

# 从数学观点看物理世界 ——统计物理与临界相变理论

马 天 刘瑞宽 杨佳艳 著



科学出版社

# 从数学观点看物理世界

## ——统计物理与临界相变理论

马 天 刘瑞宽 杨佳艳 著



科学出版社

## 内 容 简 介

本书主要系统地介绍了统计物理经典的基本概念、理论与方法。此外，也系统地介绍了作者与汪守宏教授在该学科和相变领域研究的一些成果，包括势下降原理、热理论、热力学势数学表达、动力学涨落、平衡相变动力学、热力学标准模型临界涨落效应、凝聚态形成的量子机理、高温超导、量子相变、流体的边界与内部旋涡形成、太阳电磁爆发、星系螺旋结构，以及引力辐射等新理论与新结果。

本书适合数学、统计物理、凝聚态物理、非线性科学等领域的高年级本科生、研究生以及相关领域的研究人员阅读，既可以作研究生教材，也可以作科研参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

从数学观点看物理世界：统计物理与临界相变理论/马天，刘瑞宽，杨佳艳著. —北京：科学出版社，2017.12

ISBN 978-7-03-055859-6

I. ①从… II. ①马… ②刘… ③杨… III. ①统计物理学 IV. O414.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 304692 号

责任编辑：李静科 赵彦超 / 责任校对：杨然

责任印制：张伟 / 封面设计：陈敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

<http://www.sciencep.com>

北京中石油彩色印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2017 年 12 月第 一 版 开本：720×1000 B5

2017 年 12 月第一次印刷 印张：37 1/4

字数：748 000

定价：198.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

## 前　　言

本书是“从数学观点看物理世界”专著系列的第三部。第一部是《从数学观点看物理世界——几何分析、引力场与相对论》(科学出版社, 2012), 第二部是《从数学观点看物理世界——基本粒子与统一场理论》(科学出版社, 2014)。这部专著的主要内容是统计物理与临界相变理论。

这部专著包含本书第一作者与汪守宏教授合作的部分成果, 同时也包含第一作者从 2015 年到 2016 年在四川大学数学学院主持的理论物理讨论班上与李大鹏、刘瑞宽、杨佳艳等学生共同研讨的工作总结。这部著作不仅在基础理论和总体框架上与经典统计物理相比有很大不同, 而且在许多方面都丰富了这门学科的知识和内容。

经典热力学势是以热力学三个基本定律为基础发展起来的。然而, 我们的分析表明势下降原理(本书提出的基本原理)比热力学第一和第二定律要更基本, 它能导出这两个定律, 可参见(Ma and Wang, 2017a)。这个原理的特点是, 它不仅能给出非平衡态系统的动力学方程, 而且以很自然的方式表明反映热力学系统不可逆过程的物理量是热力学势而不是熵。熵只是一个状态函数, 但热力学势是状态函数的泛函, 是比熵要更高一个层次的物理量。不可逆过程是一个整体性的热力学性质, 它只能用反映全局性的势泛函来描述, 而不能用低层次的物理量熵来描述。熵的本质是光子数。

经典统计物理关于热的理论使人感受最深的是, 该理论中的“热”没有物理载体, 即缺乏清晰的物理图像。在本书中我们不仅从经典的统计分布导出温度公式, 给出温度的物理意义为系统粒子的加权平均能级, 并且对于熵得到新的物理内涵, 即熵是系统内部中某种意义上的光子数。热的载体就是光子。所得到的热理论包括温度的能级公式、熵的光子数公式、温度定理以及热能表达式, 并且由它们导出的物理性质全部与自然现象相吻合。这部分内容见第 3 章的 3.4 节, 也可见(Ma and Wang, 2017c)。

相变理论一直是统计物理中最重要的领域。传统上将相变分为热力学和统计临界理论两部分, 近些年来又增加了量子相变领域。在本书中, 将相变按其自身特性分为动力学相变与拓扑相变(即图像结构相变)。这两种类型的相变可将自然界中几乎所有临界突变现象都包括进去, 其中量子相变典型地属于拓扑相变范畴。(Ma and Wang, 2013, 2017 f, 2017 g) 对于这两种类型的相变给出了系统的数学和物理理论框架以及重要的理论应用。

一直以来, 热力学势的数学表达是比较弱的一个领域。除了少数几个系统外, 许

多系统缺乏明确的势泛函表达式，并且没有一个系统的势泛函数学表达是完整的，全部都缺少熵的耦合部分。这与传统热理论没有具体明确的物理图像有关。在本书中我们从第一原理出发，对于主要热力学系统都给出了势泛函的具体表达式，并且在后面相变理论中导出许多与实验相符合的理论结果。

