基础代数

（第二卷）

席南华 编著

科学出版社

基础代数

（第二卷）

席南华　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是作者为中国科学院大学一年级本科生讲授线性代数课程时，根据作者本人授课的课堂录音和学生的课堂笔记整理修订完善而成的. 作者吸收借鉴了柯斯特利金《代数学引论》的优点和框架，在内容的选取和组织，贯穿内容的观点等方面都有特色. 本书分为三卷，本册为第二卷，主要内容包括：向量空间，线性算子，内积空间，仿射空间与欧几里得仿射空间，二次曲面，张量等. 每章节附有适当的习题，可供读者巩固练习使用.

本书可供数学类各专业及相关专业的本科生、研究生和教师使用，也可作为数学爱好者的参考读物.

图书在版编目(CIP)数据

基础代数. 第二卷/席南华编著. —北京：科学出版社，2018.1

ISBN 978-7-03-056033-9

Ⅰ. ①基… Ⅱ. ①席… Ⅲ. ①代数 Ⅳ. ①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 324241 号

责任编辑：张中兴 梁 清／责任校对：李 影
责任印制：师艳茹／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 1 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2018 年 1 月第一次印刷 印张：21
字数：423 000

定价：49.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

本书的写作动因在第一卷的前言中已经说明. 和第一卷一样, 本书基本上沿用了柯斯特利金所著的《代数学引论》的框架和内容, 只是在表述和细节上 (希望) 更符合汉语读者的习惯, 有些地方的处理也和原教材的不一样, 同时, 贯穿内容的观点也时有不同的地方, 习题的安排上有较大的差别. 本书在写作过程中, 还参考了若干其他的中外教科书, 详见书后的参考文献. 本书的习题主要选自这些参考书, 还有个别自己加上的习题.

本书根据录音稿和学生的笔记 (主要是杨昊天、陈冰露、梁晨旭、金彦浩、张晓敏等同学的笔记) 整理而成. 本书的初稿于 2017 年春季学期在国科大试用. 曹桂兰老师, 助教陈攀、高剑伟, 2016 级线性代数 II-A1 班的同学们指出了初稿中很多的错误. 在此对以上各位的帮助一并致谢.

席南华

2017 年 6 月于玉泉路

目　录

第1章　向量空间

天地间的向量空间数不清, 我们仅讨论了实数域上的行和列的向量空间 $\mathbb{R}^n$, 它从线性方程组的系数中自然产生. 对其他的域, 也有线性方程组, 所以可以考虑这个域上的行和列的向量空间. 但这仍然有局限, 而且这个局限是不必要的. 注意到以前对 $\mathbb{R}^n$ 的讨论是基于两个运算: 行 (或列) 向量之间的加法, 纯量乘行 (或列) 向量及这两个运算的一些性质, 可以知道这两个运算和那些性质才是本质的. 把它们抽象出来, 就得到一般的向量空间的定义, 于是前面发展的若干概念和方法的适用范围大大扩展. 本章和随后的五章将对一般的向量空间做一些讨论.

1.1　定义与例子

一　**定义 1.1**　称集合 V 是域 K 上的**向量空间**(或**线性空间**), 如果 V 是加法 (交换) 群且 K 中的元素与 V 中的元素可以相乘得到 V 的元素, 相乘具有以下性质:

(1) $(ab)v = a(bv)$;

(2) $a(u+v) = au + av$;

(3) $(a+b)v = av + bv$;

(4) $1v = v$.

其中 a, b 是 K 中的任意元素, 1 是 K 中的乘法单位元, u, v 是 V 中任意元素. 向量空间中的元素称为**向量**, 其中的零元常称为**零向量**. 域 K 中的元素称为**纯量**, 纯量与向量的相乘称为**纯量乘**. 域 K 也常称为 V 的**基域**.

说明　在定义中加号 $+$ 既表示 V 中的加法也表示 K 中的加法, 这样做是方便的, 且不会引起歧义. 讨论抽象的 (或抽象地讨论) 向量空间时, 向量空间的交换群运算一般用 $+$ 表示, 基域的元素与向量相乘的运算符号一般省略, 或用小圆点 $\cdot$ 表示. 在讨论一些具体的向量空间时, 可能需要用其他的记号表示向量空间的加法和基域的元素与向量相乘的运算, 以避免混乱. 例如, 正实数全体 $\mathbb{R}_+$ 在数的乘法下是交换群, 对 $u, v \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}$, 定义 $u \oplus v = uv$, $a \odot v = v^a$. 容易验证, 在运算 $\oplus$, $\odot$ 下 $\mathbb{R}_+$ 是实数域上的向量空间.

