线性代数与解析几何学习及上机指导

何章鸣　王炯琦　周海银　刘春林　编著

科学出版社

线性代数与解析几何学习及上机指导

何章鸣　王炯琦　周海银　刘春林　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是与冯良贵编著的《线性代数与解析几何》(科学出版社，2008)相配套的辅导教材，讲述了各章节的学习目标与要求、内容梗概、疑难解析、 典型例题和上机解题. 学习目标与要求环节，划分了了解、理解和掌握三个层次的知识点. 内容梗概环节，整理了定义、性质、定理和推论. 疑难解析环节，分析了知识难点、混淆点和补充点. 典型例题环节，用精练的例题串联了不同章节间的内容和答题技巧. 上机解题环节，用简洁的数学语言解答了课后习题，并用 MATLAB 软件验证了答案的正确性. MATLAB 上机解题是本书的特色.

本书可作为理工科本科生的线性代数与解析几何的学习辅导书、考研辅导书、MATLAB 实践指导书和数学建模实用手册，也可作为教师的教学辅导书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与解析几何学习及上机指导/何章鸣等编著. —北京：科学出版社，2017.11

ISBN 978-7-03-054532-9

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①何… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教学参考资料 ②解析几何-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O151.2 ②O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 228945 号

责任编辑：王 静 / 责任校对：张凤琴
责任印制：吴兆东 / 封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 11 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2018 年 1 月第二次印刷 印张: 14 1/2
字数: 292 000

定价: 39.00 元

前　　言

初学、自学，能否并驾齐驱?

线性代数、解析几何、MATLAB 数学实验，能否一箭三雕?

本书或许不能完全解决上述两个问题，但作者正为解决上述问题而努力. 本书中，解析几何和 MATLAB 相关内容用 * 标识. 作者编写本书的初衷是降低初学者学习中的困难感，缓解自学者学习中的困惑感，增强线性代数与解析几何自身的实用感，提高读者解决问题的能力.

作者深信，把计算机带入课堂是非常必要的. 让计算机完成繁杂的机械运算，把学生从计算中解放出来，从而让他们把更多的精力投放在计算机不擅长的归纳推理和算法设计上.

作者深信，一本精心细致编写的、低错误率的、带有手算推理和机算验证双重答案的教材辅导书非常必要. 书中低级错误可能会给读者带来巨大的干扰，为此作者多次校稿，并且提供了本书的反馈邮箱：hzmnudt@sina.com，任何疑问定会得到快速回复. 如果您经济困难，请联系该邮箱，作者将酌情赠书. 本书的所有 MATLAB(2015b) 代码可以在百度云盘免费下载：http://pan.baidu.com/s/1jIvFeMM.

本书由何章鸣执笔统稿.

感谢屈龙江教授对本书的批评指正. 感谢国防科技大学理学院教学科研办公室张凤扬主任、冯良贵教授、戴清平副教授、李超教授和谢端强教授对出版本书的首肯、鼓励和帮助. 感谢国防科技大学数学与系统科学系的各位老师，本书某些章节可能借鉴了你们的教学方法和解题思路. 感谢周萱影、侯博文、孙博文、徐淑卿、张琨、魏居辉、李鑫、任韬的校稿工作. 特别感谢科学出版社王静老师在出版全程对作者的支持，她工作细致认真，为人友善体贴. 特别感谢吕同富教授，他无私地共享了美观的 Latex 模板.

何章鸣

2017 年 3 月于国防科技大学

目　　录

第 1 章 行 列 式

学习目标与要求

1. 了解二 (三) 阶行列式的定义、对角线法则及其在求解二 (三) 元一次方程中的应用.

2. 理解逆序和逆序数的定义. 掌握行列式的定义.

3. 掌握行列式的性质、推论、降阶公式. 熟练掌握其中的三个基本性质. 理解 Laplace 定理在求解分块行列式中的应用.

4. 掌握不定阶数行列式的求解方法, 包括拆分法、累加法、三角化法、加边法、递归法和归纳法. 理解 Vandermonde 行列式的表达式.

5. 理解 Cramer 法则和齐次线性方程组有非零解的充要条件.