在相变临界现象领域，一直认为 Landau 热力学相变理论得到的临界指数与实验数据之间的偏差是理论的缺陷造成的。在本书中我们从新建立的势泛函表达式及相变理论出发，以及应用我们建立的涨落理论，严格地证明了理论临界指数与实验的偏差不是理论缺陷造成的，而是自发涨落造成的。当将自发涨落纳入理论框架中后，得到临界指数与实验完全吻合。事实上，实验数据中不可避免地要将自发涨落的影响包含进去，而纯理论给出的数据是不含涨落因素的，因此这两者之间存在偏差是理所当然的。至于统计理论得到的数据与实验相符是因为统计理论所依据的 Ising 模型中包含了涨落效应。

需要强调的是，本书在许多方面都实质性地应用了 (Ma and Wang, 2015a) 中建立的相互作用统一场理论，并且在大范围内得到与物理现象及实验观测相一致的理论结果。这些结果都不是表象地凑出来的，而是建立在物理基本原理和定律基础上，采用具有深度的数学理论计算和推导得到的。事实充分说明了由马天和汪守宏自 1997 年以来二十年合作研究和创立的相互作用统一场理论，基本粒子的弱子模型；量子物理的多粒子动力学，天体物理学理论，黑洞与宇宙学理论，相变动力学学科，拓扑相变理论，大气海洋环流动力学，流体动力学理论，以及本书中的统计物理理论，它们是高度内在统一与协调的。特别是：

马天和汪守宏的工作全部是第一原理理论。

这些新创立的学科和理论全面地与自然现象相符合，充分地证明

马天和汪守宏的理论基础和方向是正确的。

最后，在马天和汪守宏的合作研究就要结束之时，我们共同的导师、尊敬的陈文塬先生在 2017 年 7 月 19 日去世。在此，以此书作为对陈先生的纪念。我们的学术成就也是陈文塬先生的成就。他不仅在学术上培育了我们，并且在做人方面也堪称我们的导师。

此外，本书的开启直接源于李大鹏同学提议和发起的理论物理研讨班。在此对李大鹏表示诚挚的感谢。同时此书也得到国家自然科学基金 (No. 11771306) 的资助，对此表示感谢。对科学出版社的支持也表示感谢。

马 天 刘瑞宽 杨佳艳

2017 年 9 月于四川大学

# 目 录

|                                 |    |
|---------------------------------|----|
| <b>第 1 章 统计物理的数学原理</b> .....    | 1  |
| 1.1 总体性介绍 .....                 | 1  |
| 1.1.1 物理学指导性原理 .....            | 1  |
| 1.1.2 统计物理的范畴和内容 .....          | 3  |
| 1.1.3 支配统计物理的基本定律与原理 .....      | 4  |
| 1.1.4 主要课题与方法 .....             | 6  |
| 1.2 相关数学基础——变分算子理论 .....        | 11 |
| 1.2.1 泛函及其变分导算子 .....           | 11 |
| 1.2.2 约束变分的 Lagrange 乘子定理 ..... | 17 |
| 1.2.3 散度与梯度约束变分 .....           | 22 |
| 1.2.4 物理中的应用 .....              | 26 |
| 1.2.5 一般的正交分解与微分元约束变分 .....     | 31 |
| 1.3 统计物理的基本原理 .....             | 35 |
| 1.3.1 基本情况介绍 .....              | 35 |
| 1.3.2 非平衡态的势下降原理 .....          | 40 |
| 1.3.3 平衡态极小势原理 .....            | 44 |
| 1.3.4 统计物理的驱动力定律 .....          | 46 |
| 1.4 物理运动的基本原理 .....             | 49 |
| 1.4.1 支配运动系统的动力学原理 .....        | 49 |
| 1.4.2 动力学方程的统一形式 .....          | 52 |
| 1.4.3 物理定律的对称性 .....            | 54 |
| 1.4.4 耦合系统的对称破缺原理 .....         | 57 |
| 1.4.5 物理运动的动力学定律 .....          | 59 |
| 1.5 总结与评注 .....                 | 59 |
| 1.5.1 本书特点 .....                | 59 |
| 1.5.2 综合评述 .....                | 62 |
| 1.5.3 本章各节评注 .....              | 64 |
| <b>第 2 章 热力学基本理论</b> .....      | 67 |
| 2.1 热力学基础 .....                 | 67 |
| 2.1.1 热力学第一定律的数学表示 .....        | 67 |