另一个例子更有意义. 设 V 是复数域上的向量空间. 我们定义复数域上一个新的向量空间 $\bar{V}$, 称为 V 的**复共轭向量空间**. 作为加法群, 它和 V 是一样的, 但纯量乘不一样, 定义为 $\lambda \odot x = \bar{\lambda}x$, 其中 $\bar{\lambda}$ 是复数 λ 的共轭. 由于共轭运算是复数域

的自同构, 容易看出 $\bar{V}$ 是复数域上的向量空间. 要同时研究 V 和 $\bar{V}$, 纯量乘的符号就得有差别.

二　设 V 是域 K 上的向量空间, 用 0 记 K 和 V 中的零元 (这样做是方便的, 虽然刚开始不习惯), 用 $-v$ 记向量 v 的负元. 对任意向量 $u,v\in V$, 定义 $u-v=u+(-v)$. 下面的等式是定义的简单推论, 其中 $a,b\in K$, $v,u\in V$.

(1) $0v=0$, (等式左边的 0 是域中的零元, 右边的 0 是零向量.)

(2) $a0=0$, (等式两边的 0 都是零向量.)

(3) $(-1)v=-v$,

(4) $a(-v)=-av$,

(5) $a(u-v)=au-av$,

(6) $(a-b)v=av-bv$.

现给出最后一个等式的证明, 其余的作为练习. 从向量空间的定义知

$$(a-b)v+bv=(a-b+b)v=av.$$

于是

$$av+(-bv)=(a-b)v+bv+(-bv)=(a-b)v,$$

即 $av-bv=(a-b)v$.

练习 1.2　证明上面的等式 (1) 至 (5).

三　向量空间的例子是丰富的, 如欧几里得平面几何或立体几何中的向量全体形成的集合在向量的加法和实数与向量的乘法下成为向量空间, 分别记作 E^2 和 E^3. 这是向量空间名称的来源. 又如 $\mathbb{R}^n$ 是实数域上的向量空间. 更一般地, 域 K 上长为 n 的行 $(a_1,\cdots,a_n)$ 全体形成的集合 K^n 是 K 上的向量空间, 加法和纯量乘是

$$(a_1,\cdots,a_n)+(b_1,\cdots,b_n)=(a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n),$$
$$\lambda(a_1,\cdots,a_n)=(\lambda a_1,\cdots,\lambda a_n).$$

它称为 K 上的一个**坐标空间**. 类似地, 域 K 上高为 n 的列 $[a_1,\cdots,a_n]$ 全体形成的集合是 K 上的向量空间, 也记作 K^n, 同样称为 K 上的一个**坐标空间**.

下面的几个例子也是常用的.

例 1.3　平凡的交换群就是只含一个元素的群, 如果用 0 记这个元素, 定义纯量乘为 $a0=0$, 这个交换群就可以作为任何域的向量空间, 称为**零向量空间或零维空间**, 常记作$\mathbf{0}$或 0.

例 1.4　如果 F 是域 K 的子域, 通过域中的加法和乘法, K 自然成为 F 上的向量空间. 如复数域 $\mathbb{C}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间, 复数域和实数域都是有理数

域上的向量空间. 特别, K 上的向量空间自然成为 F 上的向量空间, 域 K 是它自身上的向量空间.

实数域 (或复数域) 上的向量空间常称为**实向量空间**(或**复向量空间**).

例 1.5 设 U 是域 K 上的向量空间. 从集合 X 到 U 的映射全体记作 U^X. 定义映射之间的加法和 K 中元素与映射的纯量乘如下:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad \text{对任意的 } x\in X;$$
$$(af)(x)=a(f(x)),\quad \text{对任意的 } a\in K,\ \ x\in X.$$

易见在这些运算下 U^X 成为域 K 上的向量空间. 特别, K^X 是域 K 上的向量空间.

例 1.6 设 X 是实数集中的一个 (开, 闭, 或半开半闭) 区间, 区间 X 上的所有连续函数全体 $C(X)$ 在函数的加法和函数与实数的乘法下成为实向量空间.

