金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

2017

李永乐·王式安唯一考研数学系列

全国十二大考研辅导机构指定用书

农学门类联考
数学复习全书

主编◎李永乐(清华大学)
王式安(北京理工大学)
章纪民(清华大学)

专为数学(农)考生倾情打造!

联袂权威名师梳理核心考点 立足考试大纲点明备考重点
多种方法解题开拓复习思路 精析历年真题提升做题技巧

超级服务 使用李永乐·王式安考研数学系列图书可全程获免费网络答疑服务。

双色印刷
绝佳的阅读体验

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

2017 李永乐·王式安唯一考研数学系列

全国十二大考研辅导机构指定用书

农学门类联考
数学复习全书

◎主编◎

李永乐 (清华大学)　王式安 (北京理工大学)　章纪民 (清华大学)

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

农学门类联考数学复习全书/李永乐，王式安，章纪民主编. —北京：北京理工大学出版社，2016.4

ISBN 978-7-5682-2107-8

Ⅰ.①农… Ⅱ.①李…②王…③章… Ⅲ.①农学－研究生－入学考试－习题集②高等数学－研究生－入学考试－习题集 Ⅳ.①S3－44②O13－44

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第067210号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1 / 16
印　　张 / 16.75
字　　数 / 385千字
版　　次 / 2016年4月第1版　2016年4月第1次印刷
定　　价 / 48.00元

责任编辑 / 陈莉华
文案编辑 / 陈莉华
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

前 言

为了帮助参加农学门类的考生能够在较短的时间内，准确理解和熟练掌握考试大纲知识点的内容，全面提高解题能力和应试水平，本书编写团队依据15年的命题与阅卷经验，并结合10多年的考研辅导和研究精华，精心编写了本书，真正起到帮助同学们提高综合分析和综合解题的能力。

一、本书的编排结构

根据数学(农)考试大纲的要求，全书由知识练习和真题两大模块构成，分三篇，各篇编排如下：

一、知识练习模块

1. 知识点　本部分按章节对考试大纲所要求的知识点进行全面阐述，并对考试重点、难点以及常考知识点进行深度剖析。设置本部分的目的是使考生明白考试内容和考试要求，从而在复习时有明确的目标和重点。

2. 练习题　只有适量的练习才能巩固所学的知识，数学复习离不开做题。为了使考生更好地巩固所学知识，提高实际解题能力，本书作者精心优化设计了一定数量的练习题，供考生练习，以便使考生在熟练掌握基本知识的基础上，达到轻松解答真题的水平。同时，本书作者对精选的练习题，进行了详细解析。

二、真题模块

本部分对历年真题的题型进行归纳分类，总结各种题型的解题方法。这些解法均来自各位专家多年教学实践总结和长期命题阅卷经验。针对以往考生在解题过程中普遍存在的问题及常犯的错误，给出相应的注意事项，对每一道真题都给出解题思路的分析，以便考生真正的理解和掌握解题方法。

二、本书的主要特色

1. 权威打造　命题专家和阅卷专家联袂打造，站在命题专家的角度命题，站在阅卷专家的角度解题，为考生提供最权威的复习指导。

2. 综合提升　与其他同类图书相比，本书加强了考查知识点交叉出题的综合性，真正起到帮助考生提高综合分析和综合解题的能力。

3. 分析透彻　本书既从宏观上把握考研对知识的要求，又从微观层面对重要知识点进行深入细致的剖析，让考生思路清晰、顺畅。

4. 一题多解　对于常考热点题型，均给出巧妙、新颖、简便的几种解法，拓展考生思维，锻

炼考生知识应用的灵活性。这些解法均来自各位专家多年教学实践总结和长期命题阅卷经验。

建议考生在使用本书时不要就题论题，而是要多动脑，通过对题目的练习、比较、思考，总结并发现题目设置和解答的规律性，真正掌握应试解题的金钥匙，从而迅速提高知识水平和应试能力，取得理想分数。

另外，为了更好地帮助同学们进行复习，“李永乐考研数学辅导团队”特在新浪微博上开设答疑专区，同学们在考研数学复习中，如若遇到任何问题，即可在线留言，团队老师将尽心为你解答。请访问 weibo. com@清华李永乐考研数学辅导团队。

希望本书能对同学们的复习备考带来更大的帮助。对书中的不足和疏漏之处，恳请读者批评指正。

祝同学们复习顺利，心想事成，考研成功！

编者

2016 年 4 月

目　录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第四篇　真题及答案解析

第一篇　高等数学

第一章　函数　极限　连续

第一节　函数

一、函数的定义

记 **R** 为实数集合.