---

|                                      |            |
|--------------------------------------|------------|
| 2.1.2 能量传输机制与熵传输定律 .....             | 68         |
| 2.1.3 热力学系统与热力学势 .....               | 71         |
| 2.1.4 关于热力学系统的不可逆过程 .....            | 76         |
| 2.2 均匀平衡态热力学 .....                   | 78         |
| 2.2.1 Maxwell 关系 .....               | 78         |
| 2.2.2 基本物态方程 .....                   | 81         |
| 2.2.3 热辐射的 Stefan-Boltzmann 定律 ..... | 84         |
| 2.2.4 铁磁与铁电体的热力学效应 .....             | 87         |
| 2.3 Nernst 热定理与粒子化学势 .....           | 89         |
| 2.3.1 Nernst 热定理 .....               | 89         |
| 2.3.2 绝对零度的一些热力学性质 .....             | 90         |
| 2.3.3 粒子的化学势 .....                   | 94         |
| 2.3.4 化学势的一些物理作用 .....               | 97         |
| 2.4 经典热力学基础理论中存在的问题 .....            | 99         |
| 2.4.1 热力学第一定律经典表述 .....              | 99         |
| 2.4.2 Legendre 变换与热力学势经典描述 .....     | 101        |
| 2.4.3 第一定律应用中产生的问题 .....             | 104        |
| 2.4.4 热力学第二定律的经典表述 .....             | 106        |
| 2.4.5 第二定律经典表述的物理与数学问题 .....         | 109        |
| 2.5 总结与评注 .....                      | 110        |
| 2.5.1 热力学的基础问题 .....                 | 110        |
| 2.5.2 关于熵的问题 .....                   | 112        |
| 2.5.3 本章各节评注 .....                   | 114        |
| <b>第 3 章 平衡态统计理论 .....</b>           | <b>119</b> |
| 3.1 量子物理基础 .....                     | 119        |
| 3.1.1 量子力学法则与原理 .....                | 119        |
| 3.1.2 粒子物理基本知识 .....                 | 123        |
| 3.1.3 粒子的辐射与散射 .....                 | 127        |
| 3.1.4 四种基本相互作用势 .....                | 129        |
| 3.1.5 粒子能级 .....                     | 132        |
| 3.2 经典统计 .....                       | 138        |
| 3.2.1 粒子分布问题及其热力学势 .....             | 138        |
| 3.2.2 MB 分布 .....                    | 141        |
| 3.2.3 Maxwell 速度分布律与能量均分定理 .....     | 145        |
| 3.2.4 固体热容理论 .....                   | 148        |

|                                      |            |
|--------------------------------------|------------|
| 3.2.5 气体热容理论 .....                   | 152        |
| 3.3 量子统计 .....                       | 155        |
| 3.3.1 BE 分布与 FD 分布 .....             | 155        |
| 3.3.2 经典极限条件 .....                   | 159        |
| 3.3.3 热辐射的 Planck 公式 .....           | 161        |
| 3.3.4 理想 Fermi 气体 .....              | 167        |
| 3.4 热的统计理论 .....                     | 172        |
| 3.4.1 电子的光子云模型 .....                 | 172        |
| 3.4.2 温度能级公式 .....                   | 175        |
| 3.4.3 温度公式的物理意义 .....                | 179        |
| 3.4.4 熵理论 .....                      | 181        |
| 3.4.5 热的本质 .....                     | 184        |
| 3.5 总结与评注 .....                      | 188        |
| 3.5.1 系综理论的注记 .....                  | 188        |
| 3.5.2 遍历理论与等概率原理 .....               | 192        |
| 3.5.3 本章各节评注 .....                   | 195        |
| <b>第 4 章 热力学势的数学表达 .....</b>         | <b>199</b> |
| 4.1 $SO(n)$ 对称性 .....                | 199        |
| 4.1.1 Descartes 张量 .....             | 199        |
| 4.1.2 张量场与微分算子 .....                 | 202        |
| 4.1.3 $SO(n)$ 不变量与热力学势基本形式 .....     | 206        |
| 4.1.4 $SO(3)$ 的旋量 .....              | 208        |
| 4.1.5 $SO(3)$ 旋量表示 .....             | 208        |
| 4.2 常规热力学系统 .....                    | 212        |
| 4.2.1 基本情况介绍 .....                   | 212        |
| 4.2.2 PVT 系统 .....                   | 214        |
| 4.2.3 $N$ 元系统 .....                  | 218        |
| 4.2.4 磁体与介电体 .....                   | 221        |
| 4.3 凝聚态热力学系统 .....                   | 225        |
| 4.3.1 凝聚态的量子法则 .....                 | 225        |
| 4.3.2 超导体的 Ginzburg-Landau 自由能 ..... | 227        |
| 4.3.3 液态 ${}^4\text{He}$ 的热力学势 ..... | 228        |
| 4.3.4 液态 ${}^3\text{He}$ 超流体 .....   | 230        |
| 4.3.5 气体凝聚态的 Gibbs 自由能 .....         | 234        |
| 4.4 凝聚态的量子系统 .....                   | 237        |