例 1.7 设 K 是域, 则 m 元多项式环 $K[x_1,\cdots,x_m]$ 是 K 上的向量空间, 加法和纯量乘就是环中的加法和 K 中元素与多项式的乘法. 同样, 环 $K[x_1,\cdots,x_m]$ 中次数为 n 的齐次多项式添上零多项式是 K 上的向量空间; 环 $K[x_1,\cdots,x_m]$ 中次数不超过 n 的多项式全体也是 K 上的向量空间.

例 1.8 微分方程 $\dfrac{d^2y}{dt^2}+a\dfrac{dy}{dt}+by=0$ 的解集是实向量空间, 其中 a,b 是给定常数.

例 1.9 域 K 上的 $m\times n$ 矩阵全体在矩阵的加法和 K 中元素与矩阵的乘法下成为 K 上的向量空间, 记作 $M_{m,n}(K)$. 特别, 方阵环 $M_n(K)=M_{n,n}(K)$ 是 K 上的向量空间.

四 线性子空间 设 U 是向量空间 V 的子集, 称 U 为 V 的**线性子空间**(常简称为**子空间**), 如果 U 是 V 的加法子群且对任意的 $a\in K$ 和任意的 $v\in U$ 有 $av\in U$.

每个向量空间都有两个平凡的子空间: 它自身和只含零向量的子空间, 后者也记作$\mathbf{0}$或 0, 称为向量空间的**零子空间**. 显然, V 的子空间自身是一个向量空间.

例 1.10 在向量空间 E^3 中和一个给定向量平行的向量全体形成一个子空间.

例 1.11 设 X 是实数集中的一个 (开, 闭或半开半闭) 区间, 区间 V 上的所有可微函数全体 $C^1(X)$ 是这个区间上连续函数空间 $C(X)$ 的子空间.

例 1.12 设 V 是定义在实数轴上的实函数全体, 在函数的加法和实数与函数的乘法下成为实向量空间. V 中的偶函数全体是子空间, 以 π 为周期的周期函数全体是子空间, 形如 ae^x+be^{-x}, $a,b\in\mathbb{R}$ 的函数全体是子空间.

例 1.13 设 A 是域 K 上的 $m\times n$ 矩阵, 那么齐次线性方程组 $AX=0$ 的解集是 K^n 的子空间.

例 1.14 $\mathbb{R}^2$ 上的直线 $y=ax$ 是子空间, 见图 1.1.

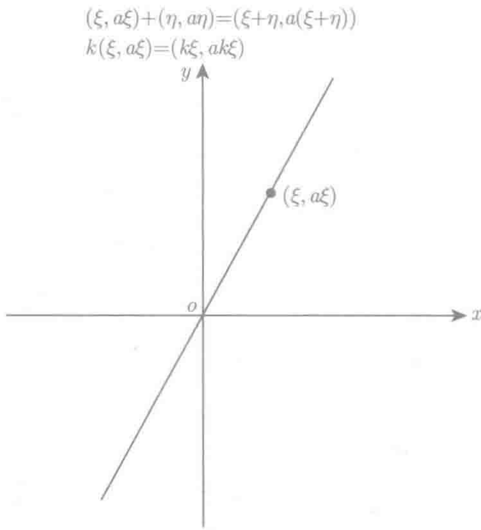

图 1.1

习　题　1.1

判断下列习题 1–6 中的集合是否为实向量空间, 其中的函数都是以实数域为定义域的实值函数.

1. (1) 满足条件 $f(1)=0$ 的函数全体; (2) 满足条件 $f(0)=1$ 的函数全体.

2. (1) 偶函数全体: $f(x)=f(-x)$; (2) 奇函数全体: $f(-x)=-f(x)$.

3. 定义在实数域上的所有的递增函数.

4. 满足条件 $f(x)=f(2-x)$ 所有函数.

5. 以 2π 为周期的函数全体: $f(x+2\pi)=f(x)$.

6. (1) 满足条件 $\int_a^b f(x)dx=0$ 的所有实值连续函数 f;

(2) 闭区间 $[a,b]$ 上满足条件 $\int_a^b f(x)dx\leqslant 0$ 的所有实值连续函数 f;

(3) 满足条件 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ 的所有函数 f.

设 K 是域. 判断习题 7–9 中的集合是否为原空间的线性子空间.

7. (1) K^n 中坐标满足方程 $x_1+\cdots+x_n=1$ 的所有向量形成的集合; (2) 坐标满足方程 $x_1+\cdots+x_n=0$ 的所有向量形成的集合.

8. $M_{m,n}(K)$ 中秩为 1 的矩阵全体.

