工程分析方法

——面向工程应用的简化分析方法

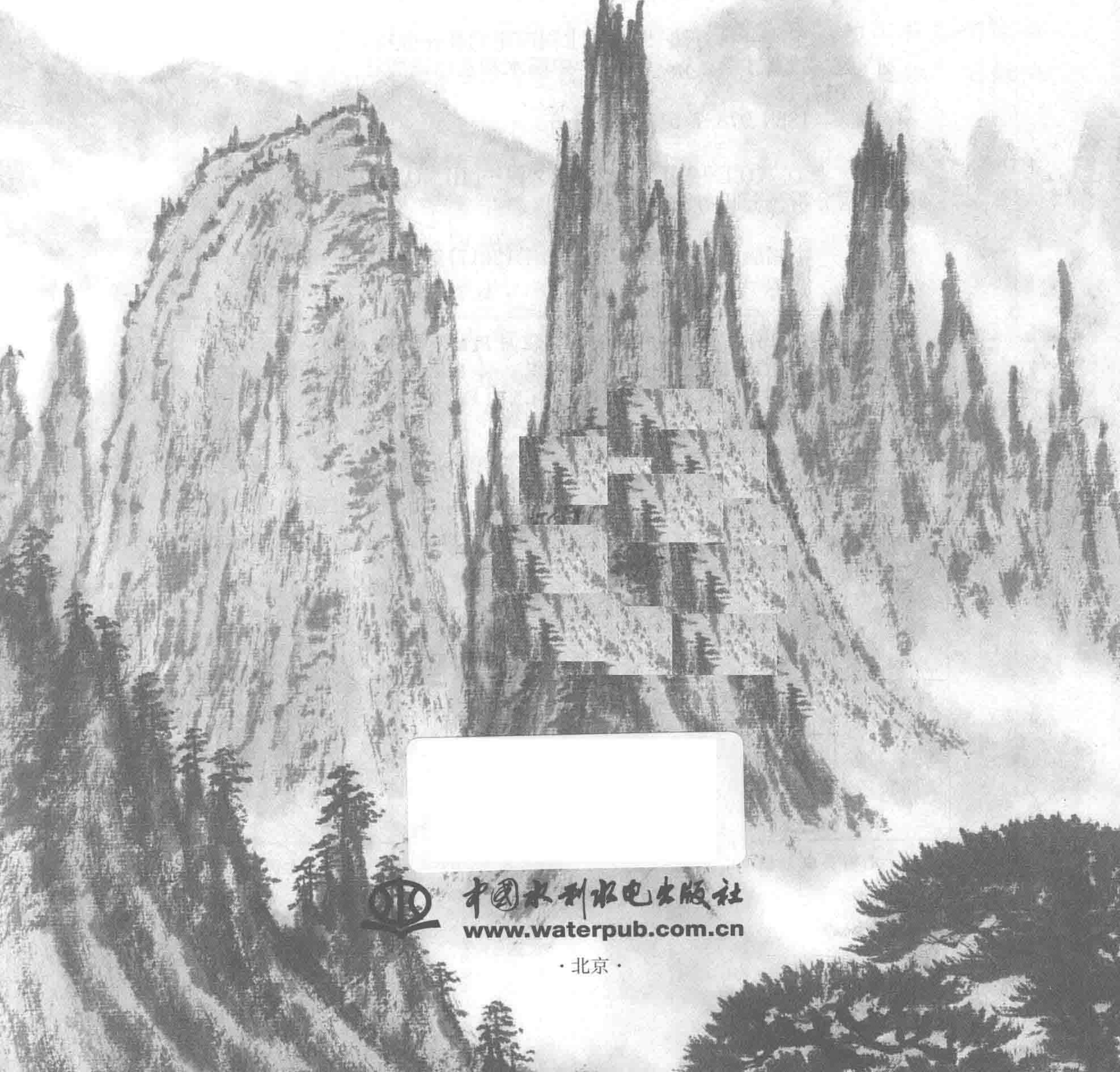
刘健　钱富才　著

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

工程分析方法

——面向工程应用的简化分析方法

刘健　钱富才　著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn
·北京·

内 容 提 要

本书试图搭建起"学院派"和"经验派"之间的桥梁，面向工程需要实实在在地简化工程分析方法，使之便于工程师们使用。

本书分为绪论、精英优化法、控制的鲁棒性评估、非充分信息估计、不确定性分析、比较分析和元素取舍分析6章，书中除了论述作者在长期工程实践中提炼出的工程分析方法之外，还给出了大量应用实例。