定义:设集合 $I \subset \mathbf{R}$,若一个对应法则满足:对于任意的点 $x \in I$,存在唯一的数值 $y \in \mathbf{R}$ 与之对应,则我们将这个对应法则称为一个一元函数,记作 f,

$$x \mapsto f(x), x \in I$$

或

$$y = f(x), x \in I$$

其中 $x \in I$ 为**自变量**,$y \in \mathbf{R}$ 为**因变量**,I 为 f 的**定义域**,集合 $\{y \mid 存在 x \in I, 使 y = f(x)\}$ 为 f 的**值域**.

函数的两大要素$\begin{cases}定义域;\\对应法则.\end{cases}$

两个函数 f 与 g 相等指的是它们的定义域相同,对应法则也相同.例如:

$f(x) = x, g(x) = \dfrac{x^2}{x}$ 为一元函数,它们是不同的函数,因为它们的定义域不同.

二、函数的表示

函数有三种表示法:解析法,列表法和图像法.

1. 函数的解析法表示

函数的解析法又分为显函数和隐函数两种表示法,例如:

$y = \sqrt{1 - x^2}$ 是函数 $y = y(x)$ 的显函数表示(因变量 y 明显地表示成自变量 x 的函数),称为显函数;

$x^2 + y^2 = 1$ 是函数 $y = y(x)$ 的隐式表示(函数关系 $y = y(x)$ 是隐藏在方程中的.简单的

方程，可以用初等函数将 $y=y(x)$ 表示出来，在本例中，在 $y\geqslant 0$ 的额外条件下，可以解出显函数 $y=\sqrt{1-x^2}$；若方程复杂一点，例如方程 $x^2+y^2+\sin y=1$，要用初等函数将 $y=y(x)$ 表示出来是不可能的)，这样的函数 $y=y(x)$ 称为由方程确定的隐函数.

反函数也是函数的一种. 例如：$y=\sin x$ 的反函数是 $y=\arcsin x, x\in[-1,1]$. 更复杂的函数的反函数就不一定能用初等函数表示出来了，例如函数 $y=\sin x+x$ 的反函数 $x=x(y)$ 就不能用初等函数表示出来.

注意：高等数学中的自变量可以用 x 表示，也可以用 y 表示，同样因变量也可以用不同的字母表示. 在反函数的表达式中，没有必要将反函数 $x=\arcsin y, y\in[-1,1]$ 人为地改写成 $y=\arcsin x, x\in[-1,1]$. 要不然在求反函数的导数是会遇到不必要的困难.

在函数显函数表示法中，有一种特殊的函数：分段函数. 例如

$$y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0;\\ 1, & x=0;\\ x, & x>0\end{cases}$$

就是分段函数. 分段函数就是将初等函数分段定义，这是比初等函数稍难的函数.

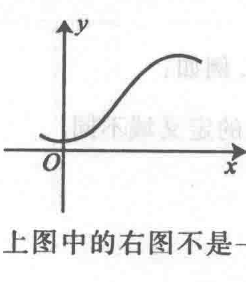
2. 函数的列表法表示

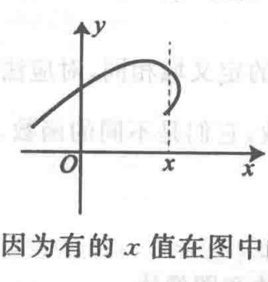
下列表格就表示一个函数 $y=y(x)$

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1.2	2.2	1.5	3.7	3.1	4.2	1.4	8.9

3. 函数的图像法表示

在 xy 平面上，有时一条曲线也表示一个函数，例如下图中的左图.





上图中的右图不是一个函数，因为有的 x 值在图中的曲线上对应两个 y 值.

三、函数的性质

1. 增减性(单调性)：设一元函数函数 $y=f(x)$ 定义域为 $I\subset\mathbf{R}$，若对于任意的 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在 I 上为**单调增函数**(非严格)；

若对于任意的 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时都有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在 I 上为**严格单调增函数**.

类似可给出单凋减函数的定义.

设一元函数 $y=f(x)$ 定义域为 $I\subset \mathbf{R}$，若对于任意的 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时都有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在 I 上为**单调减函数**(非严格)；

若对于任意的 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时都有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在 I 上为**严格单调减函数**.