9. (1) $M_n(K)$ 中的对称矩阵全体 (${}^tA=A$);

(2)$M_n(K)$ 中的斜对称矩阵全体 (${}^tA=-A$);

(3) $M_n(K)$ 中行列式为 0 的矩阵全体;

(4)$M_n(K)$ 中的迹为 0 的矩阵全体 (矩阵 $A=(a_{ij})$ 的迹定义为对角线中的元素之和:

$\mathrm{tr}\, A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$).

10. 设 V 是向量空间. 证明: V 的任意一组子空间的交仍是 V 的子空间.

11. 对复数域上的坐标空间 $\mathbb{C}^n$, 定义新的纯量乘为 $b \circ (a_1, \cdots, a_n) = (b\bar{a}_1, \cdots, b\bar{a}_n)$. 在运算 $+$ 和 $\circ$ 下 $\mathbb{C}^n$ 是否为向量空间?

12. 设 M 是有限集, 它的所有的子集形成的集合记作 2^M. 命 $K = \mathbb{Z}_2$. 定义 2^M 中的加法和 K 与 2^M 中元素的乘法如下:

$$A + B = (A \cup B) \backslash (A \cap B), \quad 1A = A, \quad 0A = \varnothing.$$

证明: 在这两个运算下, 2^M 成为域 $\mathbb{Z}_2$ 上的向量空间.

13. 交换群 A 能成为域 $\mathbb{Z}_p$ 上的向量空间当且仅当对任意的 $x \in A$ 有 $px = 0$.

14. 交换群 A 能成为域 $\mathbb{Q}$ 上的向量空间当且仅当 A 中的非零元都是无限阶的, 且对任意的正整数 n 和 $a \in A$, 方程 $nx = a$ 在 A 中有解.

15. 设 K 是有限域, $|K| = q$. 问: 坐标空间 K^n 有多少个元素. 在 K^n 中方程

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b, \quad b \in K, \text{ 系数 } a_i \in K \text{ 不全为 } 0$$

有多少个解?

1.2 向量间的线性关系

一 向量间的线性关系对于向量空间的讨论是基本的. 第一个重要的概念是线性组合. 设 $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$ 是向量, 它们的**线性组合**是指形如

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$$

的向量, 其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是纯量, 称为这个线性组合的**系数**.

向量 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 的所有线性组合形成的集合称为这些向量的**线性包络**, 记作 $\langle v_1, v_2, \cdots, v_n \rangle$. 易见这个线性包络是 V 的子空间, 且是包含 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 的最小的子空间, 它也称为这些向量**张成的**(线性) 子空间.

一般地, 向量空间 V 的任意子集 M 的线性包络定义为

$$\langle M \rangle = \{a_1x_1 + \cdots + a_kx_k \mid a_1, \cdots, a_k \in K, \quad x_1, \cdots, x_k \in M, \quad k = 1, 2, 3, \cdots\}.$$

即, $\langle M \rangle$ 是 M 中的所有有限子集的线性包络的并集. 易见

$$\langle M \rangle = \left\{ \sum_{x \in M} a_x x \mid \text{诸 } a_x \in K, \text{ 且这些系数 } a_x \text{ 仅有限个不为零} \right\},$$

所以它是 V 的子空间, 且是包含 M 的最小的子空间, 也称它为由 M**张成的**(线性) 子空间.

二 线性相关 向量空间 V 中的向量 (组)$v_1, \cdots, v_n$ 称为**线性相关**如果在基域 K 中有不全为零的元素 $a_1, \cdots, a_n$ 使得线性组合 $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ 为零向量; 称为**线性无关**如果只要纯量 $a_1, \cdots, a_n \in K$ 不全为零, 线性组合 $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ 就不是零向量 (即 $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0$ 蕴含 $a_1 = \cdots = a_n = 0$).

例 1.15 在函数空间中 $\sin 3t$, $\sin t$, $\sin^3 t$ 线性相关, 因为 $\sin 3t - 3\sin t + 4\sin^3 t = 0$.

例 1.16 在函数空间中 $\sin t$, $\sin 2t$, $\sin 3t$ 线性无关. 假设 $a\sin t + b\sin 2t + c\sin 3t = 0$. 分别取 $t = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, 得到线性方程组

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + c = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0, \\ a - c = 0. \end{aligned}$$

该方程组只有零解 $a=b=c=0$. 所以这些函数线性无关. 更简单的方法是利用公式

$$\int_0^{2\pi} \sin jt \sin kt \, dt = \begin{cases} \pi, & \text{如果} j = k, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

从等式 $a\sin t + b\sin 2t + c\sin 3t = 0$ 得 $a\sin t\sin jt + b\sin 2t\sin jt + c\sin 3t\sin jt = 0$. 取 $j = 1, 2, 3$, 然后对等式在区间 $[0, 2\pi]$ 做定积分, 即得 $a\pi = b\pi = c\pi = 0$.