---

|              |                                      |            |
|--------------|--------------------------------------|------------|
| 4.4.1        | 旋量的自旋算子 .....                        | 237        |
| 4.4.2        | $J = 1$ 旋量自旋算子的 $SO(3)$ 不变性 .....    | 240        |
| 4.4.3        | 超导体的 Hamilton 能量 .....               | 244        |
| 4.4.4        | 超流系统的能量泛函 .....                      | 247        |
| 4.4.5        | 气体 BEC 系统能量表达式 .....                 | 248        |
| 4.5          | 总结与评注 .....                          | 250        |
| 4.5.1        | PVT 系统的物态方程 .....                    | 250        |
| 4.5.2        | 磁体与介电体的物态方程 .....                    | 254        |
| 4.5.3        | 本章各节评注 .....                         | 256        |
| <b>第 5 章</b> | <b>非平衡态动力学 .....</b>                 | <b>260</b> |
| 5.1          | 基础理论框架 .....                         | 260        |
| 5.1.1        | 动力学理论概况 .....                        | 260        |
| 5.1.2        | 散度的流量公式与守恒律方程 .....                  | 262        |
| 5.1.3        | Onsager 倒易关系与输运耗散定理 .....            | 264        |
| 5.1.4        | 热力学系统的统一模型 .....                     | 267        |
| 5.1.5        | 耗散系统的稳定性 .....                       | 269        |
| 5.2          | 热力学耗散系统 .....                        | 270        |
| 5.2.1        | 常规系统的标准模型 .....                      | 270        |
| 5.2.2        | 超导体的 Ginzburg-Laudau-Gorkov 方程 ..... | 273        |
| 5.2.3        | 超流系统的势梯度方程 .....                     | 276        |
| 5.2.4        | 气体 BEC 系统相变动力学方程 .....               | 278        |
| 5.2.5        | 动力学理论基础 .....                        | 280        |
| 5.3          | 热力学耦合的流体系统 .....                     | 283        |
| 5.3.1        | 热盐流体的 Boussinesq 方程 .....            | 283        |
| 5.3.2        | 经典磁流体动力学方程 .....                     | 287        |
| 5.3.3        | 电磁势耦合的磁流体模型 .....                    | 289        |
| 5.3.4        | 厄尔尼诺亚稳态振荡机制 .....                    | 292        |
| 5.3.5        | 海洋热盐环流 .....                         | 296        |
| 5.3.6        | 磁流体的 Alfvén 波 .....                  | 300        |
| 5.4          | 凝聚态量子守恒系统 .....                      | 301        |
| 5.4.1        | 量子 Lagrange 系统 .....                 | 301        |
| 5.4.2        | 量子 Hamilton 系统 .....                 | 303        |
| 5.4.3        | Hamilton 系统的守恒量 .....                | 304        |
| 5.4.4        | 量子系统的适定性 .....                       | 306        |
| 5.5          | 涨落理论 .....                           | 307        |