本书适合于从事规划、设计、制造、测试等工作的工程师和科研人员阅读，也可作为工科大专院校的教师、研究生和高年级学生参考。

图书在版编目（CIP）数据

工程分析方法：面向工程应用的简化分析方法 / 刘健，钱富才著. -- 北京：中国水利水电出版社，2017.12

ISBN 978-7-5170-6152-6

Ⅰ. ①工… Ⅱ. ①刘… ②钱… Ⅲ. ①电力工程－工程分析－分析方法 Ⅳ. ①TM7

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第326740号

书　　名	工程分析方法——面向工程应用的简化分析方法 GONGCHENG FENXI FANGFA——MIANXIANG GONGCHENG YINGYONG DE JIANHUA FENXI FANGFA
作　　者	刘健　钱富才　著
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sales@waterpub.com.cn 电话：(010) 68367658（营销中心）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：(010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	中国水利水电出版社微机排版中心
印　　刷	北京瑞斯通印务发展有限公司
规　　格	184mm×260mm　16开本　10印张　237千字
版　　次	2017年12月第1版　2017年12月第1次印刷
定　　价	**48.00**元

前言 PREFACE

工程师们经常遇到书本上的理论知识不能有效解决工程问题的情况，以至于他们干脆放弃了分析而完全依靠经验去解决实际问题。学者和科学家群体却对建模、辨识、优化等理论研究非常感兴趣，而他们又往往不直接解决工程实际问题。闭门造车的研究模式逐渐将学问越做越复杂、越做越理想、越做越脱离实际需要，以至于工程师们越来越难以利用这些学术成果，形成了各个行业“学院派”和“经验派”越来越显著的对峙局面。“经验派”的工程师们嘲讽“学院派”是将简单的问题复杂化，“学院派”的学者们指责“经验派”的做法不够科学。

上述这两种认识都有一定道理，但都过于偏激。实际上面向工程的分析的确不需要那么复杂而失去了可操作性，但是完全靠经验也可能增大结果不令人满意的概率。本书试图搭建起“学院派”和“经验派”之间的桥梁，面向工程需要实实在在地简化工程分析方法，使之便于工程师们使用，同时也确保得到的尽管不是“全局最优”、但却是令人满意的工程实践结果。

本书共分 6 章，包括绪论、精英优化法、控制的鲁棒性评估、非充分信息估计、不确定性分析、比较分析和元素取舍分析 6 章，除了论述作者在长期工程实践中提炼出的工程分析方法之外，还给出大量应用实例。

杜京义教授仔细审阅了本书内容，并给出中肯的修改建议；本书部分实例采用了作者指导的博士研究生杨文宇、徐精求、武晓朦、王树奇、王建新、王晓路以及硕士研究生卢伟、朱继平、赵磐、韩哲、张星星的研究成果，这些研究生还认真检查和完善了书稿部分内容，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，书中不妥之处敬请读者批评指正。

作者

2017 年 8 月于西安

术 语 表

术　语	所在章节	术　语	所在章节
工程处理的充分性	1.2	目标优化控制鲁棒性评估	3.1
工程处理的收敛性	1.2	参数的可测性	4.1
不收敛	1.2	本征明晰参数	4.1
不充分收敛程度	1.2	本征不确定参数	4.1
小差距原则	1.3	本征可测性	4.1
满意差距度	1.3	完全可量测系统	4.1
小概率原则	1.3	非完全可量测系统	4.1
满意风险度	1.3	测试明晰参数	4.1
p%精英解	2.1	测试不确定参数	4.1
精英解的满意度	2.1	测试可测性	4.1
精英解的可信度	2.1	完备测试方案	4.1
最小抽样数目	2.1	非完备测试方案	4.1
P 里挑 1 的满意解	2.1	测试方案的优越性	4.1
抽样的均匀性	2.1	最小生成树	4.2
可行解的比例	2.1	模式可确定对象	4.4
约束条件的强度	2.1	模式可确定系统	4.4
约束条件的松弛收益	2.1	最小完备观测信息	4.4
约束条件的灵敏度	2.1	模式不可确定系统	4.4
解空间的离散化	2.1	抽样盲数	5.3
筛选网格	2.1	区间均值	5.3
多目标精英解的遴选	2.3	抽样盲数的阶数	5.3
性能排序遴选法	2.3	抽样盲数的谱图	5.3
优越解集合	2.3	抽样盲数的降阶计算	5.3
投票排序法	2.3	抽样盲数的置信区间	5.3
控制的鲁棒性	3.1	F 检验	6.1
全局空间	3.1	t 检验	6.1
鲁棒空间	3.1	等效方法	6.1
控制变量的可达范围	3.1	等价方法	6.1
控制变量的工程可控性	3.1	简化的对比分析	6.1
鲁棒性判定	3.1	$N+Y-X$ 原则	6.5

