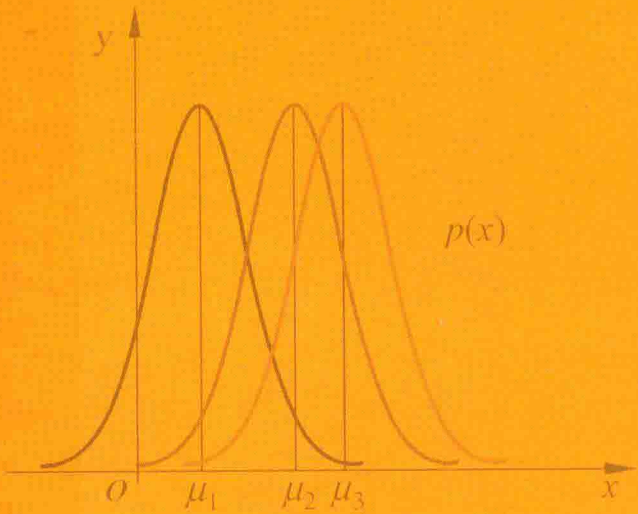
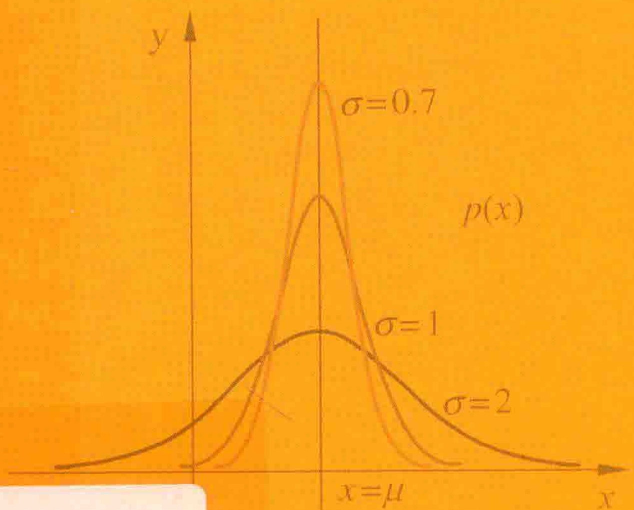
概率论

齐淑华 编著





出版社

概率论

齐淑华　编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书系统地论述了概率论的概念、方法、理论及其应用，是一本为高等院校统计学以及数学专业本科生编写的教材或教学参考书. 全书共分 7 章，内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、条件数学期望和特征函数、大数定律与中心极限定理，还安排了概率应用举例的内容. 本书注重对学生基础知识的训练和综合能力的培养，每节后配有练习题，每章配有总复习题，并在书后附有习题答案，便于教师教学和学生自学.

本书可作为高等学校统计学专业与数学类专业的教材，亦可作为理工类和经管类本科专业学生以及需要概率知识的读者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论/齐淑华编著. —北京：清华大学出版社，2017
ISBN 978-7-302-48778-4

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①齐… Ⅲ. ①概率论－高等学校－教材 Ⅳ. ①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 272061 号

责任编辑：刘 颖
封面设计：傅瑞学
责任校对：赵丽敏
责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 **邮 编**：100084
社 总 机：010-62770175 **邮 购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：清华大学印刷厂
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×230mm **印 张**：11.5 **字 数**：238 千字
版 次：2017 年 11 月第 1 版 **印 次**：2017 年 11 月第 1 次印刷
印 数：1～1500
定 价：29.80 元

产品编号：077319-01

前言

FOREWORD

概率论是研究随机现象数量规律性的一门学科，它的应用十分广泛，在自然科学、工程技术、农业生产等领域有着广泛的应用.随着人类社会的进步，科学技术的发展，经济全球化的日益加速，概率论在众多领域内扮演着越来越重要的角色.特别是近20年来，随着计算机的发展与普及，概率论在经济、医学、金融、保险等领域也有着越来越广泛的应用，正因如此，概率论课程也成为高等院校统计学、数学等专业本科最重要的专业基础必修课之一.