函数的单调性有下列等价表述：对于任意 $x_1,x_2\in I, x_1\neq x_2$

$$f(x)\text{ 是单调增函数}\Leftrightarrow (x-y)[f(x)-f(y)]\geqslant 0$$

$$f(x)\text{ 是单调减函数}\Leftrightarrow (x-y)[f(x)-f(y)]\leqslant 0$$

$$f(x)\text{ 是单调严格增函数}\Leftrightarrow (x-y)[f(x)-f(y)]>0$$

$$f(x)\text{ 是单调严格减函数}\Leftrightarrow (x-y)[f(x)-f(y)]<0$$

2. 奇偶性：函数 $y=f(x)$ 的定义域 I 关于原点左右对称，且对于任意的 $x\in I$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**偶函数**；

函数 $y=f(x)$ 的定义域 I 关于原点左右对称，且对于任意的 $x\in I$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**奇函数**.

3. 周期性：若存在一个正数 T，使函数 $y=f(x)$ 在定义域内满足对于任意的 $x\in I$，$f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为**周期函数** 这里的正数 T 对一个周期函数来说不是唯一的(事实上有无穷多)，一般情况下，称其中最小正数称为**周期**.

并不是所有周期函数都有周期. 例如 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in \boldsymbol{Q};\\ 0, & x\in \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Q}\end{cases}$$

(**Q** 为有理数集合)，任意正实数都是周期，但不存在最小正实数，所以这个函数没有周期.

4. 有界性：设函数 $y=f(x)$ 在 I 上有定义，若存在一个正数 M 使得对于任意的 $x\in I$ 有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在 I 有界.

有界函数的否定就是无界函数：设函数 $y=f(x)$ 在 I 上有定义，若对于任意的正数 M，存在 $x_0\in I$，使得 $|f(x_0)|>M$，则称函数 $y=f(x)$ 在 I 无界.

四、函数的运算

1. 函数的四则运算

有公共定义域的两个函数可以定义**四则运算**.

设 $f(x),g(x)$ 均为定义域 I 上的函数，则可以定义新的函数 $f\pm g,\lambda f,fg,\dfrac{f}{g}$：

加法 $f\pm g: x\rightarrow f(x)\pm g(x)$，即 $(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$；

数乘 $\lambda f: x\mapsto \lambda f(x)$，即 $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$；

乘法 $fg: x\mapsto f(x)g(x)$，即 $(fg)(x)=f(x)g(x)$；

除法 $\dfrac{f}{g}: x\mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$，即 $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq 0)$.

2. 函数的复合运算

函数除了上述加、减、数乘、乘、除运算之外，还有**复合运算**.

例如：$y = e^{\sin x}$ 就是 $y = e^u$ 与 $u = \sin x$ 的复合；

$y = \ln(x^2 + |\sin x|)$ 就是 $y = \ln(u + v)$ 与 $\begin{cases} u = x^2, \\ v = |\sin x|. \end{cases}$ 的复合.

一般的两个函数 $y = f(u), u = g(x)$ 的复合函数为 $y = f(g(x))$.

五、基本初等函数、初等函数、函数关系的建立

基本初等函数为

幂函数：$y = x^\mu$，根据指数 μ 的不同，定义域也不同，函数的单调性也不同.

指数函数：$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$，$y = e^x$.

对数函数：$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$，以 e 为底的对数函数为 $y = \ln x$.

三角函数：$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$,

$y = \cot x = \dfrac{1}{\tan x}, y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}, y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$.

三角函数满足一些恒等式：

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$
$$\sec^2 x = \tan^2 x + 1;$$
$$\csc^2 x = \cot^2 x + 1;$$
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x.,$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$$

反三角函数：

$y = \arcsin x$，定义域：$[-1,1]$，值域：$\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$；

$y = \arccos x$，定义域：$[-1,1]$，值域：$[0,\pi]$；

$y = \arctan x$，定义域：$(-\infty,\infty)$，值域：$\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

初等函数：由基本初等函数的有限次四则运算和复合而成的函数.

第二节　极限

一、数列极限与函数极限的定义

1. 数列及数列的极限

数列：一列数的有序排列称为数列. 记作 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$，经常简记作 $\{x_n\}$.