|  |            |
|--|------------|
| 5.5.1 经典计算公式 .....                       | 307        |
| 5.5.2 修正的涨落理论 .....                      | 310        |
| 5.5.3 密度涨落关联的 Landau 理论 .....            | 312        |
| 5.5.4 随机运动统计理论 .....                     | 314        |
| 5.5.5 涨落耗散定理 .....                       | 316        |
| 5.5.6 涨落控制方程与涨落半径估计 .....                | 317        |
| 5.6 综述与评注 .....                          | 321        |
| 5.6.1 关于 Boltzmann 方程的讨论 .....           | 321        |
| 5.6.2 物理模型与实际的偏差问题 .....                 | 325        |
| 5.6.3 本章各节评注 .....                       | 327        |
| <b>第 6 章 平衡相变的动态理论 .....</b>             | <b>330</b> |
| 6.1 相变动力学的一般理论 .....                     | 330        |
| 6.1.1 热力学相变的三个基本定理 .....                 | 330        |
| 6.1.2 相变动力学原理与 Ehrenfest 相变分类 .....      | 331        |
| 6.1.3 相变动力学的主要课题 .....                   | 333        |
| 6.1.4 跃迁判据定理 .....                       | 334        |
| 6.1.5 相图及过冷过热态和潜热 .....                  | 336        |
| 6.1.6 涨落与超前临界温度 .....                    | 339        |
| 6.2 常规系统的相变 .....                        | 343        |
| 6.2.1 气液固三态的跃迁 .....                     | 343        |
| 6.2.2 Andrews 临界点与三阶气液相变 .....           | 346        |
| 6.2.3 铁磁体的临界磁化 .....                     | 348        |
| 6.2.4 磁滞回路的亚稳态振荡理论 .....                 | 350        |
| 6.2.5 二元相分离 .....                        | 351        |
| 6.3 超导电性 .....                           | 356        |
| 6.3.1 超导现象 .....                         | 356        |
| 6.3.2 GLG 方程与超导参数 .....                  | 360        |
| 6.3.3 超导相图 .....                         | 362        |
| 6.3.4 $n$ 次相变 .....                      | 366        |
| 6.4 液体与气体的凝聚态相变 .....                    | 369        |
| 6.4.1 液态 ${}^4\text{He}$ 的超流相 .....      | 369        |
| 6.4.2 没有外磁场的液态 ${}^3\text{He}$ 凝聚态 ..... | 372        |
| 6.4.3 外磁场对 ${}^3\text{He}$ 超流相的影响 .....  | 375        |
| 6.4.4 气体的 BEC 相变性质 .....                 | 378        |
| 6.5 综合问题与评注 .....                        | 380        |

|                                   |            |
|-----------------------------------|------------|
| 6.5.1 涨落不对称性                      | 380        |
| 6.5.2 二元相分离的涨落对称性                 | 382        |
| 6.5.3 三级相变定理                      | 383        |
| 6.5.4 多重穿越的跃迁判据                   | 385        |
| 6.5.5 本章各节评注                      | 387        |
| <b>第 7 章 相变的临界现象</b>              | <b>389</b> |
| 7.1 标准模型的临界理论                     | 389        |
| 7.1.1 基本概念                        | 389        |
| 7.1.2 临界指数的理论计算                   | 391        |
| 7.1.3 标准模型指数定理                    | 394        |
| 7.1.4 一些具体例子                      | 396        |
| 7.2 临界涨落效应                        | 400        |
| 7.2.1 涨落的临界指数                     | 400        |
| 7.2.2 $\alpha$ 与 $\gamma$ 指数的各向异性 | 404        |
| 7.2.3 $\eta$ 和 $\nu$ 指数           | 405        |
| 7.2.4 涨落临界指数定理                    | 407        |
| 7.3 临界现象的统计理论                     | 408        |
| 7.3.1 热力学系统的统计模型                  | 408        |
| 7.3.2 Ising 模型                    | 410        |
| 7.3.3 平均场理论                       | 412        |
| 7.3.4 Ising 模型的精确解                | 415        |
| 7.3.5 Widom 标度理论                  | 421        |
| 7.4 平衡态分歧的临界理论                    | 424        |
| 7.4.1 相变的平衡态分歧                    | 424        |
| 7.4.2 分歧解的求解方法                    | 425        |
| 7.4.3 鞍结分歧点与潜热                    | 429        |
| 7.4.4 平衡态临界图像                     | 431        |
| 7.5 热力学系统分歧的临界行为                  | 432        |
| 7.5.1 PVT 系统与铁磁体的潜热               | 432        |
| 7.5.2 二元相分离临界行为                   | 433        |
| 7.5.3 超导的临界性质                     | 437        |
| 7.5.4 气体 BEC 分布的理论图像              | 442        |
| 7.6 综合问题与评注                       | 443        |
| 7.6.1 关于三维 Ising 模型精确解的讨论         | 443        |
| 7.6.2 Kadanoff 自相似标度理论            | 445        |