1.1 内容梗概

1.1.1 二 (三) 阶行列式

可以用**对角线法则**来定义**二 (三) 阶行列式**, 即主对角线上元素的乘积取正号, 副对角线上元素的乘积取负号, 如下

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} D=&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ =&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

可以用二 (三) 阶行列式简洁地表示二 (三) 元一次方程的解, 即

$$x_i=\frac{D_i}{D}, \quad i=1,2 \quad (i=1,2,3), \tag{1.3}$$

其中 D_i 表示把 D 的第 i 列换成常数列得到的二 (三) 阶行列式.

备注 求解二 (三) 元一次方程可以分解成三个步骤.

步骤一: 计算 D, 若 $D\neq 0$, 则方程有唯一解, 否则对角线法则不能用于解方程.

步骤二: 计算 $D_i\ (i=1,2$ 或者 $i=1,2,3)$.

步骤三: 计算 $x_i=\dfrac{D_i}{D}\ (i=1,2$ 或者 $i=1,2,3)$.

1.1.2 n 阶行列式的定义

自然数 $1,2,\cdots,n$ 按一定次序排成一列, 称为一个 n 元**排列**, 记为 $i_1i_2\cdots i_n$. 称 $12\cdots n$ 为**自然排列**. 总共有 $n!$ 个 n 元排列. 在一个 n 元排列中, 若一个小的数排在一个大的数的后面, 则称这两个数构成了一个**逆序**. 一个排列的逆序个数的总和称为这个排列的**逆序数**, 记为 $\tau[i_1i_2\cdots i_n]$. 若排列的逆序数是奇 (偶) 数, 则称该排列为**奇 (偶) 排列**. 互换排列中某两个数的位置, 其余的数不动, 则得到一个新排列, 这个过程称为一个**对换**. 而相邻两个数的对换称为**邻换**. 显然, 邻换是对换的特例.

定理 1.1 一次对换改变排列的奇偶性.

推论 1.1 如果一个 n 元排列经过一定次数的对换变为自然排列, 那么所作对换的次数与该排列有相同的奇偶性.

推论 1.2 全体 $n(n\geqslant 2)$ 元排列的集合中, 奇排列和偶排列各占一半.

备注 定理 1.1 将用于证明行列式的转置公式和降阶公式, 即性质 1.1 和性质 1.6.

定义 1.1 n 阶行列式

把 n^2 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列, 按照下式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau[i_1i_2\cdots i_n]}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} \tag{1.4}$$

计算所得的结果, 称为 n **阶行列式**, 记为 $\det[a_{ij}]$, 其中 $\sum\limits_{i_1i_2\cdots i_n}$ 表示对所有 n 元排列求和.

行列式也可以等价定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau[j_1j_2\cdots j_n]}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}. \tag{1.5}$$

备注 (1) 行列式的定义有三个要素:

(i) n 阶行列式有 $n!$ 个单项.

(ii) 行列式每个单项的元素来自不同行不同列.

(iii) 行列式每个单项的符号由列标逆序数的奇偶性决定.

(2) 若某个行列式大部分元素为 0, 则只写出非零元素, 而零元素用空格代替, 如 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ 可以用 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ & 2 \end{vmatrix}$ 和 $\begin{vmatrix} 1 & \\ & 2 \end{vmatrix}$ 来表示.

1.1.3 行列式的性质

由行列式定义公式及其等价定义公式可知下列性质成立.

性质 1.1 行列式与其转置行列式相等, 即 $D^{\mathrm{T}} = D$.

性质 1.2 若行列式 D 互换两行 (列) 得到 D_1, 则 $D_1 = -D$.

推论 1.3 若行列式 D 某两行 (列) 相同, 则 $D = 0$.

性质 1.3 若用数 k 乘以 D 的某行 (列) 的每个元素得到 D_1, 则 $D_1 = kD$.

推论 1.4 若 D 某一行 (列) 的元素全部为 0, 则 $D = 0$.

推论 1.5 若 D 某两行 (列) 的元素对应成比例, 则 $D = 0$.

性质 1.4 若 D 某一行 (列) 的每个元素都可以表示为两个数的和, 则 D 可以表示为两个行列式的和.