三 下面是一些关于线性相关和线性无关的简单性质, 它们绝大部分在第一卷 3.1 节关于 $\mathbb{R}^n$ 的讨论中已经出现过.

定理 1.17 含有零向量的向量组是线性相关的. 至少有两个元素的向量组线性相关当且仅当其中有一个是其余的线性组合. 如果一组向量的一部分线性相关, 则这组向量线性相关; 换句话说, 如果一组向量线性无关, 则这组向量的任何部分向量是线性无关的.

我们省略证明, 因为直接从定义就可以看出, 除第一个显然的结论外, 其余结论的证明也是第一卷 3.1 节的相关证明的重复. 下一个结论是经常用到的.

定理 1.18 设向量 $u_1, \cdots, u_m$ 都是向量 $v_1, \cdots, v_n$ 的线性组合.

(1) 如果 $m > n$, 那么 $u_1, \cdots, u_m$ 线性相关;

(2) 如果 $u_1, \cdots, u_m$ 线性无关, 那么 $m \leqslant n$.

证明 (1) 和 (2) 等价. 现证 (2). 用反证法, 假设 $m > n$.

首先有 $u_1 = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$. 因为 $u_1 \neq 0$, 所以线性组合中的系数不全为零, 不妨设 $a_{i_1} \neq 0$, 那么 v_{i_1} 是 $u_1, v_1, \cdots, \hat{v}_{i_1}, \cdots, v_n$ 的线性组合 (本证明中向量上带 ^ 的含义是在序列或集合中去掉这个向量). 于是有

$$\langle v_1, \cdots, v_n \rangle = \langle u_1, v_1, \cdots, \hat{v}_{i_1}, \cdots, v_n \rangle.$$

从而 u_2 是 $u_1, v_1, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, v_n$ 的线性组合. 由于 u_1, u_2 线性无关, 所以这个线性组合中某个 v_{i_2} 的系数不为零. 这样 v_{i_2} 就是 $u_1, u_2, v_1, \cdots, \hat{v}_{i_1}, \cdots, \hat{v}_{i_2}, \cdots, v_n$ 的线性组合. 于是

$$\langle v_1, \cdots, v_n\rangle = \langle u_1, v_1, \cdots, \hat{v}_i, \cdots, v_n\rangle = \langle u_1, u_2, v_1, \cdots, \hat{v}_{i_1}, \cdots, \hat{v}_{i_2}, \cdots, v_n\rangle.$$

如此下去, 可得

$$\langle v_1, \cdots, v_n\rangle = \langle u_1, \cdots, u_n\rangle.$$

于是 u_{n+1} 是 $u_1, \cdots, u_n$ 的线性组合. 这与条件矛盾, 所以 $m \leqslant n$. □

注 也可以像第一卷 3.1 节引理 3.7 的证明那样通过某个齐次线性方程组的非零解以证明 (1) 成立.

练习 1.19 证明:

(1) 如果向量 $v_1, \cdots, v_n$ 线性无关, $v_1, \cdots, v_n, v$ 线性相关, 则 v 是 $v_1, \cdots, v_n$ 的线性组合;

(2) 如果向量 $v_1, \cdots, v_n$ 线性无关, 向量 v 不能表示成 $v_1, \cdots, v_n$ 的线性组合, 则 $v, v_1, \cdots, v_n$ 线性无关.

(3) 如果 u 是 $v_1, \cdots, v_n$ 的线性组合, 而每个 v_i 又是 $w_1, \cdots, w_m$ 的线性组合, 那么 u 是 $w_1, \cdots, w_m$ 的线性组合, 即

$$u \in \langle v_1, \cdots, v_n\rangle \text{ 且每个 } v_i \in \langle w_1, \cdots, w_m\rangle \Longrightarrow u \in \langle w_1, \cdots, w_m\rangle.$$

习 题 1.2

1. 设 u, v 是向量, a, b 是纯量. 证明:

(1) $au = 0$ 当且仅当 $a = 0$ 或 $u = 0$;

(2) $au + bv = bu + av$ 当且仅当 $a = b$ 或 $u = v$.