|  |            |
|--|------------|
| 7.6.3 Wilson 重整合群理论 .....                | 448        |
| 7.6.4 动态与稳态约化方程的关系 .....                 | 451        |
| 7.6.5 本章各节评注 .....                       | 452        |
| <b>第 8 章 凝聚态与量子相变 .....</b>              | <b>454</b> |
| 8.1 液态 $^4\text{He}$ 的超流动性 .....         | 454        |
| 8.1.1 元激发的虚拟粒子 .....                     | 454        |
| 8.1.2 $^4\text{He}$ 超流体的 Landau 理论 ..... | 455        |
| 8.1.3 液态 $^4\text{He}$ 的热力学性质 .....      | 458        |
| 8.1.4 超流旋涡的环形管结构 .....                   | 461        |
| 8.2 低温超导的经典理论 .....                      | 465        |
| 8.2.1 BCS 理论 .....                       | 465        |
| 8.2.2 London 超导电流方程 .....                | 468        |
| 8.2.3 Abrikosov 理论 .....                 | 472        |
| 8.2.4 Josephson 隧道效应 .....               | 475        |
| 8.3 凝聚态量子物理基础 .....                      | 478        |
| 8.3.1 量子理论基础 .....                       | 478        |
| 8.3.2 凝聚态形成的量子机制 .....                   | 481        |
| 8.3.3 凝聚态场方程 .....                       | 483        |
| 8.3.4 状态的图像结构方程 .....                    | 484        |
| 8.4 适用于高温的超导理论 .....                     | 486        |
| 8.4.1 超导的物理机制 .....                      | 486        |
| 8.4.2 PID 电子相互作用势 .....                  | 487        |
| 8.4.3 电子对的形成条件 .....                     | 490        |
| 8.4.4 超导电子对束缚能 .....                     | 493        |
| 8.4.5 临界温度 $T_c$ 的表达式 .....              | 495        |
| 8.5 量子相变 .....                           | 499        |
| 8.5.1 动力学相变与拓扑相变 .....                   | 499        |
| 8.5.2 量子相变的定义 .....                      | 501        |
| 8.5.3 凝聚态粒子流的拓扑指标 .....                  | 503        |
| 8.5.4 标量 BEC 量子相变定理 .....                | 505        |
| 8.5.5 超流动性-绝缘相变 .....                    | 508        |
| 8.6 综合问题与评注 .....                        | 510        |
| 8.6.1 $^3\text{He}$ 超流原子对束缚势 .....       | 510        |
| 8.6.2 Kosterlitz-Thouless 相变 .....       | 511        |
| 8.6.3 准粒子与实体粒子的区别 .....                  | 512        |
| 8.6.4 本章各节评注 .....                       | 515        |

|                             |     |
|-----------------------------|-----|
| 第 9 章 热力学耦合流体的拓扑相变 .....    | 518 |
| 9.1 二维不可压缩流拓扑结构理论 .....     | 518 |
| 9.1.1 基本概念 .....            | 518 |
| 9.1.2 二维零散度向量场结构稳定性 .....   | 519 |
| 9.1.3 边界上的结构分歧 .....        | 521 |
| 9.1.4 内部结构分歧 .....          | 523 |
| 9.2 流体的边界层分离 .....          | 524 |
| 9.2.1 物理现象与问题 .....         | 524 |
| 9.2.2 刚性边界条件的边界层分离 .....    | 527 |
| 9.2.3 自由边界条件的边界层分离 .....    | 529 |
| 9.2.4 海洋边界海域风驱环流的产生 .....   | 531 |
| 9.2.5 尖角旋涡与表面湍流临界速度 .....   | 534 |
| 9.3 内部旋涡流的形成理论 .....        | 537 |
| 9.3.1 水平的热驱动流体动力学模型 .....   | 537 |
| 9.3.2 流体的旋涡分离方程 .....       | 538 |
| 9.3.3 内部分离定理及分离条件的几何化 ..... | 540 |
| 9.3.4 内部旋涡形成的 U 形流理论 .....  | 543 |
| 9.3.5 龙卷风与飓风的形成条件 .....     | 545 |
| 9.4 太阳表面的电磁爆发 .....         | 549 |
| 9.4.1 基本情况介绍 .....          | 549 |
| 9.4.2 热耦合电磁流体模型 .....       | 549 |
| 9.4.3 方程解的爆破定理 .....        | 552 |
| 9.4.4 太阳电磁爆理论 .....         | 554 |
| 9.5 星系的螺旋结构 .....           | 557 |
| 9.5.1 螺旋结构的形成原理 .....       | 557 |
| 9.5.2 动量流体方程与引力场辐射假设 .....  | 559 |
| 9.5.3 星系的动力学模型 .....        | 561 |
| 9.5.4 数学跃迁定理 .....          | 565 |
| 9.5.5 星系螺旋结构理论 .....        | 566 |
| 9.6 综述与评注 .....             | 569 |
| 9.6.1 刚性边界旋涡分离方程的推导 .....   | 569 |
| 9.6.2 算子半群的旋涡分离方程 .....     | 571 |
| 9.6.3 引力辐射 .....            | 573 |
| 9.6.4 本章各节评注 .....          | 575 |
| 参考文献 .....                  | 578 |
| 索引 .....                    | 581 |