性质 1.5 若 D 的某行 (列) 的倍数加到另一行得到 D_1, 则 $D_1 = D$.

备注 如表 1.1 所示, 性质 1.2、性质 1.3 和性质 1.5 是行列式计算最基本的性质. 这三个基本性质与第 2 章的三种初等矩阵、三种初等行变换、三种分块矩阵的初等行变换和三种方程组的初等变换一一对应. MATLAB 软件正是利用这三个基本性质实现行列式的计算.

表 1.1 行列式的三个基本性质

	性质 1.2	性质 1.3	性质 1.5
简称	对换	数乘	倍加
值	$D_1 = -D$	$D_1 = kD$	$D_1 = D$
行记号	$r_i \leftrightarrow r_j$	kr_i	$r_i + kr_j$
列记号	$c_i \leftrightarrow c_j$	kc_i	$c_i + kc_j$

定义 1.2 k 阶子式、余子式、代数余子式.

在 n 阶行列式 D 中任取 $k(i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$ 行与 $k(j_1 < j_2 < \cdots < j_k)$ 列, 将这些行和列交叉处的元素按原来相对位置构成的 k 阶行列式

$$N = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix},$$

称为 D 的一个 k **阶子式**. 划去这些行和列后所剩下的元素依原来次序构成的 $n-k$ 阶行列式, 称为 D 的**余子式**, 记为 M. 称 $A=(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}M$ 为 N 的**代数余子式**.

特别地, 当 $k=1$ 时, 即 $N=a_{ij}$, 记 a_{ij} 的余子式为 M_{ij}, 记 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

性质 1.6　行列式 D 等于它的任一行 (列) 的元素与其代数余子式的乘积的和, 即

$$\det[a_{ij}]=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\cdots+a_{kn}A_{kn}\quad(k=1,2,\cdots,n),\quad(1.6)$$

$$\det[a_{ij}]=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n).\quad(1.7)$$

推论 1.6　行列式 D 的某一行 (列) 的元素与另一行 (列) 对应元素的代数余子式的乘积之和为 0, 即

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0\quad(i\neq k).\quad(1.8)$$

备注　上述几个公式也称为**降阶公式**, 利用这几个公式可以推导 Cramer 法则 (定理 1.3) 和伴随矩阵基本公式 (定理 2.2).

定理 1.2 (Laplace 定理)　在 n 阶行列式 D 中, 任取 k 行 (列), 由这 k 行 (列) 所组成的一切 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积的和等于行列式 D.

备注　(1) 显然任意 k 行有 C_n^k 个代数余子式. 若 N_i 表示第 i 个 k 阶子式, A_i 表示 N_i 的代数余子式, 则 Laplace 定理可以简记为

$$D=N_1A_1+N_2A_2+\cdots+N_{\mathrm{C}_n^k}A_{\mathrm{C}_n^k}.\quad(1.9)$$

(2) 定理 1.2 将用于证明 n 阶行列式的乘积公式 (即公式 (1.11)).

1.1.4　行列式的计算

若行列式的阶 n 是确切的数字, 一般可用三种基本性质 (对换、数乘和倍加) 把行列式计算出来. 若行列式的阶 n 是抽象的符号, 则可能用到特殊的方法, 如拆分法、累加法、加边法、递归法和归纳法等. 计算中, 往往要结合行列式的三个基本性质、降阶公式、范德蒙德 (Vandermonde) 行列式和 Laplace 定理.

范德蒙德行列式为

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} (x_i - x_j). \tag{1.10}$$

两个 n 阶行列式的乘积公式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1.11}$$

其中 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

备注 (1) 范德蒙德行列式在证明中运用了大量技巧, 包括归纳法、倍加性质、降阶公式和数乘公式.

(2) n 阶行列式的乘积公式在证明中应用了行列式的倍加性质和 Laplace 定理.

1.1.5 Cramer 法则

设有 n 个未知量的**线性方程组**为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.12}$$

若 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, 则称它为**齐次线性方程组**, 否则称它为**非齐次线性方程组**. 系数行列式记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.13}$$

定理 1.3 若线性方程组 (1.12) 的系数行列式 $D \neq 0$, 则它存在唯一解, 且

$$x_j = \frac{D_j}{D}, \quad j = 1, 2, \cdots, n, \tag{1.14}$$

其中 D_j 是把 D 的第 j 列换成常数列所得到的行列式, 即 $D_j = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k A_{kj}$.

