微积分发展概论

李烨 编著

现代教育出版社
Modern Education Press

微积分发展概论

李　烨　编著

现代教育出版社
Modern Education Press

图书在版编目(CIP)数据

微积分发展概论/李烨编著．—北京：现代教育出版社，2017.11

ISBN 978-7-5106-5945-4

Ⅰ.①微… Ⅱ.①李… Ⅲ.①微积分—发展—概论 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 295788 号

微积分发展概论

策　　划	庞　强　刘　媛
编　　著	李　烨
责任编辑	刘小华
封面设计	宋晓璐・贝壳学术

出版发行	现代教育出版社
地　　址	北京市朝阳区安华里 504 号 E 座
邮　　编	100011
电　　话	010-64246373(编辑部) 010-64256130(发行部)

印　　刷	天津爱必喜印务有限公司
开　　本	710mm×1000mm　1/16
印　　张	13.5
字　　数	257 千字
版　　次	2018 年 3 月第 1 版
印　　次	2018 年 3 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5106-5945-4
定　　价	48.00 元

作者简介

李烨，女，理学硕士，山东女子学院基础部高等数学教师，主要从事高等数学的教学与研究工作。曾主编教材《高联考研数学》，参编教材《应用大学数学教材》，在《数学物理学报》《中国成人教育》等刊物发表论文数篇，主持并参与省部级、厅局级课题多项。

目　录

第一部分　微积分发展历程

第二部分　微积分基本知识

第一部分　微积分发展历程

第1章　微积分远古史

1.1　中国古代的微积分思想

1.1.1　《庄子》:一尺之捶,日取其半,万世不竭

中国历史悠久,文化源远流长。对于哲学中的很多问题,中国古代的先哲们就曾进行过长期和深入的探索。

中国古代思想家老子有云:"合抱之木,生于毫末;九层之台,起于累土;千里之行,始于足下。"古代思想家荀况的《荀子·大略》中有"尽小者大,积微者著"这句话,在《劝学》中有"不积跬步,无以至千里;不积小流,无以成江海"的名言。这些都反映了中国古代思想家对于"多"和"少"的感性认识,不过中国古代的思想家却没有将这种感性认识推广到"数"或者"几何"的层面上进行思考。下面我们简单介绍一下庄子。

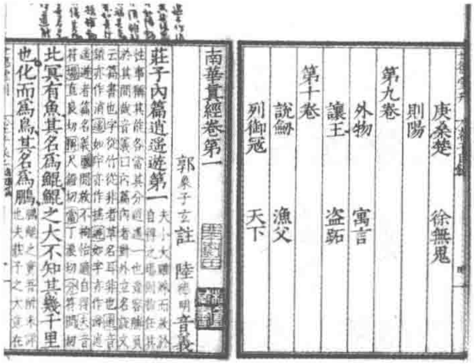
庄子(约公元前369—前286,图1-1),名周,字子休,后人称之为"南华真人",战国时期宋国人,著名的思想家、哲学家、文学家,是道家学派的代表人物、老子哲学思想的继承者和发展者、先秦庄子学派的创始人。他的学说涵盖着当时社会生活的方方面面。后世将他与老子并称为"老庄",他们的哲学为"老庄哲学"。

图1-1

庄子的思想包含着朴素辩证法因素,主要思想是"天道无为",认为一切事物都在变化。

庄周和他的门人以及后学者著有《庄子》(被道教奉为《南华经》,图1-2为其书影),共三十三篇,其中《庄子·天下篇》中有这样一段话:

惠施以此为大,观于天下而晓辩者,天下之辩者相与乐之。卵有毛,鸡三足,郢有天下,犬可以为羊。马有卵,丁子有尾,火不热,山出口,轮不蹍地,目不见,指不至,至不绝。龟长于蛇。矩不方,规不可以圆。凿不围枘,飞鸟之景


南華真經卷第一　郭象子玄註　陸德明音義

莊子內篇逍遙遊第一

北冥有魚其名爲鯤鯤之大不知其幾千里

也化而爲鳥其名爲鵬

庚桑楚　徐無鬼

則陽

第九卷　外物　寓言

讓王　盜跖

第十卷　說劍　漁父

列御寇　天下

图 1-2

未尝动也。镞矢之疾而有不行不止之时，狗非犬，黄马骊牛三，白狗黑，孤驹未尝有母。一尺之捶，日取其半，万世不竭。辩者以此与惠施相应，终身无穷。

其中，“一尺之捶，日取其半，万世不竭”（图 1-3），译成白话文就是一尺长的棍棒，每天截取一半，一万年也分截不完。这体现了古人对分割思想的认识，类似于西方的穷竭法，而这种认识可能为以后的数学家提供了解决问题的灵感，其中一位数学家就是我们即将介绍的刘徽。