目　　录

第1章　绪　论

1.1　让分析方法为工程师服务

现实当中工程师们往往无奈地发现：书本上的理论知识有时并不能有效地解决工程问题。比如，在优化控制问题中，大费周章地得到了“全局最优解”，但有时在应用中却发现其性能与理论值偏差很大甚至非常差；在参数测量问题中，开展了大量的测试工作，但有时会遇到所能获得的独立方程个数小于拟求解的未知数的个数，使得这些测试数据似乎没有利用价值；在预测问题中，费尽心机建立了将能想到的影响因素都考虑在内的看似完美的预测模型，但是预测结果却与实际情况偏离非常远，预测效果甚至不如考虑因素少的简单模型。

许多优化问题属于 NP－hard（非确定多项式难）问题，求解“全局最优解”不仅非常困难，而且往往很难找到普遍适用的方法。许多工科专家投入极大的热情和精力去探究针对某个具体问题的“全局最优解”的求解方法，逐渐偏离和淡化了问题的现实意义，而成了纯粹的数学方法研究，甚至沦为“数学游戏”。实际上，由于工程中的场景（条件变量）存在一定的不确定性，而且执行机构可以保证的控制精度也存在一定偏差，追求“全局最优”的努力并没有多大实用价值，何况在许多情形下所谓“全局最优解”并不比“局部最优解”显著优越，并且有的“全局最优解”当条件变量或控制存在少许偏差时，其性能会出现显著劣化，造成前面所述的“全局最优解”性能与理论值偏差很大甚至非常差的现象。

对于参数测量问题，现实当中所建立的独立方程数多于或少于拟求解的未知参数个数的情况普遍存在，虽然理论上独立方程数少于拟求解的未知参数个数的“欠定方程”的解不唯一，甚至有无穷多组解，但是对于一部分参数而言，其解却有可能是唯一确定的。而对于其他参数，虽然其解不唯一确定，但是可以设法估计出它们的取值范围。对于工程应用而言，如果估计出的参数的可能取值范围在不影响使用的一定区间以内，往往可以认为已经达到了对该参数进行估计的目的，即使对于可能取值范围较大的参数，也可设法估计出其在取值区间的概率分布，从而为应用提供有价值的参考。

对于预测问题，并非建立的预测模型越复杂、其中考虑的因素越多越好，因为每个因素都是一个输入变量，不仅需要输入该因素的历史数据，往往还需要输入其未来的预期数据。而凡涉及对未来的预期，数据中必然存在不确定性，如果预测模型的非线性较强，则某个考虑因素中的少许偏差就可能会破坏预测对象的预测结果。并且许多考虑因素之间存在相关性，有时用其中一个就可以了，而都把它们作为输入变量，反而有可能淡化了其他输入变量的作用，从而破坏预测器的适应性。例如，对于电力负荷预测问题，在社会技术经济发展平稳的年代，仅仅将电力负荷视为时间的函数，用基于时间序列的预测方法往往

就能收到相当不错的效果。

工程师们在工程实践中遇到的与上述类似的困扰不胜枚举，以至于他们干脆放弃了分析而完全依靠经验去解决实际问题，而包括建模、辨识、优化等在内的面向工学的分析方法成了只有学者和科学家群体才感兴趣的领域，但他们又往往不直接解决工程实际问题。闭门造车的研究模式逐渐将学问越做越复杂、越做越理想、越做越脱离实际需要，以至于工程师们越来越难以利用这些学术成果，形成了各个行业“学院派”和“经验派”的越来越显著的对峙局面。“经验派”的工程师们嘲讽“学院派”是将简单的问题复杂化，“学院派”的学者们指责“经验派”的做法不够科学。

上述这两种认识都具有一定的道理，但都过于偏激。实际上，面向工程的分析的确不需要那么复杂以致于失去了可操作性，但是完全靠经验也可能增大结果不令人满意的概率。本书试图搭建起“学院派”和“经验派”之间的桥梁，面向工程需要实实在在地简化工程分析方法，使之便于工程师们使用，同时也确保得到的尽管不是“全局最优”、但却是令人满意的工程实践结果。