《概率论》是我们在总结多年教学实践经验基础上编写而成的，本书具有以下特点：

1. 在注意保持数学学科本身的科学性、系统性、严谨性的同时，力求做到由浅入深、深入浅出、通俗易懂、重点突出、简单扼要.既便于教师教学，又便于学生自学.

2. 本书习题分节设立，这样可以使习题更具有针对性，使学生通过本节习题的练习，更好地消化理解本节的内容.同时本书在例题和习题的选取上，力求做到典型性、应用性和现代性，以期注重学生学习兴趣的培养，达到提高综合运用数学知识的能力.

3. 在重点的数学概念后附有英文，可以使学生在学习这门课的过程中，逐渐学会数学概念对应的英文词汇，这对学生查阅概率论外文资料有很大的益处.

4. 在有些章节，大胆地改变了传统的书写顺序，改变后的顺序对老师的教学和学生的系统学习大有益处.

在撰写《概率论》过程中，为了便于读者理解和掌握，我们力求将概念叙述得清晰易懂，同时还注意了例子的多样性，所举例子涉及工业、农业、工程技术、保险、医学、经济等多个领域，以使读者在

理解基本概念、掌握基本方法的同时，体会到概率知识应用的广泛性.

打星号“*”的小节为选讲内容，供学时较多时选用.

尽管在编写的过程中付出了一定的努力，但由于作者水平有限，难免有不当之处或错误，敬请同行和广大读者指正.

编　者

2017 年 7 月

目录

CONTENTS

第1章

随机事件及其概率

CHAPTER 1

本章介绍概率论中用到的基本概念及随机事件的关系与运算，重点论述概率的定义、古典概率的求法、条件概率和乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式以及事件的相互独立性.

1.1 概率论中的基本概念

1.1.1 随机现象

客观世界中，人们观察到的现象，存在着两种类型，一种是在一定条件下必然发生的现象，称为**确定性现象**或**必然现象**. 例如，在一个标准大气压下，水在100℃时一定沸腾；竖直上抛一重物，则该重物定会竖直落下来. 另一种是**随机现象**(random phenomenon)，随机现象在自然界和人类社会中无处不在. 例如，向上抛一枚质地均匀的硬币，硬币落地的结果可能正面朝上，也可能反面朝上；掷一颗质地均匀的骰子，可能出现1点到6点中的任一点；110报警台一天中说不定接到多少次报警电话，等等，在这些现象中都可能有多种不同的结果出现，并且在一次观察中，不知道哪一种结果会出现. 这类现象称为**随机现象**. 概率论是一门研究随机现象中的数量规律的数学学科.

研究随机现象中的数量规律对于人类认识自身和自然界，有效地进行经济活动和社会活动十分必要. 人类寿命的长短，基因的遗传和变异规律，疾病的发生发展和传播规律；自然界中气候的变化规律，河流的变化规律；在经济活动中，股票价格的涨落，市场需求的变化，资金回报率的变化，保险公司经营状况的变化，等等. 这些都是需要加以研究的，而它们无一不是随机现象中的数量规律.

概率论研究的对象是随机现象. 而随机现象中的数量规律，是指

在进行个别试验或观察时其结果具有不确定性，但在大量的重复试验中其结果又具有统计规律性. 在随机现象中，虽然在一次观察中，不知道哪一种结果会出现，但在大量重复观察中，其每种可能结果却呈现出某种规律性. 例如，在多次抛一枚硬币时，正面朝上的次数大致占总次数的一半. 这种在大量重复观察中所呈现出的固有规律性，就是我们所说的统计规律. 概率论正是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

把对某种随机现象的一次观察、观测或测量等称为一个**试验**.

下面看几个试验的例子：

(1) 将一枚硬币抛三次，观察正面 H、反面 T 出现的情况；

(2) 掷一颗骰子，观察出现的点数；

(3) 一天内进入某图书馆的人数；

(4) 对某只灯泡做试验，观察其使用寿命；

(5) 对某只灯泡做试验，观察其使用寿命是否小于 200h.