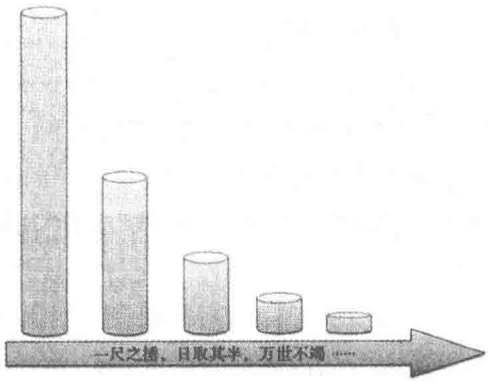


图 1-3

1.1.2 “割圆术”与“圆周率”

图 1-4

刘徽（约公元 225—295，图 1-4），是中国数学史上一个非常伟大的数学家，在世界数学史上也占有杰出的地位，很多书上把他称为“中国的牛顿”。但是刘徽的生卒年月、生平事迹，史书上很少记载。据有限史料推测，他是魏晋时代山东邹平人，终生未做官。其代表作《九章算术注》和《海岛算经》（图 1-5 和图 1-6 分别是这两本书的书影），是中国最宝贵的数学遗产。

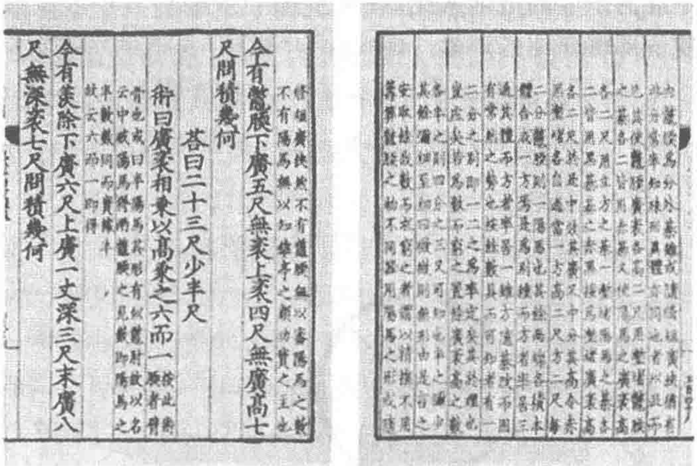

今有芻甍下廣五尺無袤上袤四尺無廣高七尺問積幾何
荅曰二十三尺少半尺
術曰廣袤相乘以高乘之六而一
今有羨除下廣六尺上廣一丈深三尺末廣八尺無深袤七尺問積幾何

图 1-5

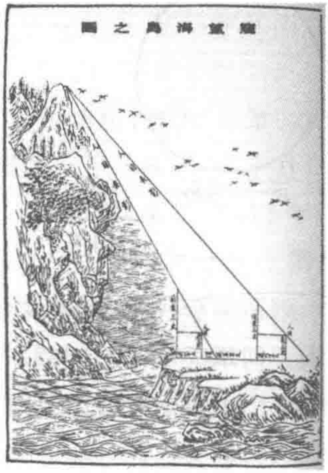


图 1-6

《九章算术》约成书于东汉之初，共有 246 个问题的解法。在许多方面，如解联立方程，分数四则运算，正负数运算，几何图形的体积、面积计算等，都属于世界先进之列，但其中的解法比较原始，缺乏必要的证明，而刘徽则对此均做了补充证明。在这些证明中，显示了他在多方面的创造性贡献。

《海岛算经》一书中，刘徽精心选编了 9 个测量问题，这些题目的创造性、复杂性和代表性，都在后来为西方所瞩目。刘徽思维敏捷、方法灵活，既提倡推理又主张直观。他是中国最早明确主张用逻辑推理的方式来论证数学命题的人。

刘徽在几何方面的主要贡献是提出了“割圆术”，即将圆周用内接或外切正多边形穷竭的一种求圆面积和圆周长的方法。刘徽在“割圆术”中提出的“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”，这可视为古代中国乃至世界在“极限”方面的佳作。