1.2　工程处理过程的充分性和收敛性

在工程分析中经常遇到对某种处理过程的充分性评估问题。

1.2.1　处理的充分性

处理的充分性是指：对于一种工程处理过程，在进行了 N 次处理后得到的性能与进行了 $M(N \gg M)$ 次处理后得到的性能大致相同（差别在一个事先确定的很小的范围内），则认为 M 次处理是充分的，否则认为 M 次处理是不够充分的。

下面给出几种典型工程处理的充分性判断问题。

【例 1】　迭代的充分性。

例如，对于参数辨识问题，假设经过 k 次迭代后得出的一组 h 个参数的辨识结果为 $\boldsymbol{\theta}^{<k>}=[\theta_1^{<k>}, \theta_2^{<k>}, \cdots, \theta_h^{<k>}]^{\mathrm{T}}$，再进行了 k 次迭代，参数的辨识结果为 $\boldsymbol{\theta}^{<2k>}=[\theta_1^{<2k>}, \theta_2^{<2k>}, \cdots, \theta_h^{<2k>}]^{\mathrm{T}}$，若 $\|\boldsymbol{\theta}^{<2k>}-\boldsymbol{\theta}^{<k>}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{h}(\theta_i^{<2k>}-\theta_i^{<k>})^2}<\varepsilon$（$\varepsilon$ 为事先确定的正数），则认为在对这组参数进行的辨识处理过程中，k 次迭代是充分的。

【例 2】　抽样的充分性。

例如，对于统计分析问题，假设经过 m 次抽样后得出的一组 n 个统计分析指标为 $\boldsymbol{\sigma}^{<m>}=[\sigma_1^{<m>}, \sigma_2^{<m>}, \cdots, \sigma_n^{<m>}]$，又进行了 m 次抽样后，得出统计分析指标为 $\boldsymbol{\sigma}^{<2m>}=[\sigma_1^{<2m>}, \sigma_2^{<2m>}, \cdots, \sigma_h^{<2m>}]$，若 $\|\boldsymbol{\sigma}^{<2m>}-\boldsymbol{\sigma}^{<m>}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\sigma_i^{<2m>}-\sigma_i^{<m>})^2}<\varepsilon$（$\varepsilon$ 为事先确定的正数），则认为在统计分析中，m 次抽样是充分的。

1.2.2　处理的收敛性

处理的收敛性是指：如果能够经过有限的 N 次处理后满足充分性的要求，则称该工

程处理过程是充分收敛的，否则称该工程处理过程是不充分收敛的。

能够满足充分性要求的最少处理次数称为最小充分处理次数。

如果能够找到一个正数 E，使得经过有限的 N 次处理后得到的性能与继续增加处理次数后得到的性能的差异的能量均方值不大于 E，则称该工程处理过程是**有限收敛**的，否则称该工程处理过程是**不收敛**的。称 $\alpha=E/\varepsilon$ 为该工程处理过程的**不充分收敛程度**。显然，对于不收敛的工程处理过程，其不充分程度为无穷大。

1.3 工程优化方法的满意性分析

1.3.1 小差距原则和小概率原则

设一种公认的具有良好性能的比较严格的优化方法为 F_1，为了解决同样的问题，但是采取了简化处理的近似的优化方法为 F_2。若 F_2 与 F_1 相比，同时满足小差距原则和小概率原则，则称 F_2 为 F_1 的一种满意的工程优化方法。

1. 小差距原则

在各种合理的场景下（设考察场景共有 N 个），对于同样的目标函数 f_1、f_2、…、f_m（设目标函数越大越优越），采用比较严格的优化方法 F_1 和经简化处理的近似优化方法 F_2 分别进行优化，对于第 j 个场景得到的优化结果分别为 $f_{1,j}^{<1>}$、$f_{2,j}^{<1>}$、…、$f_{m,j}^{<1>}$ 和 $f_{1,j}^{<2>}$、$f_{2,j}^{<2>}$、…、$f_{m,j}^{<2>}$。若有

$$\frac{1}{Nm}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}\left(1-f_{i,j}^{<2>}/f_{i,j}^{<1>}\right)<\varepsilon_f \tag{1.1}$$