上述试验具有以下特点：①在相同的条件下试验可以重复进行；②每次试验的结果具有多种可能性，而且在试验前可以明确试验的所有可能结果；③在每次试验前，不能准确地预言该次试验将出现哪一种结果. 称这样的试验为**随机试验**(random experiment)，简称**试验**，记为 E.

注 本书以后所提到的试验均指随机试验.

1.1.2 样本空间

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知其试验结果，但试验的所有可能结果是已知的，称试验所有可能结果组成的集合为**样本空间**(sample space)，记为 $\Omega=\{\omega\}$. 其中试验结果 ω 为样本空间的元素，称之为**样本点**(sample point).

设 $E_i(i=1,2,3,4,5)$ 分别表示上述试验(1)～(5)，以 Ω_i 表示试验 $E_i(i=1,2,3,4,5)$ 的样本空间，则：

(1) $\Omega_1=\{\mathrm{HHH},\mathrm{HHT},\mathrm{HTH},\mathrm{THH},\mathrm{HTT},\mathrm{THT},\mathrm{TTH},\mathrm{TTT}\}$；

(2) $\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$；

(3) $\Omega_3=\{0,1,2,\cdots\}$；

(4) $\Omega_4=\{t\mid t\geqslant 0\}$；

(5) $\Omega_5=\{$寿命小于 200h，寿命不小于 200h$\}$.

注 虽然随机试验(4)和(5)都观察某只灯泡的使用寿命，但试验目的不同，所以对应的样本空间也不同.

需要注意的是：

(1) 样本空间中的元素可以是数也可以不是数.

(2) 样本空间至少有两个样本点,仅含两个样本点的样本空间是最简单的样本空间.

(3) 从样本空间含有样本点的个数来区分,样本空间可分为有限与无限两类,譬如以上样本空间 Ω_1 和 Ω_2 中样本点的个数为有限个,而 Ω_3 及 Ω_4 中样本点的个数为无限个.但 Ω_3 中样本点的个数为可列个,像 Ω_1,Ω_2 和 Ω_3 中的元素个数为有限个或可列个的情况归为一类,称为**离散样本空间**.而将样本点的个数为不可列无限个的情况归为一类,称为**连续样本空间**.这两类样本空间有着本质的差异.

1.1.3 随机事件

一般地,我们称试验 E 的样本空间 Ω 的一个子集为**随机事件**(random event),简称**事件**,常用大写字母 $A,B,C,\cdots$表示.

做试验 E 时,若试验结果属于 A,则称事件 A 发生;否则称 A 不发生.

注 严格地说,事件是指 Ω 中的满足某些条件的子集.当 Ω 是由有限个元素或由可列无限个元素组成时,每个子集都可作为一个事件.若 Ω 是由不可列无限个元素组成时,某些子集必须排除在外,幸而这种不容许的子集在实际应用中几乎不会遇到.今后,每当我们讲到一个事件时都假定它是容许考虑的那种子集.

特别地,如果事件中只包含一个样本点,则称该事件为**基本事件**(elementary event).

【例 1】 掷一颗骰子,随机试验的样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.指出下述集合表示什么事件?并指出哪些是基本事件.

事件 $A_1=\{1\}$,$A_2=\{2\}$;事件 $B=\{2,4,6\}$;事件 $C=\{1,3,5\}$;事件 $D=\{4,5,6\}$.

解 事件 $A_1=\{1\}$,$A_2=\{2\}$——分别表示“出现 1 点”,“出现 2 点”,都是基本事件;

事件 $B=\{2,4,6\}$——表示“出现偶数点”,非基本事件;

事件 $C=\{1,3,5\}$——表示“出现奇数点”,非基本事件;

事件 $D=\{4,5,6\}$——表示“出现点数不小于 4 点”,非基本事件.

