是解析几何的诞生和微积分的创立. 20 世纪杰出数学家冯·诺伊曼(John von Neumann, 1903—1957 年)评价微积分时说:“微积分是近代数学中最伟大的成就,对它的重要性无论做怎样的估计都不会过分.”而恩格斯(Engels, 1820—1895 年)曾有这样的赞誉:“在一切理论成就中,未必再有什么像 17 世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了!”

#### 0.1 微积分学的名称

微积分学是微分学(differential calculus)和积分学(integral calculus)的统称,英语简称 Calculus,意为计算,这是因为早期微积分主要用于天文、力学、几何中的计算(Calculus 的拉丁语原意为小石子). 微分和积分的名称最早由我国清代著名数学家李善兰(1811—1882 年)翻译而来,这时的微积分被数学家和天文学家用来解决大量的实际问题,但是由于缺乏严格的理论基础,在很长的一段时间内得不到发展. 19 世纪作为理论基础的极限理论得到完善,才使微积分逐渐演变为逻辑严密的数学基础学科,被称为 Mathematical Analysis,中文译作数学分析. 后来人们也将微积分学称为分析学(Analysis),或称无穷小分析,专指运用无穷小或无穷大等极限过程分析处理计算问题的学问,分析学的精髓是正确使用无限过程. 数学分析一般以微积分学和无穷级数一般理论为主要内容,并包括它们的理论基础(实数、函数和极限的基本理论),是大学数学专业的一门基础课程. 在我国大学,非数学专业学习微积分和无穷级数的课程一般称为高等数学(Advanced mathematics),一般还要学习线性代数和概率论与数理统计. 线性代数的内容是数据之间的线性关系和线性运算,研究的是一种离散的量;概率论与数理统计的内容是研究随机现象和随机变化的量,在自然科学、经济、社会科学中都有大量应用,微积分、线性代数是其重要基础.



## 0.2 微积分思想的由来和发展史简介

微积分的最重要的思想是“微元”和“无限逼近”，早在古代数学中，就产生了微分和积分这两个概念的思想萌芽，形成了两种基本的数学运算. 历史上，积分思想先于微分思想出现. 积分思想出现在求面积、体积等问题中，在古中国、古希腊、古巴比伦、古埃及都有涉及这类问题的思想和方法. 如古希腊的阿基米德(公元前 287—212 年)用边数越来越多的正多边形去逼近圆的面积，称为“穷竭法”；中国魏晋时代的刘徽(公元 225—295 年)在计算圆面积时提出了著名的“割圆术”. 又如，李善兰独创的“尖锥术”，也使中国数学步入了微积分的大门，此时西方的微积分传入了中国，这棵还没来得及成长的小树就过早地夭折了.

微分思想在古代也略见端倪. 如古希腊数学家阿波罗尼奥斯(Apollonius, 公元前 262—190 年)在他的著作《圆锥曲线》一书中讨论过圆锥曲线的法线. 当然，关于微分问题的讨论远不及积分问题讨论得那么广泛和深入.

微积分的真正发展来自于生产实践的推动. 古希腊数学在经历欧洲中世纪长达一千多年的沉睡之后，终于逐渐苏醒过来. 这主要来自于欧洲文艺复兴时期的工业、农业、航海事业与商贸等大规模发展的迫切需要. 如在光学研究中，由于透镜的设计需要运用折射定律、反射定律，这就涉及切线、法线问题. 这方面的研究吸引了笛卡尔(Descartes, 1596—1650 年)、惠更斯(Huygens, 1629—1695 年)、牛顿(Isaac Newton, 1642—1727 年)、莱布尼兹(Leibniz, 1646—1716 年)等诸多科学家. 而在运动学研究中，要确定运动物体在某一点的运动方向，就是求曲线上某一点的切线方向，这就需求作切线. 深深依赖于数学的力学、天文学等自然科学的发展，强有力地推动了数学的发展. 微积分就是在这样一种背景下形成与发展起来的.

### 1. 导致微积分创立的几类基本问题

(1) 已知物体移动的距离表示为时间的函数，求物体在任意时刻的速度和加速度；反之，已知物体运动的加速度表示为时间的函数，求速度和距离(不久人们发现，这一问题是计算一个变量对另一个变量的变化率问题以及它的逆问题的特例).

(2) 求曲线的切线.

(3) 求函数的最大值和最小值.

(4) 求曲线长；曲线围成的面积；曲面围成的体积；物体的重心；一个体积相当大的物体(如行星)作用于另一物体上的引力等.