2. (1) 向量 u, v 线性无关是否蕴含 $au + v$, $u + av$ 线性无关;

(2) 向量组 $v_1, \cdots, v_n$ 线性无关是否蕴含向量组 v_1+v_2, v_2+v_3, $\cdots$, $v_{n-1}+v_n$, v_n+av_1 线性无关.

3. 证明下列函数组线性无关:

(1) $\sin x$, $\cos x$;

(2) 1, $\sin x$, $\cos x$;

(3) $\sin x$, $\sin 2x$, $\cdots$, $\sin nx$;

(4) $\sin x$, $\sin^2 x$, $\cdots$, $\sin^n x$;

(5) 1, $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\cdots$, $\sin nx$, $\cos nx$.

4. 证明下列函数组线性无关:

(1) $e^{a_1 x}$, $\cdots$, $e^{a_n x}$;

(2) x^{a_1}, $\cdots$, x^{a_n};

(3) $(1-a_1x)^{-1}$, $\cdots$, $(1-a_nx)^{-1}$.

其中 a_1, $\cdots$, a_n 是互不相同的实数.

5. 在单变量实函数空间中, 向量 f_1, $\cdots$, f_n 线性无关当且仅当存在实数 a_1, $\cdots$, a_n 使得 $\det(f_i(a_j)) \neq 0$.

1.3 基与维数

一 有了线性无关的概念就可以定义向量空间的基和维数.

定义 1.20 称向量组 $v_1, \cdots, v_n$ 是 (或说形成、构成) 向量空间 V 的**基**如果这些向量线性无关且张成 V. 诸 v_i 称为 (这个)**基的向量**, 简称为**基向量**. 在不产生歧义的情况下, 有时我们会简单地用记号 (v_i) 表示基 $v_1, \cdots, v_n$.

例 1.21 在欧几里得平面几何或立体几何中的向量全体形成的空间 E^2 和 E^3 中, 平行于同一条直线的向量称为**共线的**, 平行于同一个平面的向量称为**共面的**. 在 E^2 中不共线的两个向量形成一个基, 在 E^3 中不共面的三个向量形成一个基.

例 1.22 向量 $\varepsilon_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$, $\varepsilon_n = (0, 0, 0, \cdots, 1)$ 形成空间 K^n 的一个基, 称为 K^n 的**标准基**.

例 1.23 在例 1.5 中, 如果 X 是有限集, 对每个 $x \in X$, 定义

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } y = x, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

那么向量 δ_x, $x \in X$ 线性无关. 对任意的 $f \in K^X$, 有 $f = \sum\limits_{x \in X} f(x)\delta_x$. 所以, 向量 δ_x, $x \in X$ 是 K^X 的基.

向量空间的基对于该空间的向量间的关系的讨论是很有用的, 利用基可以建立抽象的向量空间与空间 K^n 的联系.

定理 1.24 假设 $v_1, \cdots, v_n$ 是向量空间 V 的基. 那么 V 中每一个向量 v 都以唯一的方式表示成 $v_1, \cdots, v_n$ 的线性组合; 线性组合的系数称为 v 关于这个基 (或在这个基下) 的**坐标**.

证明 根据定义, v 可以表示成 $v_1, \cdots, v_n$ 的线性组合. 假设 v 有两种方式表示成 $v_1, \cdots, v_n$ 的线性组合:

$$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = v = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n.$$

两个线性组合相减, 得

$$(a_1 - b_1)v_1 + \cdots + (a_n - b_n)v_n = 0.$$

由于 $v_1, \cdots, v_n$ 线性无关, 得

$$a_1 - b_1 = 0,\ \cdots,\ a_n - b_n = 0.$$

所以 $a_1 = b_1,\ \cdots,\ a_n = b_n$. 即 v 表示成 $v_1, \cdots, v_n$ 的线性组合的方式是唯一的. □

定理 1.25 假设 $v_1, \cdots, v_n$ 是向量空间 V 的基, V 的基域为 K, 那么映射

$$\varphi : V \to K^n,\ \ a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \to (a_1, \cdots, a_n)$$

是双射, 且对任意的 $a, b \in K$, $u, v \in V$ 有 $\varphi(au + bv) = a\varphi(u) + b\varphi(v)$.

证明 根据定理 1.24, V 中向量都是以唯一的方式表示成 $v_1, \cdots, v_n$ 的线性组合, 所以映射 φ 是确切定义的且是单射. 显然这个映射是满射, 所以它是双射.