由于样本空间 Ω 包含了所有的样本点,且其也是自身的一个子集,故在每次试验时,Ω 中一定有事件发生,因此,称 Ω 为**必然事件**(certain event).

例如,掷一颗骰子,事件“出现的点数小于 7”是必然事件.

空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点,但它也是样本空间 Ω 的一个子集,由于它在每次试验中肯定不发生,所以称 $\varnothing$ 为**不可能事件**(impossible event).

例如,掷一颗骰子,事件“出现 7 点”是不可能事件.

1.1.4 事件间的关系与运算

概率论的任务之一是揭示和研究随机事件发生的规律性,我们希望通过对简单事件

的研究去了解复杂事件，这就需要研究随机事件之间的关系和运算.

事件是一个集合，因而事件间的关系与事件的运算自然可按照集合论中集合之间的关系和运算来处理.

设试验 E 的样本空间为 Ω，而 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 Ω 的子集.

1. 事件间的关系

(1) 事件的包含

若事件 A 发生，必有事件 B 发生，则称**事件 B 包含事件 A**（参见图 1-1），记作 $A\subset B$.

例如，掷一颗骰子，事件 $A=$"出现 4 点"，$B=$"出现偶数点"，则 $A\subset B$.

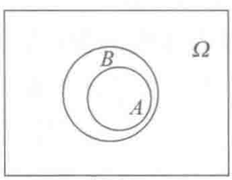
(2) 事件的相等

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记作 $A=B$.

例如，掷两颗骰子，事件 $A=$"两颗骰子的点数之和为奇数"，$B=$"两颗骰子的点数为一奇一偶"，则 $A=B$.

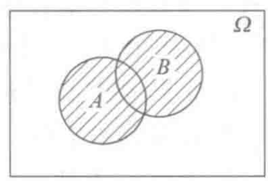
(3) 事件的和

事件 A 或 B 至少有一个发生，称为事件 A 与事件 B 的**和事件**(union of events)（参见图 1-2），记作 $A\cup B$ 或 $A+B$.



$A\subset B$

图 1-1



$A\cup B$

图 1-2

例如，掷一颗骰子，事件 $A=$"出现的点数小于 4 点"，$B=$"出现偶数点"，则 $A\cup B=\{1,2,3,4,6\}$.

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件表示为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，含义就是事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生.

(4) 事件的积

事件 A 与 B 同时发生，称为事件 A 与事件 B 的**积事件**(intersection of events)（参见图 1-3），也称事件 A 与 B 的交，记作 $A\cap B$ 或 AB.

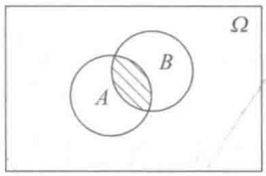
例如，掷一颗骰子，事件 $A=$"出现的点数小于 5 点"，$B=$"出现偶数点"，则 $A\cap B=\{2,4\}$.

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$，它表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生.

(5) 事件的差

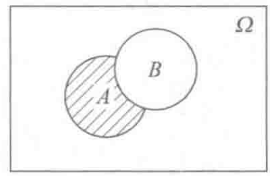
事件 A 发生而 B 不发生，称为事件 A 与 B 的**差事件**(参见图 1-4)，记作 $A-B$.

例如，掷一颗骰子，事件 $A=$“出现的点数小于 4”，$B=$“出现奇数点”，则 $A-B=\{2\}$.



$A\cap B$

图 1-3



$A-B$

图 1-4

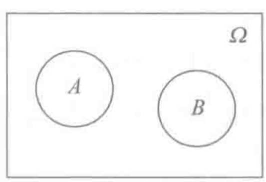
(6) 互不相容事件

当 $AB=\varnothing$ 时，称 A 与 B 为**互不相容事件**(mutually exclusive events)(或**互斥事件**)(参见图 1-5)，简称 A 与 B 互斥，也就是说事件 A 与 B 不能同时发生.

例如，在电视机寿命试验中，“寿命小于 10000h”与“寿命大于 50000h”是两个互不相容的事件，因为它们不可能同时发生.