现在用计算机软件可以很简单地绘制圆的内接正 N 边形，如图 1-7 所示，正一百边形已经非常接近于圆了。

刘徽在《九章算术 · 圆田术》的注解中，用“割圆术”证明了圆面积的精确公式，并给出了计算圆周率的科学方法。他首先从圆内接六边形开始割圆，每

次边数倍增,算到 192 边形的面积,得到 $\pi=157/50=3.14$,又算到 3072 边形的面积,得到 $\pi=3927/1250=3.1416$,称为“徽率”。他的“割圆术”大致是这样的:如图 1-8 所示,设圆面积为 S,半径为 r,圆内接正 N 边形边长面积为 S_N,将边数加倍后,得到圆内接正 $2N$ 边形,其面积记为 S_{2N},则由图容易知道:

$$S_{2N}<S<S_{2N}+(S_{2N}-S_N)$$

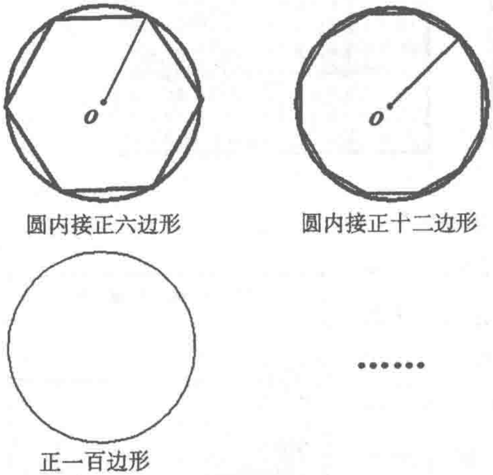


图 1-7

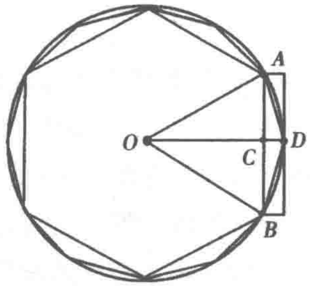


图 1-8

刘徽以后,探求圆周率有成就的学者,先后有南朝时代的何承天、皮延宗等人。何承天求得的圆周率数值为 3.1428,皮延宗求出圆周率值为 $22/7\approx3.14$。以上科学家都为圆周率的研究推算做出了很大贡献,不过祖冲之计算的圆周率最精确。

图 1-9

祖冲之(约公元 429—500,图 1-9)是我国杰出的数学家、科学家。他的原籍是范阳郡遒县(今河北涞水县)。在西晋末年,祖家由于故乡遭到战争的破坏,迁到江南居住。祖冲之的祖父祖昌,曾在宋朝政府里担任过大匠卿,负责主持建筑工程,是掌握了一些科学技术知识的;同时,祖家历代对于天文历法都很有研究。因此祖冲之从小就有接触科学技术的机会。

祖冲之对于自然科学和文学、哲学都有广泛的兴趣,特别是对天文和数学,更有强烈的爱好。早

在青年时期，他就有了博学多才的名声，并且被政府派到当时的一个学术研究机关——华林学省做研究工作。古代劳动人民，由于畜牧业和农业生产的需要，经过长时期的观察，发现了日月运行的基本规律。他们把第一次月圆或月缺到第二次月圆或月缺的一段时间规定为一个月，每个月是 29 天多一点，12 个月称为一年。这种计年方法叫作阴历。他们又观察到：从第一个冬至到下一个冬至(实际上就是地球围绕太阳运行一周的时间)共需要 365 天又 1/4 天，于是把这一段时间称作一年。按照这种办法推算的历法通常叫作阳历。但是，阴历一年和阳历一年的天数，并不恰好相等。按照阴历计算，一年共计 354 天；按照阳历计算，一年应为 365 天 5 小时 48 分 46 秒。阴历一年比阳历一年要少 11 天多。为了使这两种历法的天数一致起来，就必须想办法调整阴历一年的天数。对于这个问题，我们的祖先很早就找到了解决的办法，就是采用“闰月”的办法。在若干年内安排一个闰年，在每个闰年中加入一个闰月。每逢闰年，一年就有 13 个月。由于采用了这种闰年的办法，阴历年和阳历年就比较符合了。

在古代，我国历法家一向把 19 年定为计算闰年的单位，称为“一章”，在每一章里有 7 个闰年。也就是说，在 19 个年头中，要有 7 个年头是 13 个月。这种闰法一直采用了一千多年，不过它还不够周密、精确。约在公元 412 年，赵𢾺制作“元始历”，才打破了岁章的限制，规定在 600 年中间插入 221 个闰月。可惜赵𢾺的改革没有引起当时人的注意，例如著名历算家何承天在公元 443 年制作“元嘉历”时，还是采用 19 年 7 闰的古法。