则认为 F_2 与 F_1 相比，满足小差距原则。

式（1.1）中，正数 ε_f 为认为满意的小差距阈值，称为**满意差距度**。

2. 小概率原则

在各种合理的场景下（设考察场景共有 n 个），对于同样的目标函数 f_1、f_2、…、f_m（设目标函数越大越优越），采用公认的具有良好性能的比较严格的优化方法 F_1 和经简化处理的近似优化方法 F_2 分别进行优化，对于第 j 个场景得到的优化结果分别为 $f_{1,j}^{<1>}$、$f_{2,j}^{<1>}$、…、$f_{m,j}^{<1>}$ 和 $f_{1,j}^{<2>}$、$f_{2,j}^{<2>}$、…、$f_{m,j}^{<2>}$，设公认的具有良好性能的比较严格的优化结果优于近似优化方法的概率为 $p(1\therefore 2)$，若有

$$p(1\therefore 2)<\varepsilon_p \tag{1.2}$$

则认为 F_2 与 F_1 相比，满足小概率原则。

式（1.2）中，正数 ε_p 为认为满意的小概率阈值，称为**满意风险度**。

1.3.2 工程优化方法优质性的数值检验

1. 基本原理

采用蒙特卡罗模拟，在合理的范围内，随机设置场景参数，构成一组样本。分别采用比较严格的优化方法 F_1 和经简化处理的近似优化方法 F_2 对样本中的各个个体（每个个体

对应一个场景）进行优化，并对所得到的优化结果进行统计分析，判断小差距原则和小概率原则是否满足。

2. 小差距原则的检验

设考察场景共有 N 个（即 N 个样本），对于同样的目标函数 f_1、f_2、…、f_m（设目标函数越大越优越），定义

$$\mu_{f,j}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(1-f_{i,j}^{<2>}/f_{i,j}^{<1>}) \qquad (j=1,2,\cdots,N) \tag{1.3}$$

假设 $\overline{\mu}_f$ 为 $\mu_{f,j}$ 的均值，其蒙特卡罗估计为

$$\hat{\overline{\mu}}_f=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mu_{f,i} \tag{1.4}$$

根据概率论中的中心极限定理可知，蒙特卡罗估计 $\hat{\overline{\mu}}$ 与真值 $\overline{\mu}_f$ 之间的随机模拟误差为

$$|\hat{\overline{\mu}}_f-\overline{\mu}_f|<\frac{c_\alpha\sigma}{\sqrt{N}} \tag{1.5}$$

式中：σ 为 $\overline{\mu}_f$ 的标准差；c_α 为一个与置信水平 $1-\alpha$ 有关的数。

在置信水平 0.5、0.95 和 0.997 下，c_α 分别为 0.6745、1.96 和 3，也即，在置信水平 0.997 下，有

$$\overline{\mu}_f<\hat{\overline{\mu}}_f+\frac{3\hat{\sigma}}{\sqrt{N}} \tag{1.6}$$

$$\hat{\sigma}=\frac{1}{N-1}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(\mu_{f,i}-\overline{\mu}_f)^2} \tag{1.7}$$

式中：$\hat{\sigma}$ 为 σ 的估计。

若

$$\hat{\overline{\mu}}_f+\frac{3\hat{\sigma}}{\sqrt{N}}\leqslant\varepsilon_f \tag{1.8}$$

则认为近似优化方法 F_2 以满意差距度 ε_f 满足小差距原则。

3. 小概率原则的检验

根据伯努利大数定律[1]，有

$$\lim_{N\to\infty}P\left\{\left|\frac{v_N}{N}-p(1\therefore 2)\right|\geqslant\varepsilon_p\right\}=0 \tag{1.9}$$

式中：v_N 为 N 次随机模拟中比较严格的优化方法 F_1 的优化结果优于近似优化方法 F_2 的次数。

因此，可以用 v_N/N 来逼近 F_1 优于 F_2 的概率 $p(1\therefore 2)$。

设 $y=v_N/N$，$A=p(1\therefore 2)$，令 y 与 N 的关系近似表示为

$$y=\frac{B}{N}+A+\varepsilon \tag{1.10}$$

式中：ε 为随机误差，服从正态分布 $N(0,\ \sigma_\varepsilon^2)$；$B$ 为待定常数。

令 $x=1/N$，则 y 与 x 的关系可以近似表示为

$$y=Bx+A+\varepsilon \tag{1.11}$$

式（1.11）为一个典型的一元线性回归问题，根据 K 组不同的 N（即 x）对应的 y

（即 v_N/N），可以采用最小二乘法估计出 A、B 和 σ_ε^2。

$$\hat{B}=\frac{\sum_{i=1}^{K}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{K}(x_i-\overline{x})^2} \tag{1.12}$$

$$\hat{p}(1\therefore 2)=\hat{A}=\overline{y}-\hat{B}\overline{x} \tag{1.13}$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2=\frac{\sum_{i=1}^{K}(y_i-\overline{y})^2-\hat{B}\sum_{i=1}^{K}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{K-2} \tag{1.14}$$