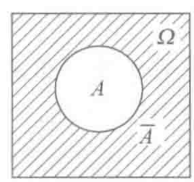
(7) 对立事件

若 $A\cup B=\Omega$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与 B 互为**对立事件**，或互为**逆事件**(complementary event)(参见图 1-6)，A 的对立事件记作 $\overline{A}$，则 $\overline{A}=B$.



$AB=\varnothing$

图 1-5



$\overline{A}$

图 1-6

注 由事件的关系可得 $A-B=A\overline{B}$.

2. 事件的运算满足如下规律

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，　$A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，　$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

(3) 分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

(4) 德摩根(De Morgan)律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

注 由分配律我们还可推出如下常用的运算：$A=A(B\cup\overline{B})=AB\cup A\overline{B}$.

【例 2】 从一批产品中每次取出一个产品进行检验(每次取出的产品不放回)，事件 A_i 表示第 i 次取到合格品($i=1,2,3$)，试表示：

(1)三次都取到合格品；(2)三次中至少有一次取到合格品；(3)三次中恰有两次取到合格品；(4)三次中都没取到合格品；(5)三次中最多有一次取到合格品.

解 (1) $A_1A_2A_3$；

(2) $A_1\cup A_2\cup A_3$ 或 $A_1+A_2+A_3$；

(3) $A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3$ 或 $A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3$；

(4) $\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}$或$\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$；

(5) $A_1\overline{A_2}\ \overline{A_3}\cup\overline{A_1}\ \overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}$或$\overline{A_2}\ \overline{A_3}\cup\overline{A_1}\ \overline{A_2}\cup\overline{A_1}\ \overline{A_3}$.

1.1.5 排列与组合

在接下来的古典概率中要用到排列组合的知识，因此在这里我们简要介绍一下排列组合.

排列与组合公式的推导都基于如下两条原理.

1. 乘法原理

如果某件事需经 k 个步骤才能完成，做第 1 步有 m_1 种方法，做第 2 步有 m_2 种方法，……，做第 k 步有 m_k 种方法，那么完成这件事共有 $m_1m_2\cdots m_k$ 种方法.

譬如，甲城到乙城有 3 条旅游线路，由乙城到丙城有 2 条旅游线路，那么从甲城经乙城去丙城共有 $3\times2=6$ 条旅游线路.

2. 加法原理

如果某件事可由 k 类不同途径之一去完成，在第 1 类途径中有 m_1 种完成方法，在第 2 类途径中有 m_2 种完成方法，……，在第 k 类途径中有 m_k 种完成方法，那么完成这件事共有 $m_1+m_2+\cdots+m_k$ 种方法.

譬如，由甲城到乙城去旅游有 3 类交通工具：汽车、火车和飞机，而汽车有 5 个班次，火车有 3 个班次，飞机有 2 个班次，那么从甲城到乙城共有 $5+3+2=10$ 个班次供旅游者选择.

3. 排列

从 n 个不同元素中任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素，按照一定的顺序排成一列，称此为一个排列，这种排列的总数记为 P_n^m.

由乘法原理，取出第一个元素有 n 种取法，取出第二个元素有 $n-1$ 种取法，……，取出第 m 个元素有 $n-m+1$ 种取法，故 $\mathrm{P}_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)=\dfrac{n!}{(n-m)!}$.

若 $m=n$，则称为全排列，显然 $\mathrm{P}_n^n=n!$.

4. 组合

从 n 个不同元素中任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素并成一组(不考虑元素出现的先后次序)，称

此为一个组合,这种组合的总数记为 C_n^m 或 $\binom{n}{m}$.

按照乘法原理,$C_n^m=\dfrac{P_n^m}{m!}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$.

这里规定 $0!=1, C_n^0=1$.