祖冲之吸取了赵𢾺的先进理论，加上他自己的观察和计算，认为 19 年 7 闰的闰数过多，每 200 年就要差 1 天。因此，他提出了 391 年内 144 闰的新闰法。这个闰法在当时算是最精密的了。

祖冲之不但精通天文、历法，他在数学方面的贡献，特别是对“圆周率”研究的杰出成就，更是超越前代，在世界数学史上放射着异彩。我们都知道圆周率就是圆的周长和直径的比，这个比值是一个常数，现在通用希腊字母“π”来表示。圆周率的应用很广泛。尤其是在天文、历法方面，凡涉及圆的一切问题，都要使用圆周率来推算。我国古代劳动人民在生产实践中求得的最早的圆周率值是“3”，这当然很不精密，但一直被沿用到西汉。后来，随着天文、数学等科学的发展，研究圆周率的人越来越多了。西汉末年的刘歆首先抛弃“3”这个不精确的圆周率值，他曾经采用过的圆周率是 3.547。东汉的张衡也算出圆周率为 $\pi=3.1622$。这些数值比起 $\pi=3$ 有了很大的进步，但是还远远不够精密。直到刘徽创造了用割圆术来求圆周率的方法，圆周率的研究才获得

了重大的进展。

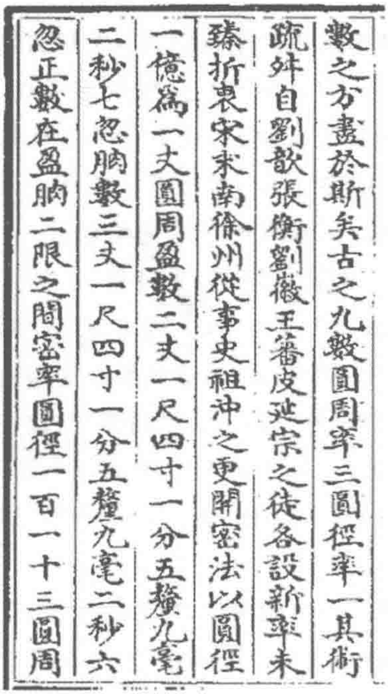

數之方盡於斯矣古之九數圓周率三圓徑率一其術
疏舛自劉歆張衡劉徽王蕃皮延宗之徒各設新率未
臻折衷宋末南徐州從事史祖沖之更開密法以圓徑
一億爲一丈圓周盈數二丈一尺四寸一分五釐九毫
二秒七忽朒數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒六
忽正數在盈朒二限之間密率圓徑一百一十三圓周

图 1-10

据《隋书·律历志》(如图 1-10 所示)记载:“宋末,南徐州从事史祖冲之,更开密法。以圆径一亿为丈,圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽,朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽,正数在盈朒二限之间。密率:圆径一百一十三,圆周三百五十五。约率,圆径七,周二十二。”

由此可知:

1. 祖冲之求出圆周率的上下限是

$$3.1415926<\pi<3.1415927$$

这一结果不但在当时是最精密的圆周率,而且保持世界纪录近一千年,有数学史家提议将这一结果命名为“祖率”。

2. 祖冲之求得 π 的两个近似分数即:约率为 22/7,密率为 355/113。

后人曾推算若要单纯地通过刘徽的“割圆术”计算出上面的精确结果,需要算到圆内接正 12288 边形和正 24576 边形。然而祖冲之得到上面精确的结果,到底用的是什么方法,目前我们已经无法知道,因为他写的一本主要记载圆周率计算方法的书《缀术》已经失传,失传可能是因为其难以理解,《隋书·律历志》还记载:“所著之书,名为《缀术》,学官莫能究其深奥,是故废而不理。”

由于祖冲之所著的数学专著《缀术》已经失传,《隋书》又没有具体地记载他求圆周率的方法,因此,人们对他求圆周率的方法有不同的见解。

有人认为:祖冲之圆周率中的“朒数”是用作圆的内接正多边形的方法求得的;而“盈数”则是用作圆的外切正多边形的方法求得的。祖冲之如果继续用刘徽的办法,从圆的内接正六边形算起,逐次加倍边数,一直算到内接正 24576 边形时,它的各边长度总和只能逐次接近并较小于圆周的周长,这正多边形的面积也只能逐次接近并较小于圆面积,从此求出的圆周率为 3.14159261,也只能小于圆周率的真实数值,这就是朒数。从祖冲之的数学水平来看,突破刘徽的方法,从外切正六边形算起,逐次试求圆周率,也是可能的。如果祖冲之把外切正六边形的边数成倍增加,到正 24576 边形时,他所求