命 $u = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$, $v = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n$, 那么

$$au + bv = (aa_1 + bb_1)v_1 + \cdots + (aa_n + bb_n)v_n.$$

于是

$$\begin{aligned}\varphi(au + bv) &= (aa_1 + bb_1, \cdots, aa_n + bb_n)\\ &= a(a_1, \cdots, a_n) + b(b_1, \cdots, b_n)\\ &= a\varphi(u) + b\varphi(v).\end{aligned}$$

定理得证. □

定义 1.26 称域 K 上的两个向量空间 V, U **同构**如果存在双射 $\varphi : V \to U$ 使得对任意的 $a, b \in K$, $u, v \in V$ 有

$$\varphi(au + bv) = a\varphi(u) + b\varphi(v).$$

映射 φ 也称为**(线性) 同构**. 注意条件 $\varphi(au+bv) = a\varphi(u)+b\varphi(v)$ 等价于 $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ 且 $\varphi(au) = a\varphi(v)$, 即映射保持加法和纯量乘两个运算.

定理 1.25 表明如果域 K 上的向量空间 V 的一个基有 n 个向量, 那么 V 与 K^n 同构.

练习 1.27 证明: 如果 $\varphi : V \to U$, $\psi : U \to W$ 是同构, 那么 $\varphi^{-1} : U \to V$ 和 $\psi\varphi : V \to W$ 都是同构.

练习 1.28 设 $\varphi : V \to U$ 是同构, $v_1, \cdots, v_m$ 是 V 中的向量. 证明这些向量线性无关当且仅当 $\varphi(v_1), \cdots, \varphi(v_m)$ 线性无关.

二 接下来对基的性质做进一步的讨论.

命题 1.29 假设 $u_1, \cdots, u_m$ 和 $v_1, \cdots, v_n$ 是向量空间 V 的两个基, 那么 $m = n$. 从而 V 的所有基含有同样数量的向量. 一个基中所含向量的个数称为 V 的**维数**, 记作

$$\dim V.$$

零向量空间的基约定为空集, 维数为 0.

证明　这是定理 1.18 的直接推论. □

定理 1.26 和练习 1.27 及练习 1.28 表明, 基域相同的向量空间是同构的当且仅当它们的维数相同, 而且都同构于某个 K^n. 虽然抽象地看, 有限维向量空间与向量空间 K^n 没有差别, 但具体的向量空间常有更丰富的结构和直观的性质, 如空间 E^2, E^3, 多项式空间, 函数空间 (参考例 1.16) 等.

定理 1.30　假设 V 的维数是 n, 那么

(1) V 中任意 $n+1$ 个向量都线性相关;

(2) V 中任意 n 个线性无关的向量都构成 V 的一个基.

证明　(1) 由定理 1.18(1) 推出.

(2) 设 $u_1, \cdots, u_n$ 线性无关, 从定理 1.18 的证明知这 n 个向量张成 V, 所以构成 V 的基. □

定理 1.31　假设 V 的维数是 n.

(1) 如果 V 中的 n 个向量张成 V, 那么这 n 个向量线性无关, 从而构成 V 的基;

(2) V 中任意一组线性无关的向量都可以扩充为 V 的一个基, 特别, 任何非零向量都在某个基中.

证明　(1) 如果这 n 个向量 $u_1, \cdots, u_n$ 线性相关, 那么其中的一个是其余向量的线性组合, 从而 V 可由 $n-1$ 个向量张成. 于是一个基中的 n 个向量都是这 $n-1$ 个向量的线性组合. 根据定理 1.18(1), 基中的 n 个向量线性相关. 这是一个矛盾, 所以向量 $u_1, \cdots, u_n$ 必须线性无关. 由定理 1.30(2) 知, $u_1, \cdots, u_n$ 是 V 的基.

(2) 假设 $u_1, \cdots, u_m \in V$ 线性无关. 根据定理 1.18(2), $m \leqslant n$. 从定理 1.18 的证明知, 对 V 的任意基 $v_1, \cdots, v_n$, 存在 $i_1, \cdots, i_m$ 使得

$$\langle v_1, \cdots, v_n \rangle = \langle u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, \hat{v}_{i_1}, \cdots, \hat{v}_{i_m}, \cdots, v_n \rangle.$$

由定理 1.30(2) 知, $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, \hat{v}_{i_1}, \cdots, \hat{v}_{i_m}, \cdots, v_n$ 是 V 的基. □

如果向量空间 V 的任何有限个向量都不能张成 V, 那么称 V 是**无限维空间**, 维数 $\dim V = \infty$. 域 K 上的多项式环 $K[t]$ 和实数轴上的连续函数全体分别是 K 和 $\mathbb{R}$ 上的无限维空间. 本书主要讨论有限维向量空间.