其中

$$\overline{x}=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}x_i=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\frac{1}{N_i} \tag{1.15}$$

$$\overline{y}=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}y_i=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\frac{v_{N,i}}{N_i} \tag{1.16}$$

文献［1］指出，$\hat{A}$ 服从正态分布，即

$$\hat{A}\sim N\left[A,\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2\sum_{i=1}^{K}x_i^2}{K\sum_{i=1}^{K}(x_i-\overline{x})^2}\right] \tag{1.17}$$

在个体数 K 比较少时，$\hat{A}$ 服从 t 分布。因此，在置信度 $1-\alpha$ 下，$A=p(1\therefore 2)$ 的置信区间为

$$\left[\hat{A}\pm t_{\alpha/2}(K-2)\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon\sqrt{\sum_{i=1}^{K}x_i^2}}{\sqrt{K\sum_{i=1}^{K}(x_i-\overline{x})^2}}\right]$$

若

$$\left[\hat{A}+t_{\alpha/2}(K-2)\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon\sqrt{\sum_{i=1}^{K}x_i^2}}{\sqrt{K\sum_{i=1}^{K}(x_i-\overline{x})^2}}\right]<\varepsilon_p \tag{1.18}$$

则认为近似优化方法 F_2 以满意风险度 ε_p 满足小概率原则。

1.3.3 数值检验的步骤

（1）设置一个具有普遍意义的检验环境。

（2）蒙特卡罗模拟。随机生成 N 个个体构成一组样本，对于每一个个体，分别采用严格优化方法 F_1 和简化优化方法 F_2 分别进行优化。

（3）根据得到的优化结果进行小差距原则检验。

（4）根据得到的优化结果进行小概率原则检验。

第2章 精英优化法

在解决工程技术问题时，经常遇到旨在改善性能的优化问题，一般包括两类：一类是为了提高某些性能指标的优化控制问题；另一类是为了更加合理地配置资源的优化规划问题。许多学者将太多的精力投入到获取“全局最优解”的努力中，而实际上由于优化模型与实际系统之间存在近似性以及许多参数存在不确定性，追求“全局最优”的努力并没有多大实用价值，何况在许多情形下所谓“全局最优解”并不比“局部最优解”显著优越。在工程实践中，往往只需得到具有较好性能的“精英解”就足以产生显著的效果和效益。

许多学者还投入很多精力去努力减少优化方法的计算量，而随着计算机处理速度的飞速提升，尤其是分布式计算技术的迅速发展，优化过程中计算量的影响越来越小，尤其是在不刻意追求“全局最优解”而改为获得“精英解”的务实理念下，计算量更是可以大幅度减少。

本章论述旨在获得精英解的工程随机优化方法是解决所有旨在改善性能的工程优化问题的一种通用方法，它可以使研究人员从过去努力追求获取“全局最优解”的繁重且艰苦的工作中解放出来，从而将更多的精力用于建立更加符合实际需要的优化模型上。

2.1 基本原理

本节论述旨在获得精英解的工程随机优化方法的基本原理，着重论述抽样次数与解的满意度的关系以及在多目标优化问题中的处理方法。

考虑下列单目标优化问题（Π）

$$\max_{x} f(x), s.t.\ x \in S$$

其中，$f(x)$ 为目标函数，在本章中，为了方便起见，总是认为目标函数越大越好；x 为多维决策变量；S 为可行域或者为约束域。

上述优化问题具有普遍性。事实上，对于目标函数 $f(x)$ 越小越好的优化问题，用 $-f(x)$ 或 $1/f(x)$ 代替 $f(x)$ 就可以转化成为目标函数越大越好的问题；当系统中有动态演化规律时，如差分方程，可以将其以约束的形式放在可行域 S 中。因此，控制理论中的最优控制问题、具有时空约束的分布式参数系统的优化都可以用上面的优化模型来表示。

对于优化问题（Π），对性能 $f(x)$ 有影响的所有因素统称为决策变量。决策变量一般分为控制变量和条件变量：控制变量是通过优化可以改变取值的变量（即优化的对象）；而条件变量是客观存在的，但其取值不能被主观改变。在工程实际当中，控制变量和条件