数列的极限定义：数列 $\{x_n\}$，若存在某个常数 A，使得对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbf{N}^+$，使

得任意的 $n>N$,都有 $|x_n-A|<\varepsilon$,则称数列$\{x_n\}$当 n 趋于无穷大时的**极限**为 A,或**收敛**于 A. 记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

函数在一点处的极限定义:设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域

$$B_0(x_0,r)=\{x\mid 0<|x-x_0|<r,r>0\}$$

内有定义,若存在某个常数 A,使得对于任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0(\delta<r)$,使得任意的 $x:0<|x-x_0|<\delta$,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称函数 $y=f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的极限为 A,或函数 $y=f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时**收敛**于 A. 记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

有两种特别的极限:

(1) **无穷大**

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域

$$B_0(x_0,r)=\{x|0<|x-x_0|<r,r>0\}$$

内有定义,若对于任意的 $M>0$,存在 $\delta>0(\delta<r)$,使得任意的 $x:0<|x-x_0|<\delta$,恒有 $|f(x)|>M$,则记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$. 此时我们称函数 $y=f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时为无穷大.

(2) **x 趋于无穷时函数的极限**

x 趋于无穷时函数的极限有两种:

(Ⅰ) 设函数 $f(x)$ 在集合 $I=\{x\mid |x|>r\}(r>0)$ 内有定义,$A\in\mathbf{R}$,若对于任意的$\varepsilon>0$,存在 $L>0\ (L>r)$,使得任意的 x:$|x|>L$,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

(Ⅱ) 设函数 $f(x)$ 在集合 $I=\{x\mid |x|>r\}(r>0)$ 内有定义,若对于任意的 $M>0$,存在 $L>0(L>r)$,使得任意的 x:$|x|>L$,恒有$|f(x)|>M$,则记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

除此之外,还有 x 趋于正无穷($\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$)、$x$ 趋于负无穷($\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$) 等极限形式.

二、函数的左极限与右极限

1. 函数的左极限

函数在一点处的左极限:设函数 $y=f(x)$ 在某个区间$(x_0-r,x_0)(r>0)$内有定义,若存在某个常数 A 使得对于任意的$\varepsilon>0$,存在 $\delta>0(\delta<r)$,对于任意的 x:$-\delta<x-x_0<0$,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的左极限为 A,记作$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

2. 函数的右极限

函数在一点处的右极限:设函数 $y=f(x)$ 在某个区间$(x_0,x_0+r)(r>0)$内有定义,若存在某个常数 A 使得对于任意的$\varepsilon>0$,存在 $\delta>0(\delta<r)$,对于任意的 $x:0<x-x_0<\delta$,恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的右极限为 A,记作$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

关于极限、左极限和右极限,我们有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A\text{ 并且}\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

三、极限的性质

下面以 $x \to x_0$ 函数 $f(x)$ 的极限为例，其他极限（$x \to x_0^-$，$x \to x_0^+$，$x \to \infty$，$x \to +\infty$，$x \to -\infty$ 以及数列的极限）的结论完全类似.

1. 运算性质

(1) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$C$ 为实常数，则 $\lim\limits_{x \to x_0}(Cf(x)) = CA$；

(2) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$，则 $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$；

(3) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$，则 $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = AB$；

(4) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$g(x) \neq 0$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B \neq 0$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$；

(5) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，$f(x) \neq 0$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

2. 其他性质

(1) 极限的保序性(保号性)

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A > 0$，则在 x_0 的附近(除去 x_0)某区间内必然有 $f(x) > 0$. 换言之，若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A > 0$，则存在 x_0 的去心邻域

$$B_0(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$$

使当 $x \in B_0(x_0, \delta)$ 时，必然有 $f(x) > 0$.

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A < 0$，则在 x_0 的附近(除去 x_0)某区间内必然有 $f(x) < 0$.

(2) 极限的保序性

若存在 $\exists \delta > 0$，使得对于任意的 $x \in B_0(x_0, \delta)$，$f(x) \geqslant 0$，且极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \geqslant 0$；

若存在 $\exists \delta > 0$，使得对于任意的 $x \in B_0(x_0, \delta)$，$f(x) \leqslant 0$，且极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \leqslant 0$；

(3) 有界性

若极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 的附近(除去 x_0)某区间内有界. 换言之，若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 存在，则存在 x_0 的去心邻域

$$B_0(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$$

以及 $M > 0$，使当 $x \in B_0(x_0, \delta)$ 时，必然有 $|f(x)| \leqslant M$.