# 第1章 统计物理的数学原理

## 1.1 总体性介绍

### 1.1.1 物理学指导性原理

物理学是关于宇宙的非生命、非意识领域中物质规律的自然科学，它主要研究物质结构、物质形态与运动以及物体之间的相互作用。在所有的自然科学中，物理学本质上是唯一讲数学语言的一门学科，并且只能用数学来揭示它最深奥的秘密。

下面的指导性原理是我们从事物理学的指南，也是本书的纲要。

**原理 1.1(物理学指导性原理)** 物理学的本质能够体现在如下三个要点上：

1) 整个理论物理是建立在若干原理基础之上的，即所有普适的物理方程（代表物理定律）能够从这些原理中导出。

2) 自然定律总是取最简单的、美学的形式。

3) 物理概念和理论必须具有明确的物理图像，即能知道所描述的物理现象。

此外，建立数学框架和模型是深入理解物理现象最关键的一个环节。一个好的模型应该是根据自然定律和原理导出的，它们通常是以微分方程的形式表达出来。从基本原理和定律产生的理论，称作第一原理理论，并被大量事实证明是具有很强的生命力的，代表了科学的精髓。

下面的原理是从物理学中总结出来的一个普适性的规律，它揭示出自然界遵循的数学规则，为我们理解和掌握物理学与数学之间关系，以及为我们研究和探索物理世界的自然奥秘提供了明确的方向。它是建立物理学数学模型最基本的指导性原理。

**原理 1.2(物理学指导性原理)** 所有的物理系统都要遵守自然定律和物理原理，它们具有如下三条共同属性：

1) 每个系统都存在一组函数  $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$  来描述它的状态，并且此系统遵守的定律可用数学模型来表达，即

$$\text{物理定律} = \text{数学方程}. \quad (1.1.1)$$

另一方面，该系统的状态函数  $u$  是此方程的解，它们包含了该系统的物理信息。

2) 上面等式 (1.1.1) 右端的方程存在相应的状态函数  $u$  的泛函  $F(u)$ ，使得  $F$  可决定这些方程的表达式。

3) 自然定律和原理是普适的, 这种普适性被物理的对称性所体现, 即任何物理系统都必须服从某些对称性原理, 具体的数学体现就是  $F(u)$  的表达形式在某坐标变化下是不变的, 因而这些对称性原理可实质性地决定上述泛函  $F(u)$  的具体表达形式.

下面关于这两个物理学指导性原理给出几点评注.

(1) 指导性原理 1.1 的观点是由 A. Einstein 和 P. Dirac 首先大力倡导的. 虽然这个观点现在已作为信仰被物理学家们普遍接受, 但是大量的物理事实证明了这个原理的正确性. 事实上, 是 Einstein 首先将物理理论建立在几个原理基础之上的, 他发展的关于引力的广义相对论是建立在三个原理之上的: ① 广义相对性原理; ② 等效原理; ③ Lagrange 动力学原理.

(2) 没有清晰物理图像的概念和理论, 它们的科学价值不会很大 (用于解决问题的技术方法除外). 因为它们不能帮助我们理解自然.

(3) 物理学有许多学科分支, 但按大类分只有五个领域, 它们是: 四种基本相互作用场论、经典力学、量子物理、统计物理、天体物理. 在 (Ma and Wang, 2015a) 中列出了这些领域中的所有支配性的基本原理和定律.

(4) 普适性原理 1.2 展现了物理学的优美, 该原理非常明确地表明物理学是如何与数学不可分割地结合在一起形成一个统一体的. 它为从事物理学工作的人们指明了学习和研究的路线: ① 要明确作为学习和研究对象的物理系统, 搞清物理图像; ② 确定能反映该系统的状态函数; ③ 找到对应这些状态函数的泛函 (在统计物理中称为热力学势, 在其他领域称为 Lagrange 作用量); ④ 考察由泛函决定的物理方程.