定理 1.4 若齐次线性方程组 (1.12) 有非零解, 则系数行列式 $D = 0$.

备注 定理 1.4 将用于证明向量组的相关性定理, 即定理 3.4.

1.2　疑 难 解 析

*1.2.1　如何用 MATLAB 解题

MATLAB 是 Matrix 和 Laboratory 两个词的组合, 意为矩阵实验室, 是由美国 Mathworks 公司开发的用于科学计算、可视化以及交互式程序设计的高科技计算软件平台, 代表了当今国际科学计算软件的先进水平. 相对于另一数学软件 Mathematica 来说, MATLAB 的用户广泛得多. 实际上, 无论是谷歌搜索, 还是百度搜索, 与 MATLAB 和 Mathematica 相关的搜索结果比例约为 40:1. 此外, MATLAB 还具有如下特点:

(1) 语法要求较低,使用者容易入门. MATLAB 定义矩阵很灵活, 例如对于矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$, 可以用 A = [1,2;3,4] 表示, 其中分号或者回车表示换行, 逗号或者空格表示换列, 例如 A = [1 2;3 4]. 矩阵内部可以包含子矩阵, 例如 A = [[1,2]; [3,4]] 或者 A = [[1;3],[2;4]]. 实际上四种表示方法 A = [1,2;3,4], A = [1 2;3 4], A = [[1,2]; [3,4]] 和 A = [[1;3], [2;4]] 的结果完全相同.

(2) MATLAB 中一般用小写字母定义函数, 如计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式用命令 det(A).

(3) MATLAB 保留了一些简单实用的运算符, 例如对于方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$, 解方程的命令分别是: A\b 和 B/A.

(4)MATLAB还拥有非常强大的符号运算功能,带有大量工具箱和高效Simulink仿真环境.

(5) 只要安装好 MATLAB, 就可以非常方便地在命令行窗口、编辑器窗口、专用工具箱窗口、Simulink 窗口或者 GUI 窗口进行编程解题, 而且不同窗口之间可以自由切换.

1.2.2　行列式和矩阵有何联系

初学者容易混淆行列式 $\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}$ 和第 2 章的矩阵 $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$, 主要原因是两者的符号表达式几乎一样. 但是, 在 MATLAB 中矩阵 “A” 和行列式 “det(A)” 的形式完全不同, 很容易区分. 实际工程应用中, 行列式的定义、定理和性质并不多见, 正因如此, 有大量教材把行列式安排在矩阵和方程之后.

矩阵就是一个数据表格, 在矩阵众多属性中, 行列式是其中的一个属性, 后续章节还会介绍矩阵的其他属性, 如迹、秩和特征值等. MATLAB 总是先定义矩阵, 然后

计算行列式、迹、秩和特征值等. 例如, 先定义矩阵 A=[1,0;2,4], 然后分别用 det(A), trace(A), rankA, eig(A) 计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式、迹、秩和特征值.

1.2.3 对角线法则适用于四阶行列式吗

可以用对角线法则定义二 (三) 阶行列式, 按照归纳的思想, 读者容易陷入误区, 认为所有行列式都可以用对角线法则定义. 假如对角线法则对四阶行列式也成立, 那么四阶行列式应该有 8 个单项 (主对角线 4 个, 副对角线 4 个), 但是按照 n 阶行列式的定义, 四阶行列式的单项数为 $4! = 24 > 8$ 个, 故四阶行列式不可以用对角线法则定义.