四、无穷小和无穷大

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$，则称 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$ 时无穷小(函数)；

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$ 时**无穷大**(函数)；

无穷大的倒数为无穷小，反之不成立. 例如函数 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ 当$x\to 0$时为无穷小，但是其倒数函数 $g(x)=\dfrac{1}{x\sin\frac{1}{x}}$ 当 $x\to 0$ 时不是无穷大，因为在 $x_n=\dfrac{1}{n\pi}$ 处，$g(x)$ 无定义.

设 $f(x)$，$g(x)$ 均为无穷小($x\to x_0$)，其中存在 x_0 的某个去心邻域，使得 $g(x)$ 在该去心邻域内不等于0. 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$ 存在，则根据 L 的不同，可以比较 $f(x)$，$g(x)$ 的大小.

(1) 若 $L=1$，称两个无穷小 $f(x)$，$g(x)$ **等价**，记作 $f(x)\sim g(x)$，$x\to x_0$.

两个等价无穷小是“差不多”大小的无穷小；

(2) 若 $L\neq 0$，称两个无穷小 $f(x)$，$g(x)$ **同阶无穷小**. 此时

$$f(x)\sim Lg(x),x\to x_0$$

两个同阶无穷小几乎只是差常数倍，也是“差不多”大小的无穷小.

我们将与$\{(x-x_0)^\lambda\}(\lambda>0)$同阶的无穷小称为**$\lambda$阶无穷小**(若考虑 $x\to\infty$ 时的无穷小，我们一般用$\left\{\frac{1}{x^\lambda}\right\}(\lambda>0)$ 作为尺度衡量无穷小). 这样我们就可以用“阶”来刻画无穷小的大小. 显然一个二阶无穷小“远小于”一阶无穷小.

例如：当 $x\to 0$ 时，函数 $2x^2+x^3$ 为二阶无穷小，这是因为

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2+x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{x^2}=2+0=2\neq 0$

事实上，当 $x\to 0$ 时，$2x^2+x^3\sim 2x^2$.

(3) 若 $L=0$，称 $f(x)$ 为 $g(x)$ 的**高阶无穷小**，记作 $f(x)=o(g(x))$，$x\to x_0$.

例如，当 $x\to 0$ 时 $x^3=o(x^2)$，所以当 x 接近 0 时，x^3“远小于”x^2.

显然，若 $f(x)$ 为 $g(x)$ 的高阶无穷小，则当 x 接近 x_0 时，$f(x)$“远小于”$g(x)$.

例如，当 $x\to 0$ 时 $x^3=o(x^2)$，所以当 x 接近 0 时，x^3“远小于”x^2.

(4) 等价无穷小(大)替换

乘除法的极限可用**等价无穷小(大)替换**的方法求：

若 $f(x)\sim g(x)$，$x\to x_0$ 为等价无穷小(大)，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)}{g(x)}$ 存在(或为无穷)，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{f(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)}{g(x)}$$

也存在(或为无穷).

注意：等价无穷小(大)替换的方法只能用于函数的乘除法，而不能用于其他运算(例如加减法).

常见的等价无穷小公式：当 $x\to 0$ 时

$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\ln(1+x)$；$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$；$a^x-1\sim x\ln a(a>0)$；$e^x-1\sim x$；

$(x+1)^\lambda-1\sim\lambda x(\lambda\in\mathbf{R})$；$\sin x-x\sim-\frac{1}{6}x^3$.

五、函数有极限的证明方法

(1) 单调有界准则

$y=f(x)$ 在 $(x_0,x_0+\delta)(\delta>0)$ 单调有界，右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 存在.

$y=f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)(\delta>0)$ 单调有界，左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 存在.

(2) 夹逼准则

设函数 $y=f(x)$ 与 $g(x),h(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)(\delta>0)$ 内有定义且满足

$$h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$$

若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 存在.

作为夹逼准则的特例，若 $|f(x)|\leqslant g(x)$，而 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

例如：$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$. 这是因为 $\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant|x|$，而显然 $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$.

六、两个常见极限

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，

作为特列，第二个极限还有常见的变形 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

第三节　函数的连续

一、函数在一点连续的概念

定义：设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $B(x_0,\delta)=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$ 内有定义，且

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点处连续.

一元函数的左连续：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$；

一元函数的右连续：$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$；

一元函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow y=f(x)$ 在点 x_0 处左连续且右连续.

二、连续函数的运算

1. 连续函数的四则运算均为连续函数(除数不为零)；