(5) 原理 1.2 的结论 2) 中, 泛函  $F$  决定数学模型 (绝大多数是微分方程) 的表达形式一般为如下四种情况:

1)  $F$  的变分型方程

$$\delta F(u) = 0. \quad (1.1.2)$$

2)  $F$  的梯度型方程

$$\frac{du}{dt} = -\delta F(u). \quad (1.1.3)$$

3) Hamilton 型方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{\delta}{\delta u_2} F(u_1, u_2), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= -\frac{\delta}{\delta u_1} F(u_1, u_2), \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

这里  $u_1 = (u_1^1, \dots, u_1^N)$  与  $u_2 = (u_2^1, \dots, u_2^N)$  互为共轭函数.

4) 如果多个系统耦合会导致对称破缺, 则 (1.1.2)–(1.1.4) 变为

$$\delta F(u) + B(u) = 0, \quad (1.1.5)$$

$$\frac{du}{dt} = -\delta F(u) + B(u), \quad (1.1.6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\delta}{\delta u_2} F(u) + B_1(u), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = -\frac{\delta}{\delta u_1} F(u) + B_2(u). \end{cases} \quad (1.1.7)$$

其中  $B(u)$  和  $(B_1(u), B_2(u))$  是对称破缺产生的项.

在本书中, 上述 (1.1.2)–(1.1.6) 几种类型的方程都会出现, 其中 (1.1.2) 类型的方程是作为热力学平衡态方程被引入的, 它被广泛用于获得热力学物态方程、统计分布公式, 以及定态平衡相变的研究中; 方程 (1.1.3) 被应用于研究非平衡态的动力学、动态平衡相变等问题中; 方程 (1.1.4) 被用来研究量子相变; 方程 (1.1.5) 和 (1.1.6) 是研究流体相变动力学的模型.

### 1.1.2 统计物理的范畴和内容

这一小节我们将对统计物理在如下两个方面作整体性介绍: ① 学科结构及研究领域; ② 主要研究对象和内容.

#### 1. 学科结构及研究领域

传统的观点将热力学和统计力学并列分为两个紧密相关的物理学科, 并将统计力学称为统计物理. 在本书中, 作者将热力学与统计理论一起并为统计物理学, 将统计物理的范畴确定为

$$\text{统计物理} = \text{热力学} + \text{统计热力学} + \text{综合领域}, \quad (1.1.8)$$

其中综合领域的范围如下:

$$\begin{cases} \text{综合领域} = \text{非平衡态动力学} + \text{统计物理系统相变}, \\ \text{统计物理系统} = \text{热力学系统} + \text{热耦合的流体系统}. \end{cases} \quad (1.1.9)$$

我们采用 (1.1.8) 和 (1.1.9) 观点的原因是它们的研究对象是一致的, 只是研究的问题、方法、手段等有所不同. 另一个重要原因是它们都受到下面基本原理的支配, 即

非平衡态势下降原理.

该原理是由作者和汪守宏教授根据大量物理事实总结而成的, 将在本章 1.3 节中作详细介绍。统计物理学按不同的问题和性质分为如下几个研究方向:

$$\left. \begin{array}{l} \text{平衡态理论,} \\ \text{热力学势的数学表达式,} \\ \text{非平衡态动力学,} \\ \text{临界行为与相变,} \\ \text{热耦合流体动力学.} \end{array} \right\} \quad (1.1.10)$$

上述基本原理势下降原理(它包含了平衡态极小势原理)为统计物理的(1.1.10)诸研究方向提供了统一数学模型(即数学方程).

## 2. 主要研究对象和内容

统计物理的研究对象被称为统计物理系统, 其构成如(1.1.9), 是满足如下条件的宏观物质系统:

- 1) 由大量的微观粒子构成, 即这些粒子是系统的主体;
- 2) 系统处在微观粒子运动状态, 或微观状态变化中;

对于热力学系统还加上一条,

- 3) 宏观上没有可视运动或可视状态变化出现.

按照第3)条标准, 流体运动不属于热力学系统, 但是符合1)和2)条标准, 因而属于统计物理系统.

从上述1)—3)的定义不难理解统计物理所要研究的内容就是宏观物体内部微观运动集体行为表现出的宏观性质, 如温度、压力、体积变化、粒子密度变化、流体运动等. 也就是说,

统计物理研究的内容是系统内部大量微观粒子  
运动的群体行为所表现出的宏观物理性质.

### 1.1.3 支配统计物理的基本定律与原理

传统的热力学是建立在如下三个基本定律基础之上的.

#### 1. 热力学第一定律

这是能量守恒定律, 该定律表明热力学系统的内能是由热能、机械能、粒子动能及相互作用能等不同形式的能量组成的. 这些能量可以从一种形式转化成另一种形式, 从一个物体传输到另一个物体中, 但在整个转化和传递的过程中总能量是不变的.