其实, 对于如下四元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4, \end{cases} \tag{1.15}$$

消去 x_2, x_3, x_4, 解得

$$ax_1 = b, \tag{1.16}$$

其中 a, b 都有 24 个单项, 如下

$$\begin{aligned} a =& a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\ & - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} \\ & - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} \\ & + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} \\ & + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}, \\ b =& a_{12}a_{24}a_{33}b_4 - a_{12}a_{23}a_{34}b_4 + a_{13}a_{22}a_{34}b_4 - a_{13}a_{24}a_{32}b_4 - a_{14}a_{22}a_{33}b_4 \\ & + a_{14}a_{23}a_{32}b_4 + a_{12}a_{23}a_{44}b_3 - a_{12}a_{24}a_{43}b_3 - a_{13}a_{22}a_{44}b_3 + a_{13}a_{24}a_{42}b_3 \\ & + a_{14}a_{22}a_{43}b_3 - a_{14}a_{23}a_{42}b_3 - a_{12}a_{33}a_{44}b_2 + a_{12}a_{34}a_{43}b_2 + a_{13}a_{32}a_{44}b_2 \\ & - a_{13}a_{34}a_{42}b_2 - a_{14}a_{32}a_{43}b_2 + a_{14}a_{33}a_{42}b_2 + a_{22}a_{33}a_{44}b_1 - a_{22}a_{34}a_{43}b_1 \\ & - a_{23}a_{32}a_{44}b_1 + a_{23}a_{34}a_{42}b_1 + a_{24}a_{32}a_{43}b_1 - a_{24}a_{33}a_{42}b_1. \end{aligned}$$

上述公式可以用如下 MATLAB 程序验证.

MATLAB 程序 1.1

```
syms b1 b2 b3 b4 a11 a12 a13 a14...
a21 a22 a23 a24 a31 a32 a33 a34 a41 a42 a43 a44,b=[b1;b2;b3;b4],
A=[a11,a12,a13,a14;a21,a22,a23,a24;a31,a32,a33,a34;a41,a42,a43,a44]
x=A\b,x(1)
```

1.2.4 连加和连乘的性质

第 1 章多处用到连加和连乘符号, 例如降阶公式用到了 1 级连加符号, 证明 Cramer 法则时用到了 2 级连加符号, 范德蒙德行列式用到了 2 级连乘符号, 行列式的定义用到了 n 级连加符号 (表 1.2).

表 1.2 连加符号和连乘符号

功能	符号	单项数	等价符号
1 级连加	$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$	n	
2 级连加	$\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$	mn	$\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}$
2 级连乘	$\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n} x_{ij}$	$\dfrac{n(n-1)}{2}$	$\prod\limits_{j=1}^{n-1}\prod\limits_{i=j+1}^{n} x_{ij}$
n 级连加	$\sum\limits_{i_1 i_2\cdots i_n} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$	$n!$	$\sum\limits_{i_1=1}^{n} a_{1i_1}\sum\limits_{i_2\neq i_1} a_{2i_2}\cdots\sum\limits_{i_n\neq i_1,\cdots,i_n\neq i_{n-1}} a_{ni_n}$

(1) 1 级连加: $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 表示 n 个单项之和.

(2) 2 级连加: $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})+(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})+\cdots+(a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn})$ 表示 mn 个单项之和, 显然

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}, \tag{1.17}$$

即连加符号满足交换律, 等式左边表示先对每一行的 n 个元素求和, 然后求 m 行之和. 等式右边表示先对每一列的 m 个元素求和, 然后求 n 列之和. 总之, 两者都是 mn 个单项之和. 公式 (1.17) 用于证明 Cramer 法则, 在第 2 章中, 公式 (1.17) 还可用于证明矩阵乘法的结合律和矩阵迹的交换律.

(3) 2 级连乘: 在范德蒙德行列式中, 连乘符号 $\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}$ 表示 $(n-1)+(n-2)+\cdots+(n-n)=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个单项之积, 且

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n} x_{ij} = \prod_{j=1}^{n-1}\prod_{i=j+1}^{n} x_{ij}. \tag{1.18}$$

(4) n 级连加: 在行列式定义中, n 级连加符号 $\sum\limits_{i_1 i_2\cdots i_n}$ 很难理解, 它表示 $n!$ 个单项之和, 其中每一个单项与列标的一个 n 元排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 对应, 且

$$\sum_{i_1 i_2\cdots i_n} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} = \sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1}\sum_{i_2\neq i_1} a_{2i_2}\cdots\sum_{i_n\neq i_1,\cdots,i_n\neq i_{n-1}} a_{ni_n}. \tag{1.19}$$