得的圆周率应该是 3.14159270208。这个数是用外切方法求得的。由于外切正多边形各边边长的总和永远大于圆周的长度，这正多边形的面积也永远大于圆面积，所以这个数总比真实的圆周率大。用四舍五入法舍去小数点七位以后的数字，就得出盈数。

祖冲之究竟是否同时用过内接和外切这两个方法求出圆周率的朒数和盈数，是没有确切史料可以证实的。但是采用这个办法所求出的朒、盈两个数值，和祖冲之原来所求出的结果大体是一致的。所以有些数学史家认为祖冲之曾用过作圆的外切正多边形的方法求得圆周率，是很近情理的推想。

但是，如果我们仅仅靠"缀术"这个名词，能够窥探出其中的秘密吗？顾名思义，"缀"字有两个含义：一是"组合"，因此"缀术"就是组合技术；另一个含义是"修补"，即所谓"缀补"，在这种意义上，"缀术"亦可理解为校正技术。这样，所谓"缀术"其实就是组合技术与校正技术。所以有人推测，祖冲之将自己的算法设计技术取名为"缀术"，目的是亲自向世人表白：自己的数学成就只是前人特别是刘徽的研究工作的缀补和修正。也许《缀术》实质上只是《九章算术》的刘徽注之上的祖冲之注。

1964 年 11 月 9 日，为了纪念祖冲之对我国和世界科学文化的伟大贡献，紫金山天文台将 1964 年发现的、国际永久编号为 1888 的小行星命名为"祖冲之星"。

1.2 西方古代的微积分思想

1.2.1 芝诺悖论：不对，但是为什么

读者可能还记得本书的第二个引例，也许你还在纳闷"为什么人追不上乌龟呢"，其实早在公元前 5 世纪就有人提出了这个悖论，它的原名叫"阿基里斯追龟悖论"(阿基里斯是希腊神话中一个跑得很快的英雄)。这个悖论是芝诺提出的。

芝诺(Zeno，图 1-11)约公元前 490 年生于意大利半岛南部的埃利亚，他是埃利亚学派的著名哲学家巴门尼德(Parmenides)的学生和朋友。关于他的生平，缺少可靠的文字记载。芝诺有一本著作《论自然》，在柏拉图的《巴门尼德》篇中，当芝诺谈到自己的著作时说："由于青年时的好胜著成此篇，著成后，人即将它窃去，以致我不能决断，是否应当让它问世。"公元 5 世纪的评论家普罗克洛斯(Proclus)在给这段话写的评注中说，芝诺从"多"和运动的假设出

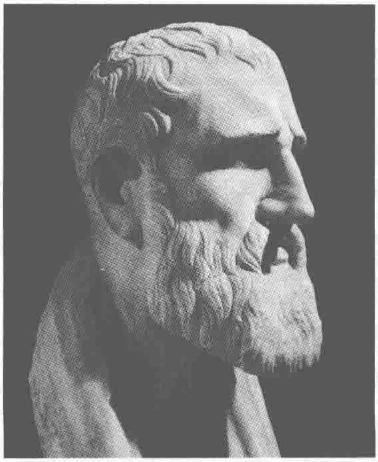


图 1-11

发，一共推出了40个各不相同的悖论。芝诺的著作久已失传，亚里士多德的《物理学》和辛普里西奥斯(Simplici－us)为《物理学》做的注释是了解芝诺悖论的主要依据，此外还有零星残篇可提供佐证。现存的芝诺悖论至少有8个，其中关于运动的4个悖论尤为著名。除“阿基里斯追龟悖论”外还有三个：

1. 二分说：“运动不存在。理由是：位移事物在到达目的地之前必须先到达一半处。”J. 伯内特(Burnet)解释说：即不可能在有限的时间内通过无限多个点。在你走完全程之前必须先走过给定距离的一半，为此又必须走过一半的一半等等，直至无穷。亚里士多德批评芝诺在这里犯了错误：“他主张一个事物不可能在有限的时间里通过无限的事物，或者分别和无限的事物相接触。须知长度和时间被说成是‘无限的’有两种含义，并且一般地说，一切连续事物被说成是‘无限的’都有两种含义：或分起来的无限，或延伸上的无限。因此，一方面，事物在有限的时间里不能和数量上无限的事物相接触；另一方面，却能和分起来无限的事物相接触，因为时间本身分起来也是无限的。因此，通过一个无限的事物是在无限的时间里而不是在有限的时间里进行的，和无限的事物接触是在无限数的而不是在有限数的现在上进行的。”