### 2. 创建微积分的大致过程

17 世纪初，很多数学家都为微积分的登场做了大量的铺垫和前期准备工作. 卡瓦列利(Cavalieri, 1598—1647 年)的“不可分量原理”、笛卡尔的解析几何、费马(Fermat, 1601—1665 年)的求极值和切线的方法、牛顿的老师巴罗(Barrow, 1630—1677 年)的“微分三角形”、沃利斯(Wallis, 1616—1703 年)的“无穷算术”等都是微积分建立前重要的奠基工作.

微积分这门学科的基础已经具备，但是，要成为一门严谨、完美的科学，微积分还有很长的路要走. 主要有两个方面的工作：①建立几个最基本的概念，创立一套一般的符号体系，建立计算的正确程序或算法(后由牛顿和莱布尼兹各自独立完成)；②建立逻辑上的一致的、严

格的基础,后由法国分析学家柯西(Cauchy,1789—1857年)及其他19世纪数学家完成。

牛顿和莱布尼兹建立微积分的出发点均是直观的无穷小量,因此这门学科早期也称为无穷小分析。不同的是,牛顿研究微积分着重于从运动学来考虑,莱布尼兹却是侧重于几何学来考虑的。

牛顿于1666年首次提出了流数的概念,并称微积分为“流数术”。之后,牛顿又对流数概念作了进一步的论述,并清楚地陈述了流数术所提出的中心问题:①已知流量间的关系,求流数关系(即微分法);②已知表示量的流数间的关系的方程,求流量间的关系(即积分法)。

1676年,牛顿清晰地叙述了微积分基本定理,这就是我们现今所说的 Newton-Leibniz 公式:  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ , 沟通了微分和积分之间的联系,因此被公认为微积分的创始人之一。

另一个是德国数学家、物理学家和哲学家莱布尼兹,一个被罗素(Russell,1872—1970年,英国哲学家、数学家、逻辑学家、历史学家)称赞为“千古绝伦的大智者”的科学天才。1684年10月,莱布尼兹发表了数学史上被认为是最早发表的微积分文献“一种求极大极小的奇妙类型的计算”。这篇文章已含有现代的微分符号和基本微分法则,直到今天,我们的微积分教材中基本上沿用了这位符号大师的记法。1686年,莱布尼兹又初步论述了求积(积分)问题与切线(微分)问题的互逆关系,还引入了积分概念及其符号  $\int$ 。

值得一提的是,由于牛顿微积分学说最早的公开表述是在1687年出版的巨著《自然哲学之数学原理》中,发表的时间晚于研究成果出来的时间二十来年,比莱布尼兹的成果发表晚了三年。这引起了一场长达百年之久的关于“微积分发明的优先权”的大争论。这场“科学史上最不幸的一章”导致整个18世纪的英国与欧洲大陆国家在数学发展上的分道扬镳,并因此大大影响了整个近代数学的发展进程。

### 3. 第二次数学危机与微积分的进一步发展

微积分诞生之后,数学的发展迎来了一次空前的繁荣时期。18世纪的数学家们把微积分应用于天文学、力学、光学、热学等各个领域,取得了许多显著的科学成就(如预测哈雷彗星的再度出现)。

在微积分的发展过程中,一方面是成果的丰硕,另一方面是基础的不稳固。在微积分的研究和应用中,数学家们遭遇到了尴尬的局面。他们发现了越来越多的谬论和悖论(主要是无穷级数方面),并遭到了来自于宗教界的种种非难,因而有第二次数学危机的产生。在18世纪结束之际,微积分和建立在微积分基础上的其他分支的逻辑处于一种完全混乱的状态之中。这种状况一直到19世纪才得到彻底的改善。在所有对分析学的严格化做出了重要贡献的数学家中,尤以柯西和维尔斯特拉斯(Weierstrass,1815—1897年)两位数学家最为著名。柯西对微积分的基本概念,如变量、函数、极限、连续、导数、微分、收敛等给出了明确的定义。在这些基本概念的基础上,柯西严格地表述并证明了微积分基本定理、中值定理等一系列重要定理。而维尔斯特拉斯创造了现代分析学中普遍使用的  $\epsilon$ - $\delta$  语言,并用这个不依赖于直观的  $\epsilon$ - $\delta$  语言重新定义了极限、连续、导数等分析学的基本概念。他被尊称为“现代分析之父”。至此,极限理论成为微积分的坚实基础,使得微积分进一步地发展开来。

微积分的建立,使得数学的基本格局发生了变化,在这之前,数学主要有代数(包括算