变量往往都存在一定的波动范围，前者一般是由控制器的控制精确程度造成的，后者一般是由其在考察期间内的变化及其不确定性引起的。

2.1.1 $p\%$精英抽样

2.1.1.1 解的个数无穷多时的 $p\%$精英解

对于优化问题（Π），按具有某种分布的随机数产生方法在其解空间进行适当抽样，即可获得一组候选解 $\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$，对于每个候选解 x_i，按性能 $f(x_i)$ 从好到坏（从大到小）进行排序，假设认为处于前 $p\%$的解都是满意解，则称这样获得的解为 $p\%$精英解，称 $1-p\%$为**精英解的满意度**。显然，$p\%$越小，满意度越高。

在解的个数无穷多时，每随机生成一个候选解，它不是处于前 $p\%$的解的概率为 $1-p\%$，则连续随机生成 N 个候选解，它们都不是处于前 $p\%$的解的概率为 $(1-p\%)^N$。

假设要求在连续随机生成的 N 个候选解都不是处于前 $p\%$的概率不大于 $q\%$，则有

$$(1-p\%)^N \leqslant q\% \tag{2.1}$$

称 $1-q\%$为 $p\%$**精英解的可信度**。

为了达到上述目的，根据式（2.1），所需要的**最少抽样数目** $N_{\min}$为

$$N_{\min}=\text{int}\left[\frac{\lg(q\%)}{\lg(1-p\%)}+1\right] \tag{2.2}$$

式中：$\text{int}[y]$ 为取 y 的整数部分。

式（2.2）还表明，只要随机生成的候选解数目不少于 $N_{\min}$，则就有 $1-q\%$的可能性在这 $N_{\min}$个候选解中，至少有一个是处于前 $p\%$的满意解。

满足式（2.2）要求的抽样称为 $p\%$精英抽样。

例如，若 $p\%=1\%$，则所得到的优化结果就是 1%精英满意解，相应的随机抽样过程为 1%精英抽样；若 $p\%=0.1\%$，则所得到的优化结果为 0.1%精英满意解，相应的随机抽样过程为 0.1%精英抽样。

若 $q\%=1\%$，则相应满意解的可信度为 99%；若 $q\%=0.1\%$，则相应满意解的可信度为 99.9%；若 $q\%=0.01\%$，则相应满意解的可信度为 99.99%。可见 $p\%$精英抽样可以对获得的策略的优秀程度进行直观评价。

$p\%$和 $q\%$是精英优化法涉及的两个重要参数，它们的不同取值需要的抽样次数不同。在解的个数无穷多时，表 2.1 为一些给定 $p\%$和 $q\%$时，依据式（2.2）计算出的最少抽样数 $N_{\min}$。

表 2.1　解空间很大时 $N_{\min}$与给定 $p\%$和 $q\%$的对应关系

$N_{\min}$	$q\%$	$p\%$	$N_{\min}$	$q\%$	$p\%$
459	1%	1%	9209	1%	0.05%
528	0.5%		10594	0.5%	
688	0.1%		13813	0.1%	
757	0.05%		15199	0.05%	
917	0.01%		18417	0.01%	

续表

N_{min}	$q\%$	$p\%$	N_{min}	$q\%$	$p\%$
919	1%		46050	1%	
1058	0.5%		52981	0.5%	
1379	0.1%	0.5%	69075	0.1%	0.01%
1517	0.05%		76006	0.05%	
1838	0.01%		92099	0.01%	
4603	1%		92102	1%	
5296	0.5%		105964	0.5%	
6905	0.1%	0.1%	138152	0.1%	0.005%
7598	0.05%		152015	0.05%	
9206	0.01%		184203	0.01%	

若从求 $p_1\%$精英满意解提高为求 $p_2\%$精英满意解（$p_1\%>p_2\%$），则在 $p_1\%$精英抽样完成的基础上需要补充的抽样样本数目 ΔN 为

$$\Delta N=\text{int}\left[\frac{\lg(q\%)}{\lg(1-p_2\%)}-\frac{\lg(q\%)}{\lg(1-p_1\%)}+1\right] \tag{2.3}$$

若对 $p\%$精英满意解的可信度从 $1-q_1\%$提升到 $1-q_2\%$（$q_2\%<q_1\%$），则在 $p\%$精英抽样完成的基础上需要补充的抽样样本数目 ΔN 为

$$\Delta N=\text{int}\left[\frac{\lg(q_2\%)-\lg(q_1\%)}{\lg(1-p\%)}+1\right] \tag{2.4}$$