2. 飞箭静止说：“如果任何事物，当它是在一个和自己大小相同的空间里时(没有越出它)，它是静止着。如果位移的事物总是在‘现在’里占有这样一个空间，那么飞着的箭是不动的。”亚里士多德接着批驳说：“他的这个说法是错误的，因为时间不是由不可分的‘现在’组成的，正如别的任何量都不是由不可分的部分组合成的那样。”又说：“这个结论是因为把时间当作是由‘现在’组成的而引起的，如果不肯定这个前提，这个结论是不会出现的。”

3. 运动场悖论：“跑道上有两排物体，大小相同且数目相同，一排从终点排到中间点，另一排从中间点排到起点。它们以相同的速度沿相反方向做运动。芝诺认为从这里可以说明：一半时间和整个时间相等。”亚里士多德又指出：“这里错误在于他把一个运动物体经过另一运动物体所花的时间，看作等同于以相同速度经过相同大小的静止物体所花的时间。事实上这两者是不相等的。”他的证明可用下面的图解来表示，其中A，B，C代表大小相同的物体。

$$
\begin{array}{r|l}
 & \text{A A A A} \\
\text{B B B B} & \rightarrow \\
\leftarrow & \text{C C C C}
\end{array}
$$

AAAA 为一排静止物体，而 BBBB 和 CCCC 分别代表以相同速度做相反方向运动的物体。于是当第一个 B 到达最末一个 C 的同时，第一个 C 也到达了最末一个 B。这时第一个 C 已经经过了所有的 B，而第一个 B 只经过了所有的 A 中的一半。因为经过每个物体的时间是相等的，所以一半时间和整个时间相等。这个错误结论是从上述错误假定得出的。

现在把 4 个芝诺悖论联系起来分析。诚如亚里士多德所说，“阿基里斯追龟说”其实可以归结为二分说。按照二分说，阿基里斯在到达乌龟的起跑点之前，必须先走过这段距离的 1/2，为此，又必须先走过 1/4，1/8 等等，即必须在有限的时间内通过无限多个点，因此按芝诺的理由，阿基里斯根本就动弹不了。亚里士多德克服这个困难的办法是说，“时间本身分起来也是无限的”，而在解决“飞箭静止说”时又说，“时间不是由不可分的‘现在’组成的，正如别的任何量也都不是由不可分的部分组合成的那样。”亚里士多德曾明确地论证过“在时间里确有一种不可分的东西，我们把它称为‘现在’”。于是问题的症结在于亚里士多德所说的不可分的“现在”究竟是什么，如果用区间表示时间，所谓“现在”是长度很短的线段呢，还是长度为零的严格的数学上的点？如果是前者，那么时间就是由“现在”组成的，飞箭就是不动的了。亚里士多德的意思显然是指后者。但按照亚里士多德对二分说的分析，线段（距离）被分割为和无限数的“现在”相对应的无限数的点。又按照二分法的含义，这里的无限是可数的，那么，由可数的无限个长度为零的点组成的线段，其长度必为零，这又矛盾了。因此，芝诺悖论揭示的是事物内部的稠密性和连续性之间的区别，是无限可分和有限长度之间的矛盾，亚里士多德没能觉察到这一点，当然实际上没能驳倒芝诺。P. 汤纳利（Tannery）在 1885 年指出，芝诺悖论所反对的是那种认为空间是点的总和、时间是瞬刻的总和的概念。换句话说，芝诺并不否认运动，但是他想证明在空间作为点的总和的概念下运动是不可能的。

芝诺因其悖论而著名，并因此在数学和哲学两方面享有不朽的声誉。数学史家 F. 卡约里（Cajori）说：“芝诺悖论的历史，大体上也就是连续性、无限大和无限小这些概念的历史。”英国数学家 B. 罗素（Russell）感慨地说：“在这个变化无常的世界上，没有什么比死后的声誉更变化无常了。死后得不到应有的评价的最显眼的牺牲品莫过于埃利亚的芝诺了。他虽然发明了 4 个无限