排列与组合都是计算“从 n 个元素中任取 r 个元素”的取法总数公式,其主要区别在于:如果不讲究取出元素间的次序,则用组合公式,否则用排列公式.而所谓讲究元素间的次序,可以从实际问题中得以辨别,例如两个人相互握手是不讲次序的;而两个人排队是讲次序的,因为“甲右乙左”与“乙右甲左”是两件事.

习题 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间:

(1) 掷两颗骰子,观察出现的点数;

(2) 连续抛一枚硬币,直至出现正面为止,正面用“1”表示,反面用“0”表示;

(3) 一超市在正常营业的情况下,某一天内接待顾客的人数;

(4) 某城市一天内的用电量.

2. 同时掷两颗骰子,设事件 A 表示“两颗骰子出现点数之和为奇数”,B 表示“点数之差为零”,C 表示“点数之积不超过 20”,用样本点的集合表示事件 $B-A, BC, B+\overline{C}$.

3. 设 A,B,C 为 3 个事件,试用 A,B,C 的运算关系表示下列事件:

(1) A 发生,B 与 C 不发生; (2) A 与 B 发生,C 不发生;

(3) A,B,C 都发生; (4) A,B,C 都不发生;

(5) A,B,C 不都发生; (6) A,B,C 中至少有一个发生;

(7) A,B,C 中不多于一个发生; (8) A,B,C 中至少有两个发生.

4. 指出下列关系中哪些成立,哪些不成立:

(1) $A\cup B=A\overline{B}\cup B$; (2) $\overline{A}B=A\cup B$;

(3) $(AB)(A\overline{B})=\varnothing$; (4) 若 $AB=\varnothing$,且 $C\subset A$,则 $BC=\varnothing$;

(5) 若 $A\subset B$,则 $A\cup B=B$; (6) 若 $A\subset B$,则 $AB=A$;

(7) 若 $A\subset B$,则 $\overline{B}\subset\overline{A}$; (8) $\overline{(A\cup B)C}=\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$.

5. 从某图书馆里任意取一本书,事件 A 表示“取到数学类图书”,B 表示“中文版图书”,C 表示“取到平装书”.

(1) 说明事件 $AB\overline{C}$ 的实际意义;(2) $C\subset B$ 成立意味着什么?

(3) $\overline{A}=B$ 是否意味着馆中的数学类图书都不是中文版的?

6. 从数字1,2,…,9中可重复地任取n次($n\geqslant 2$). 以A表示“所取的n个数字中没有5”,B表示“所取的n个数字中没有偶数”,问事件“所取的n个数字的乘积能被10整除”如何用A,B表示?

1.2 概率的定义及其性质

概率的定义是概率论中最基本的一个问题. 简单而直观的说法是:概率是随机事件发生的可能性大小. 在一次试验中,某事件A能否发生难以预料,但在多次重复试验中,事件A的发生却能显现出确定的规律性. 事实上,事件A发生的可能性的大小是可以确定的. 我们的任务就是要找到对随机事件发生可能性的科学的、合理的定量描述.

1.2.1 概率的统计定义

如果随机事件A在n次重复试验中发生的次数为n_A,则称比值n_A/n为事件A发生的**频率**(frequency),记为$f_n(A)$.

频率在我们的日常生活中经常用到,如某中学的高考升学率,某门考试课程的及格率,某大学毕业生的就业率、考研率,某城市的失业率,某种疾病的发病率,某种子的发芽率,某植物或动物的成活率等.

由定义易见频率具有下述基本性质:

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) $f_n(\Omega)=1$;

(3) 若$A_1,A_2,\cdots,A_n$是两两互不相容事件,则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_n).$$

【例1】(抛硬币试验) 历史上有不少人做过抛硬币试验,其结果见表1-1,从表中的数据可以看出:出现正面的频率逐渐稳定在0.5.

表1-1 历史上抛硬币试验的若干结果

试验者	抛硬币试验	出现正面次数	频率
德摩根(De Morgan)	2048	1061	0.5181
蒲丰(Buffon)	4040	2048	0.5069
费勒(Feller)	10000	4979	0.4979
皮尔逊(Pearson)	12000	6019	0.5016