2.1.1.2 有限个数解时 $p\%$精英解

假设解空间中的个体的总数量为 M，对所有解按照性能好坏进行排序，认为处于前 n 个的解都是精英解，则连续随机生成 N 个解，都不是处于前 n 个解的概率为 $\left(1-\frac{n}{M}\right)\left(1-\frac{n}{M-1}\right)\cdots\left[1-\frac{n}{M-(N-1)}\right]$。

假设要求连续随机生成的 N 个候选解都不是处于前 n 个的解的概率不大于 $q\%$，则有

$$\left(1-\frac{n}{M}\right)\left(1-\frac{n}{M-1}\right)\cdots\left[1-\frac{n}{M-(N-1)}\right]\leqslant q\% \tag{2.5}$$

对式（2.5）采用迭代计算的方法可以求得所需要的最少抽样数目 N'_{min}，也即，只要随机生成的候选解数目不少于 N'_{min}，则就有 $1-q\%$的可能性在这 N'_{min}个候选解中，至少有一个是处于前 n 个的满意解。相当于（n/M）%精英的满意解和（n/M）%精英抽样的效果。

迭代获得 N'_{min}的具体步骤为：

（1）初始化，给定 M 及 n，令 $N=1$，$t=1$。

（2）计算 $t=t\left(1-\frac{n}{M+1-N}\right)$。

（3）判断 $t\leqslant q\%$是否成立，若成立则进行第（4）步；否则 $N=N+1$，返回第（2）步。

(4) $N'_{\min}=N$。

一般情况下，$N'_{\min}<N_{\min}$；M越大，$N'_{\min}$越接近$N_{\min}$；当M大于某一值M'时，$N'_{\min}=N_{\min}$。一旦$p\%$和$q\%$确定后，M'同样能够通过迭代计算得到，当$N'_{\min}=N_{\min}$时，M'与一些$p\%$和$q\%$的对应关系见表2.2。

表2.2　$N'_{\min}=N_{\min}$，时M'与一些$p\%$和$q\%$的对应关系

$N'_{\min}$	$q\%$	$p\%$	M'
459	1%	1%	499796
919	1%	0.5%	579014
4603	1%	0.1%	12218000
9209	1%	0.05%	112780800
46050	1%	0.01%	2655830000
92102	1%	0.005%	41945740000

上述$p\%$精英抽样方法中对各个候选解的分析和评价的过程可以采用并行算法以提高其效率，对于一般工程问题，若不需要得到严格的最优解，则单纯借助上述方法就能够得到满意解。

2.1.1.3　P里挑1抽样及与$p\%$精英抽样的关系

在解空间中，随机进行P次抽样，从中选出性能最好的那个，称为**P里挑1的满意解**，相应的抽样称为**P里挑1抽样**。

结合2.1.1.1与2.1.1.2所论述的内容，可以得出P里挑1抽样与解的个数无穷多时抽样或有限个数解时抽样的对应关系，即令$N_{\min}=P$，并据此可以得到解的个数无穷多时抽样的$p\%$和$q\%$或有限个数解时的抽样方案，反映出P里挑1抽样相当于为获得前$p\%$精英解所进行的可信度为$1-q\%$的精英抽样。

例如，由式(2.2)计算可以得知，如进行100里挑1抽样，相当于进行可信度为99%的4.51%精英抽样；进行1000里挑1抽样，相当于进行可信度为99.9%的0.6884%精英抽样；进行10000里挑1抽样，相当于进行可信度为99.99%的0.09207%精英抽样。

例如，进行可信度为99%的1%精英抽样相当于进行了459里挑1抽样；进行可信度为99.9%的0.1%精英抽样相当于进行了6905里挑1抽样；进行可信度为99.99%的0.01%精英抽样相当于进行了92099里挑1抽样。

2.1.2　抽样的均匀性

为了使随机抽样所得样本在解空间内均匀分布，$p\%$精英抽样需要在均匀抽样的前提下进行，同一优化问题的解空间构成方法不同，其解空间中个体的分布就可能不同，对非均匀分布的个体抽样会导致优化结果的可靠性有所下降，因此在抽样前需要判断解空间中的个体是否满足均匀分布。

2.1.2.1　解的个数无穷多时个体的均匀性

对于变化范围连续的控制变量x_1，x_2，…，x_i，假设其变化范围分别为ΔC_{d1}，ΔC_{d2}，…，ΔC_{di}，若随机抽样得到的个体落入解空间中任一由各维控制变量子区间