有限维向量空间的一个向量组 (可能含有无限多的向量) 的一部分向量称为这个向量组的**极大线性无关组**如果这部分向量线性无关, 而向量组任何其他向量都是这部分向量的线性组合. 例如, 在 K^4 中, 向量组 (1,1,0,0), (0,1,0,1), (1,0,1,0), (1,2,0,1) 的前三个向量和后三个向量都是极大线性无关组.

定理 1.32　设 S 是有限维向量空间 V 的子集, 含有非零向量, 那么

(1) 向量组 S 有极大线性无关组;

(2) 向量组 S 中任意两个极大线性无关组所含的向量的个数相同;

(3) 如果 $U=\langle S\rangle$, 那么 S 的极大线性无关组是 U 的基.

证明 (1) 取 S 中的非零向量 v_1. 如果 $\langle S\rangle=\langle v_1\rangle$, 那么 v_1 就是 S 的极大线性无关组. 否则, 取 $v_2\in\langle S\rangle\setminus V_1$, 其中 $V_1=\langle v_1\rangle$. 由练习 1.19(2) 知, v_1,v_2 线性无关. 如果 $V_2=\langle v_1,v_2\rangle$ 等于 $\langle S\rangle$, 那么 v_1,v_2 就是 S 的极大线性无关组. 否则取 $v_3\in\langle S\rangle\setminus V_2$, 根据练习 1.19(2), v_1,v_2,v_3 线性无关. 如此重复下去, 假设在 S 中取出了线性无关的向量 $v_1,v_2,\cdots,v_k$. 由于 $S\subset V$, 由定理 1.30 得 $k\leqslant\dim V=n$. 这样一来, S 中有线性无关的向量组, 每个线性无关的向量组中的向量的个数不超过 n.

设 $v_1,v_2,\cdots,v_r$ 是 S 中的线性无关向量组, 所含的向量个数最多. 根据练习 1.19(2), S 中的每一个向量都是 $v_1,v_2,\cdots,v_r$ 的线性组合, 从而 $v_1,v_2,\cdots,v_r$ 是 S 的极大线性无关组.

(2) 设 $u_1,u_2,\cdots,u_s$ 是 S 的另一个极大线性无关组. 由于 $u_1,u_2,\cdots,u_s$ 都是 $v_1,v_2,\cdots,v_r$ 的线性组合, 由 1.18(2), $s\leqslant r$, 反过来, $v_1,v_2,\cdots,v_r$ 都是 $u_1,u_2,\cdots,u_s$ 的线性组合, 所以 $r\leqslant s$, 于是 $r=s$.

(3) 从基和极大线性无关组的定义推出. □

向量组的秩定义为向量组张成的空间的维数, 它等于向量组的极大线性无关组所含的向量个数. 我们用记号 $\operatorname{rank}S$ 或 $\operatorname{rk}S$ 表示向量组 S 的秩.

三 转换矩阵 设 V 是域 K 上的 n 维向量空间, $u_1,\cdots,u_n$ 和 $v_1,\cdots,v_n$ 是它的两个基. 一个基的向量可以表示成另一个基的向量的线性组合, 而且表示方式唯一.

$$\begin{aligned}u_1&=a_{11}v_1+a_{21}v_2+\cdots+a_{n1}v_n,\\u_2&=a_{12}v_1+a_{22}v_2+\cdots+a_{n2}v_n,\\&\cdots\cdots\\u_n&=a_{1n}v_1+a_{2n}v_2+\cdots+a_{nn}v_n.\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

线性组合中的系数给出矩阵

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},\tag{1.3.2}$$

称为从基 $v_1,\cdots,v_n$ 到基 $u_1,\cdots,u_n$ 的**转换矩阵**. 注意 u_j 在基 $v_1,\cdots,v_n$ 下的坐标是转换矩阵 A 的第 j 列.

根据练习 1.28 和定理 1.25, 矩阵 A 的列向量是线性无关的, 从而矩阵 A 的秩是 n, 于是它可逆 (参看第一卷 5.4 节第四部分). 反过来, 对于域 K 上的任意一个